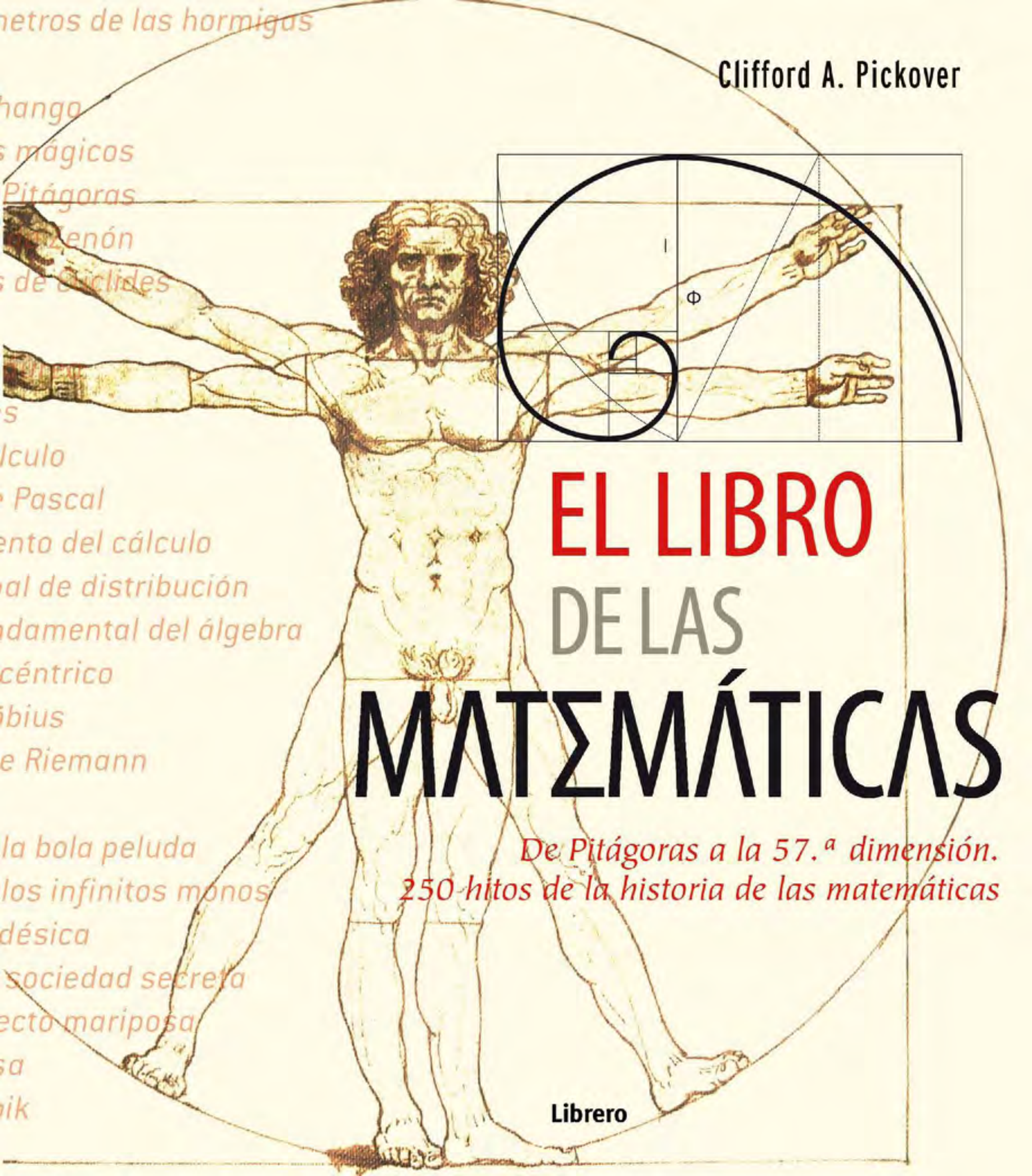

Clifford A. Pickover
EL LIBRO
DE LAS
MATΣMÁTICAS
De Pitágoras a la 57.ª dimensión.
250 hitos de la historia de las matemáticas
Librero

EL LIBRO DE LAS MATEMÁTICAS

De Pitágoras a la 57º dimensión, 250 hitos de la historia de las matemáticas

Clifford A. Pickover

Libros de Clifford A. Pickover

The Alien IQ Test
Archimedes to Hawking
A Beginner's Guide to Immortality
Black Holes: A Traveler's Guide
Calculus and Pizza
Chaos and Fractals
Chaos in Wonderland
Computers, Pattern, Chaos, and Beauty
Computers and the Imagination
Cryptorunes: Codes and Secret Writing
Dreaming the Future
Egg Drop Soup
Future Health
Fractal Horizons: The Future Use of Fractals
Frontiers of Scientific Visualization
The Girl Who Gave Birth to Rabbits
The Heaven Virus
Keys to Infinity
Liquid Earth
The Lobotomy Club
The Loom of God
The Mathematics of Oz
Mazes for the Mind: Computers and the Unexpected
Mind-Bending Visual Puzzles (calendars and card sets)
The Möbius Strip
The Paradox of God and the Science of Omniscience
A Passion for Mathematics
The Pattern Book: Fractals, Art, and Nature
The Science of Aliens
Sex, Drugs, Einstein, and Elves
Spider Legs (with Piers Anthony)
Spiral Symmetry (with Istvan Hargittai)
Strange Brains and Genius
Sushi Never Sleeps
The Stars of Heaven
Surfing through Hyperspace
Time: A Traveler's Guide
Visions of the Future
Visualizing Biological Information
Wonders of Numbers
The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars

Para Martin Gardner

Título original: *The Math Book*

Esta edición se ha publicado en colaboración con Sterling Publishing Co., Inc., 387 Park Ave. S., Nueva York, NY 10016, VS

Distribución exclusiva de la edición española:
ILUS BOOKS, S.L.
c/ Cobos de Segovia, 19 5º 1ª
28005 Madrid
N.I.F. B-85976280

Producción edición española: Cillero & de Motta Traducción
Traducción: Miguel Serrano Larraz, Sonia Saura Martinez, Joaquín Loste Ramos

Printed in China
Impreso en China

ISBN 978-90-8998-097-7

«Las matemáticas, bien entendidas, no sólo poseen verdad, sino también una belleza suprema: una belleza fría y austera, como la de la escultura».

—Bertrand Russell, *Mysticism and Logic*, 1918

«Las matemáticas son una disciplina maravillosa, alocada, llena de imaginación, de fantasía y de una creatividad que no se ve limitada por los pequeños detalles del mundo físico: su único límite es la fuerza de nuestra luz interior».

—Gregory Chaitin, "Less Proof, More Truth,"
New Scientist, 28 de julio de 2007

«Tal vez un ángel del Señor inspeccionó un mar infinito de caos y después lo removió suavemente con un dedo. En esa pequeña y temporal espiral de ecuaciones, nuestro cosmos tomó forma».

—Martin Gardner, *Order and Surprise*, 1950

«Las grandes ecuaciones de la física moderna forman parte permanente del conocimiento científico, que tal vez sobreviva incluso a las bellas catedrales de otras épocas».

—Steven Weinberg en el libro de Graham Farmelo
It Must Be Beautiful, 2002

ÍNDICE

Introducción

La belleza y la utilidad de las matemáticas

> *«Un observador inteligente que contemple cómo trabajan los matemáticos puede llegar a la conclusión de que son miembros de una secta exótica en busca de claves esotéricas que expliquen el universo».*
>
> —Philip Davis y Reuben Hersh, *The Mathematical Experience*

Las matemáticas impregnan todos los campos del conocimiento científico y desempeñan un papel incalculable en biología, física, química, economía, sociología e ingeniería. Las matemáticas pueden utilizarse para explicar los colores de un atardecer o la estructura cerebral. Nos ayudan a construir aviones supersónicos y montañas rusas, a simular el fluir de los recursos naturales de la Tierra, a explorar las realidades subatómicas y a imaginar galaxias lejanas. Las matemáticas han cambiado el modo en que miramos al cosmos.

Espero transmitir a los lectores el gusto por las matemáticas sin utilizar apenas fórmulas, pero ampliando y ejercitando la imaginación. En cualquier caso, este libro no trata meras curiosidades, carentes de interés para el lector medio. De hecho, los informes del Departamento de Educación de Estados Unidos sugieren que un estudiante que ha superado con éxito por un curso de matemáticas en el instituto tendrá mejores resultados en la universidad, con *independencia* de la carrera que elija.

Las matemáticas nos permiten construir naves espaciales e investigar la geometría del universo. Los números podrían ser la primera forma de comunicarnos con razas alienígenas inteligentes. Algunos físicos han llegado a jugar con la idea de que una mejor comprensión de las dimensiones superiores y de la *topología* (el estudio de las formas y de las relaciones entre ellas) podría llevarnos a escapar de nuestro universo algún día, cuando éste llegue a su por el calor o el frío: entonces podremos decir que todo el espacio-tiempo es nuestro hogar.

En la historia de las matemáticas ha habido muchos descubrimientos simultáneos. Como menciono en mi libro *The Möbius Strip*, el matemático alemán August Möbius (1790-1868) descubrió la cinta que lleva su nombre (un objeto maravilloso de una sola cara) en 1858, en el mismo momento en que lo hacía, de forma independiente, un académico contemporáneo, también alemán, Johann Benedict Listing (1808-1882). El descubrimiento simultáneo de la cinta de Möbius por parte de Möbius y Listing, parecido a lo que sucedió en el cálculo con el británico Isaac Newton (1643-1727) y el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), hace que me pregunte por qué hay tantos

descubrimientos científicos hechos al mismo tiempo por gente que trabaja de manera independiente. Otro ejemplo: los naturalistas británicos Charles Darwin (1809-1882) y Alfred Wallace (1823-1913) desarrollaron la teoría de la evolución de forma independiente y simultánea. De modo similar, el matemático húngaro János Bolyai (1802-1860) y el matemático ruso Nikolai Lobachevsky (1793-1856) desarrollaron la geometría hiperbólica de forma independiente y, según parece, al mismo tiempo.

Lo más probable es que estos hallazgos simultáneos hayan tenido lugar simplemente porque había llegado el momento, debido al conocimiento acumulado por la humanidad en el instante preciso en que se llevaron a cabo. A veces, dos científicos reciben el mismo estímulo al leer las mismas conclusiones previas de algún contemporáneo. Por otra parte, hay algunos científicos con una perspectiva mística que sugieren que estas coincidencias esconden un significado más profundo. El biólogo austriaco Paul Kammerer (1880-1926) escribió: «Y así llegamos a la imagen de un mundo-mosaico, un caleidoscopio cósmico que, a pesar de los constantes movimientos y reordenaciones, se preocupa por agrupar a los elementos similares». Comparó lo que ocurre en nuestro mundo con las crestas de las olas, que parecen aisladas y sin ninguna relación unas con otras. Según esta controvertida teoría, vemos la cresta de la ola, pero bajo la superficie debe existir algún mecanismo de sincronía que conecta y relaciona de forma misteriosa todo lo que sucede en nuestro mundo.

En The *Universal History of Numbers*, Georges Ifrah trata la simultaneidad al hablar de los matemáticos mayas:

> Comprobamos una vez más, por lo tanto, el modo en que gentes separadas en el tiempo y en el espacio han llegado a resultados muy similares, cuando no idénticos [...] En ciertos casos, la explicación está en los contactos e influencias entre distintos grupos [...] La verdadera explicación reside en lo que previamente hemos denominado la profunda unidad cultural: la inteligencia del *Homo sapiens* es universal, y su potencial presenta una marcada uniformidad en todos los lugares del mundo.

Los antiguos sentían una profunda fascinación por los números. Los griegos, por ejemplo. ¿Tal vez porque los números eran lo único que se mantenía igual en un mundo en constante cambio? Para los pitagóricos, una antigua secta griega, los números eran tangibles, inmutables, cómodos, eternos, más fiables que los amigos y menos amenazantes que Apolo y Zeus.

Muchos de los capítulos de este libro tienen que ver con los números enteros. El brillante matemático Paul Erdös (1913-1996), fascinado por la teoría de números, no tenía ningún problema en plantear problemas con números enteros que a menudo eran fáciles de plantear pero muy difíciles de resolver. Erdös creía que si un problema matemático seguía sin resolverse después de cien años, tenía que tratarse de un problema de teoría de números.

Muchos aspectos del universo pueden expresarse con números enteros. Los modelos numéricos son capaces de describir la reproducción de los conejos, la órbita de los planetas, las armonías musicales, la relación entre los elementos de la tabla periódica o el modo en que se organizan los pétalos de una margarita. Leopold Kronecker (1823-1891), especialista alemán en álgebra y teoría de números, dijo en cierta ocasión: «Dios hizo los números enteros. Todo lo demás se debe al hombre». Quería decir que la fuente básica de todas las matemáticas está en los números enteros.

Desde los tiempos de Pitágoras se valora el papel de las razones enteras en las escalas musicales. Y, lo que es más importante, los números enteros han sido cruciales en la evolución del pensamiento científico. El químico francés Antoine Lavoisier (1743-1794), por ejemplo, descubrió que los compuestos químicos se forman con unas proporciones fijas de elementos, que se corresponden con razones de números enteros pequeños. Fue una prueba casi decisiva de la existencia de los átomos. En 1925 ciertas relaciones enteras entre la longitud de onda de las líneas espectrales emitidas por átomos excitados dieron las primeras pistas sobre la estructura de los átomos. Las proporciones casi enteras de los pesos atómicos se convirtieron en prueba de que el núcleo atómico se forma con un número entero de nucleones similares (protones y neutrones). Las desviaciones respecto de proporciones enteras llevaron al descubrimiento de los isótopos de los elementos (variantes con un comportamiento químico casi idéntico, pero con distinto número de neutrones).

Las pequeñas divergencias en las masas atómicas de los isótopos puros respecto de enteros exactos confirmaron la famosa ecuación de Einstein $E=mc^2$ y condujeron a la posibilidad de la bomba atómica. En física atómica, los números enteros aparecen por todas partes. Las relaciones enteras son el hilo fundamental con que se tejen las matemáticas o, en palabras del matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855): «Las matemáticas son la reina de las ciencias y la teoría de números, la reina de las matemáticas».

Nuestra descripción matemática del universo no deja nunca de ampliarse, pero nuestros cerebros, al igual que nuestras habilidades lingüísticas, se mantienen enclaustrados. Cada día se descubren y crean nuevos tipos de matemáticas, pero necesitamos modos nuevos de pensarlas y comprenderlas. En los últimos años, por ejemplo, se han encontrado demostraciones matemáticas de algunos problemas famosos en la historia de esta disciplina, pero los desarrollos son tan extensos y complejos que ni siquiera los expertos están seguros de que sean correctas. El matemático Thomas Hales tuvo que esperar cinco años antes de que los expertos encargados de revisar su artículo sobre geometría (remitido a la revista *Annals of Mathematics*) decidieran por fin que no encontraban ningún error y que la demostración de Hale debía publicarse. Sin embargo, dejaron claro, para quitarse responsabilidad de encima, que no podían asegurar que fuera correcta. Para colmo, matemáticos como Keith Devlin han admitido en *The New York Times* que «la historia de las matemáticas ha llegado a un punto tal de abstracción que muchos de sus problemas límite no pueden entenderlos ni siquiera los expertos». Si los expertos se enfrentan a esos problemas, es fácil ver el desafío de hacer llegar información de este tipo a un público general. Hacemos lo que podemos. Los matemáticos pueden construir teorías y llevar a cabo cálculos de todo tipo, pero es posible que no dispongan de la capacidad para asimilar, explicar o comunicar esas ideas.

Utilicemos una analogía física. A Werner Heisenberg le preocupaba la idea de que el ser humano fuera incapaz de llegar a comprender los átomos. Niels Bohr, sin embargo, era un poco más optimista; a comienzos de los años veinte, respondió: «Creo que podemos llegar a conseguirlo, pero en el proceso tendremos que descubrir qué significa la palabra "comprender"». Hoy utilizamos ordenadores que nos ayudan a elevar los razonamientos por encima de los límites de nuestra intuición. De hecho, los experimentos con ordenadores están llevando a los matemáticos a descubrimientos con los que nadie soñó antes de que estos aparatos se generalizaran. Los ordenadores, y los gráficos que llevan a cabo, permiten que los matemáticos descubran resultados mucho antes de poder demostrarlos formalmente, con lo que se abren nuevos campos para las matemáticas. La más simple de las herramientas informáticas (una hoja de cálculo, por ejemplo) concede a los matemáticos actuales un poder por el que Gauss, Leonhard Euler y Newton habrían dado cualquier cosa. Sólo un ejemplo: a finales de la década de 1990, programas informáticos diseñados por David Bailey y Helaman Ferguson ayudaron a crear nuevas fórmulas que relacionaban el número π con el logaritmo de cinco y con otras dos constantes. Tal y como señala Erica Klarreich en *Science News*, una vez que el ordenador había producido una fórmula, demostrar que era correcta se convertía en algo extremadamente fácil. Muchas veces, saber la respuesta es el obstáculo más importante que hay que superar a la hora de formular una demostración.

Las teorías matemáticas se han utilizado a veces para predecir fenómenos que no se confirmaron hasta muchos años después. Las ecuaciones de Maxwell, por ejemplo, que deben su nombre al físico James Clerk Maxwell, predijeron las ondas de radio. Las ecuaciones de campo de Einstein implicaban que la gravedad podía curvar la luz y que el universo se expande. El físico Paul Dirac señaló en una ocasión que las matemáticas abstractas actuales permiten entrever la física del futuro. De hecho, sus ecuaciones predijeron la existencia de la antimateria. De un modo similar, el matemático Nikolai Lobachevsky dijo que «no hay una rama de las matemáticas, por abstracta que sea, que no pueda llegar a aplicarse algún día al mundo real».

En este libro, el lector encontrará algunas geometrías interesantes de las que se ha llegado a creer que contenían la clave del universo. Galileo Galilei (1564-1642) sugirió que «el gran libro de la naturaleza está escrito con símbolos matemáticos». Johannes Kepler (1571-1630) modeló el sistema solar a partir de sólidos platónicos como el dodecaedro. En los años sesenta, el físico Eugene Wigner (1902-1995) quedó impresionado por «la irrazonable efectividad de las matemáticas en las ciencias naturales». Es posible que los grupos de Lie grandes, por ejemplo E_8, del que hablaremos en «La búsqueda del grupo de Lie E8 (2007)», nos ayuden algún día a crear una teoría unificada de la física. En 2007 el cosmólogo sueco-estadounidense Max Tegmark publicó dos artículos, uno científico y otro popular, acerca de la hipótesis de un universo matemático, que asegura que nuestra realidad física es una estructura matemáticas. O en otras palabras, que no es que nuestro universo pueda describirse con matemáticas, sino que está hecho de matemáticas.

«Para cada uno de sus pasos decisivos la física ha necesitado, y a menudo, estimulado, la introducción de nuevas herramientas y conceptos matemáticos. Nuestra comprensión actual de las nuevas leyes de la física, con su precisión y universalidad extremas, sólo es posible en términos matemáticos».

—Sir Michael Atiyah, «Pulling the Strings», *Nature*

Una característica común a todos los matemáticos es la pasión por la completitud, un impulso que les lleva a explicar su trabajo partiendo de los principios básicos. Como resultado, los lectores de textos matemáticos casi siempre tienen que soportar muchas páginas de antecedentes antes de llegar a los hallazgos esenciales. Para evitar este problema, todos los capítulos de este libro son breves: sólo ocupan unos pocos párrafos. Este formato permite que los lectores entren de lleno en un tema concreto, sin tener que esquivar un montón de palabras vacías. ¿Quiere saber algo acerca del infinito? Vaya a los capítulos «Los números transfinitos de Cantor» (1874) o «El hotel infinito de Hilbert» (1925) y encontrará una rápida tabla de gimnasia mental. ¿Le interesa la primera calculadora mecánica portátil que tuvo éxito comercial, desarrollada por un prisionero de un campo de concentración nazi? Vaya a «La calculadora Curta» (1948) y hallará una breve introducción al tema.

¿Se ha preguntado alguna vez cómo puede ser que un teorema con un nombre casi ridículo puede llegar a ser de gran ayuda para que los científicos construyan nanoalambres para aparatos electrónicos? Pase páginas hasta llegar al capítulo dedicado a «El teorema de la bola peluda» (1912). ¿Por qué los nazis obligaron al presidente de la sociedad matemática polaca a alimentar a piojos con su propia sangre? ¿Por qué asesinaron a la primera mujer matemática? ¿De verdad es posible darle la vuelta a una esfera? ¿Quién fue el «Papa de los números»? ¿Cuándo hizo el ser humano el primer nudo? ¿Por qué dejamos de utilizar los números romanos? ¿Quién fue, en la historia de las matemáticas, la primera persona de la que sabemos el nombre? ¿Es posible que una superficie tenga una sola cara? Trataremos éstas y otras cuestiones intelectualmente sugerentes en las páginas que vienen a continuación.

Mi manera de abordar todos estos temas presenta algunas desventajas, por supuesto. Ningún tema puede tratarse en profundidad en unos pocos párrafos. En cualquier caso, sugiero otras lecturas para ampliar contenidos en el apartado «Notas y lecturas recomendadas». En algunos casos remito a fuentes primarias, pero a menudo señalo de modo explícito una bibliografía secundaria excelente que los lectores podrán conseguir con más facilidad. Aquellos interesados en profundizar en cualquiera de los temas pueden tomar estas referencias como punto de partida.

Mi objetivo al escribir este libro es proporcionar a un público amplio una breve guía que le muestre las ideas y pensadores matemáticos más relevantes, con capítulos breves que puedan asimilarse en unos pocos minutos. La mayoría de los capítulos tratan sobre temas

que me han interesado de forma personal. Sin embargo, no todos los momentos decisivos de la historia de las matemáticas han encontrado un hueco en este libro: quería evitar que fuera demasiado extenso. Así, al ensalzar las maravillas de las matemáticas en un volumen breve, me he visto obligado a omitir muchos prodigios matemáticos importantes. En cualquier caso, creo haber incluido la mayor parte de aquellos que, debido a su relevancia histórica, se han convertido en una fuerte influencia para las matemáticas, la sociedad o el pensamiento humano. Algunos capítulos, eminentemente prácticos, tratan asuntos que van de las reglas de cálculo y otros elementos de función similar a las cúpulas geodésicas y la invención del cero. En alguna ocasión he incluido aspectos más ligeros, aunque igual de significativos, como el cubo de Rubik o la solución del problema de la sábana. Hay ciertas informaciones repetidas en distintos capítulos, para que cada uno pueda leerse de forma independiente. Los textos en negrita indican al lector los capítulos relacionados. Además, una pequeña sección titulada «Véase también», al final de cada capítulo, ayuda a relacionar temas para formar una red que puede resultar útil para que el lector recorra por el libro de forma lúdica.

El libro de las matemáticas refleja mis propias deficiencias intelectuales: aunque trato de estudiar tantas áreas de ciencia y matemáticas como me es posible, se hace difícil lograr fluidez en todas; este libro señala de forma clara mis intereses personales y los aspectos que conozco mejor y peor. Soy el responsable de los capítulos fundamentales del libro y, por lo tanto, de cualquier error que puedan contener. El lector no tiene ante sí una disertación académica o sistemática, sino una lectura que se pretende recreativa, destinada a estudiantes de ciencias y de matemáticas o a legos interesados en estos asuntos. Agradeceré cualquier comentario o sugerencia que permita mejorar este libro, ya que lo considero un proyecto en marcha y una tarea muy gratificante.

El libro está organizado cronológicamente, en función del año de un hito o descubrimiento matemático. En algunos casos la bibliografía especializada nos da fechas algo distintas para un mismo hallazgo; esto se debe a que algunas fuentes dan como fecha del descubrimiento la fecha de publicación, mientras otras prefieren señalar la fecha en que el descubrimiento tuvo lugar, con independencia del hecho de que la publicación se retrasara uno o más años. Cuando no he tenido certeza de la fecha del hallazgo, he utilizado la fecha de publicación.

La datación de los capítulos también puede convertirse en una cuestión subjetiva cuando más de un investigador ha contribuido a un descubrimiento. He indicado la fecha más temprana cuando lo he considerado oportuno, pero en algún caso he preguntado a mis colegas y he decidido dar la fecha en que un concepto determinado adquirió una relevancia particular. Consideremos el caso del código Gray, que se utiliza para facilitar la corrección de errores en comunicaciones digitales, por ejemplo en la transmisión de la señal de televisión, y para lograr que los sistemas de transmisión tengan menos problemas de ruido. El código recibe el nombre de Frank Gray, un físico que trabajó en los laboratorios Bell de telefonía en las décadas de 1950 y 1960. En aquellos años, este tipo de códigos adquirió una relevancia particular, en parte debido a la patente registrada en 1947 y al auge de las comunicaciones modernas. El capítulo sobre el código Gray

se fecha por tanto en 1947, a pesar de que podríamos haberlo datado mucho antes; las bases de la idea remiten a Émile Baudot (1845-1903), el pionero francés del telégrafo. En cualquier caso, he tratado de ofrecer a los lectores una franja de posibles fechas, ya sea en el propio capítulo o en la sección de «Notas y lecturas recomendadas».

Los expertos suelen discutir acerca de la persona a la que se atribuye históricamente un descubrimiento. El autor Heinrich Dörrie, por ejemplo, cita cuatro académicos que no creen que una versión particular del problema del ganado de Arquímedes se deba a Arquímedes, pero cita otros cuatro que creen que el problema debe atribuirse sin duda a Arquímedes. Los expertos también debaten sobre la autoría de la paradoja de la rueda de Aristóteles. Menciono dichas discusiones, siempre que es posible, en el texto principal o en la sección «Notas y lecturas recomendadas».

El lector se dará cuenta de que un número significativo de descubrimientos se ha hecho en unas pocas décadas, las más recientes. Sólo un ejemplo: en 2007, los investigadores «resolvieron» por fin el juego de las damas. Demostraron que, si el oponente juega de manera perfecta, la partida siempre termina en tablas. Como ya he mencionado, gran parte del reciente progreso matemático se debe al uso de ordenadores como herramienta para los experimentos matemáticos. Los análisis para resolver el juego de las damas comenzaron en 1989; hubo que utilizar docenas de ordenadores para llegar a una solución completa. El juego tiene aproximadamente quinientos millones de billones de posiciones posibles.

A veces se cita en el capítulo a divulgadores científicos o a investigadores célebres; si no doy la fuente de la cita o las credenciales del autor en el mismo texto es sólo por cuestiones de brevedad. Pido disculpas por este tratamiento, demasiado compacto en ocasiones; en cualquier caso, las referencias de la parte final del libro deberían ayudar a dejar clara la identidad del autor citado.

Incluso el nombre de un teorema puede convertirse en una cuestión peliaguda. El matemático Keith Devlin, por ejemplo, escribió lo siguiente en 2005, en su columna de la Asociación Matemática de América:

> La mayor parte de los matemáticos demuestra muchos teoremas en su vida, y el proceso por el cual su nombre se asocia sólo a uno de ellos parece caprichoso. Euler, Gauss y Fermat, por citar sólo unos pocos nombres, demostraron cientos de teoremas, muchos de ellos importantes; su nombre, sin embargo, se asocia sólo a unos pocos. A veces los teoremas reciben nombres equivocados. El caso más célebre es el de Fermat, que casi con toda certeza no demostró «El último teorema de Fermat»; el nombre se lo dio otra persona, tras su muerte, a una conjetura que el matemático francés garabateó en el margen de un manual. Y el teorema de Pitágoras se conocía mucho antes de que Pitágoras entrara en escena.

Antes de terminar, permítanme que señale que los descubrimientos matemáticos proporcionan un marco desde el que explorar la naturaleza de la realidad, y las

herramientas matemáticas permiten que los científicos hagan predicciones acerca del universo, así que los descubrimientos de este libro se encuentran entre los más grandes logros de la humanidad.

Este libro puede parecer, a primera vista, un largo catálogo de conceptos aislados y de personalidades difíciles de relacionar. Y sin embargo, a medida que vaya leyendo, el lector comenzará a encontrar numerosos vínculos. Parece evidente que el objetivo final de científicos y matemáticos no consiste en una simple recopilación de hechos, ni en la acumulación de listas de fórmulas, sino en tratar de comprender la organización, los principios rectores y las relaciones entre estos hechos para elaborar teoremas y ramas completamente nuevas del pensamiento humano. Para mí, las matemáticas son una forma de cultivar un perpetuo estado de asombro ante la naturaleza de la mente, los límites del pensamiento y nuestro lugar en este enorme cosmos.

Puede que nuestros cerebros, que evolucionaron para permitirnos huir de los leones en la sabana africana, no estén preparados para traspasar el velo infinito de la realidad. Es posible que, para rasgar ese velo, necesitemos las matemáticas, la ciencia, los ordenadores, el aumento de la capacidad craneal e incluso la literatura, el arte y la poesía. A aquellos lectores que estén a punto de embarcarse en la lectura de *El libro de las matemáticas* de principio a fin les aconsejo que busquen las conexiones entre unos temas y otros, que se asombren ante la evolución de las ideas y naveguen por el ilimitado océano de la imaginación.

Agradecimientos

Quiero agradecer a Teja Krašek, Dennis Gordon, Nick Hobson, Pete Barnes y Mark Nandor sus comentarios y sugerencias. También quiero dar las gracias de forma especial a Meredith Hale, mi editora en este libro, así como a Jos Leys, Teja Krašek y Paul Nylander, que me han permitido utilizar sus obras de arte inspiradas en las matemáticas.

Mientras investigaba los momentos decisivos que se presentan en este libro estudié un amplio abanico de maravillosos libros de referencia y páginas web, muchos de los cuales aparecen en la sección «Notas y lecturas recomendadas», que se encuentra hacia el final. Entre estas referencias me gustaría destacar las siguientes: "The MacTutor History of Mathematics Archive" (www-history.mcs.st-and.ac.uk), "Wikipedia: The Free Encyclopedia" (en.wikipedia.org), "MathWorld" (mathworld.wolfram.com), *Mathematics: From the Birth of Numbers*, de Jan Gullberg, *The Universal Book of Mathematics*, de David Darling, los "Math Trek Archives" de Ivars Peterson (www.maa.org/mathland/mathland_archives.html), *Mathematical Games*, de Martin Gardner (un CD-ROM disponible gracias a la MAA, Asociación Matemática Estadounidense) y algunos de mis propios libros, por ejemplo *A Passion for Mathematics*.

El cuentakilómetros de las hormigas

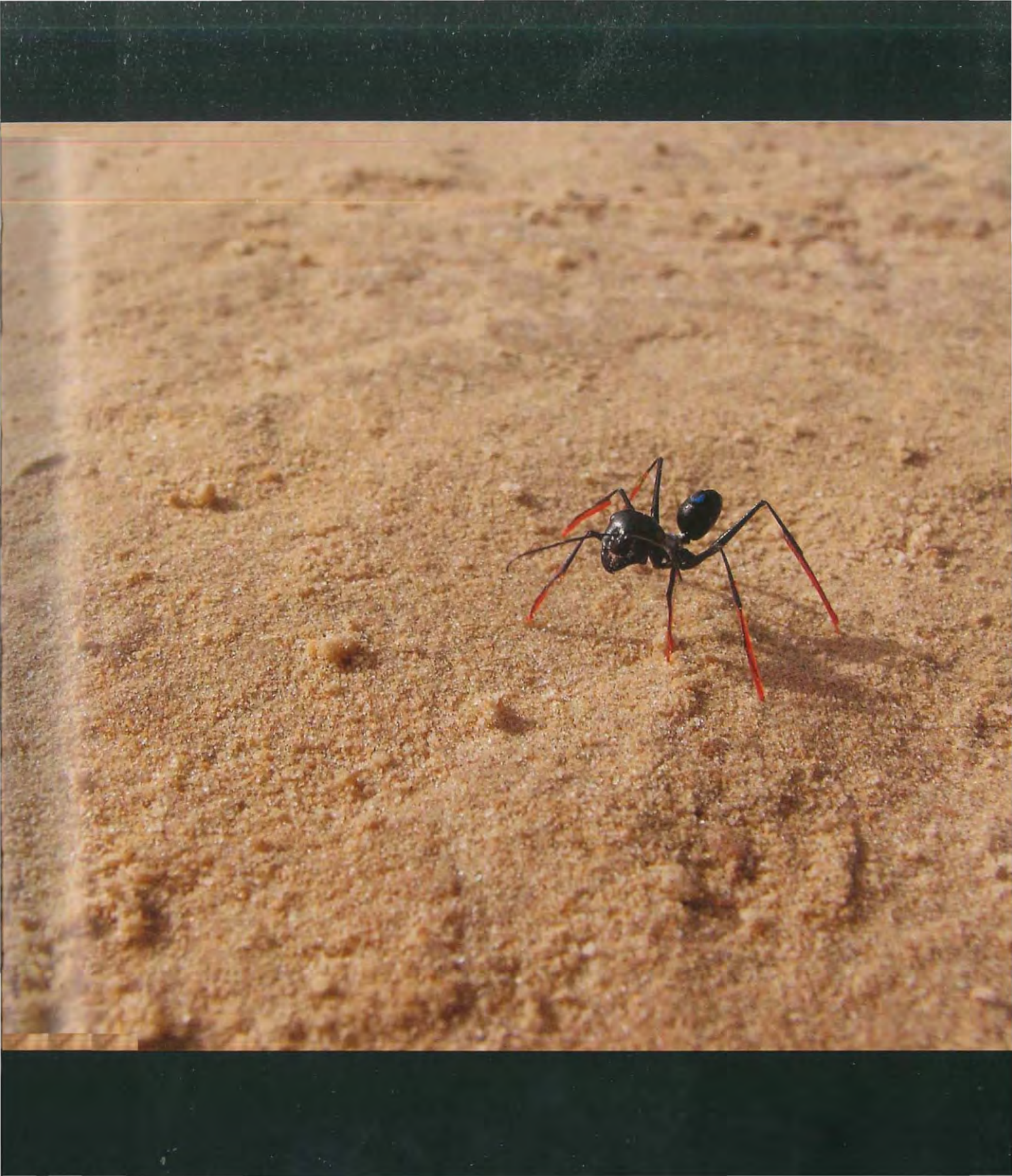
Las hormigas son insectos sociales que evolucionaron a partir de insectos parecidos a las actuales avispas. Esto ocurrió a mitad del periodo Cretácico, hace unos ciento cincuenta millones de años. Hace cien millones de años, a consecuencia de la proliferación de plantas con flores, las hormigas se diversificaron en numerosas especies.

La hormiga del desierto del Sáhara, *Cataglyphis fortis*, atraviesa enormes extensiones de terreno arenoso en busca de alimentos, muchas veces sin ningún tipo de punto de referencia. Estas criaturas son capaces de regresar a su nido utilizando una ruta directa, sin necesidad de rehacer el camino del que se sirvieron a la ida. No sólo pueden orientarse gracias a la luz, sino que da la impresión de que han sido capaces de construir un «ordenador», una especie de podómetro que cuenta sus pasos y que les permite medir distancias con enorme precisión. Una hormiga puede llegar a recorrer cincuenta metros hasta encontrar un insecto muerto. Arranca un trozo y lo lleva sin dudar al hormiguero, al que se accede por un agujero a menudo de menos de un milímetro de diámetro.

Manipulando la longitud de las patas de las hormigas para hacer que sus pasos sean más largos o más cortos, un equipo de investigación formado por científicos alemanes y suizos descubrió que las hormigas «cuentan» los pasos para calibrar la distancia. Después de que las hormigas hubieron alcanzado su destino, se alargó el tamaño de sus patas con una especie de zancos, o se acortó por medio de una amputación parcial. A continuación, los investigadores soltaron a los insectos para que pudieran comenzar su regreso al hormiguero. Las hormigas con las patas alargadas caminaron demasiado y dejaron atrás la entrada del hormiguero, mientras que las que habían sufrido el acortamiento por amputación no llegaron a alcanzarlo. En cualquier caso, si las hormigas realizaban el viaje completo con las patas modificadas, ida y vuelta, no tenían ningún problema para medir las distancias. Parece, por tanto, que la longitud de la zancada es el factor esencial. Más aún, el sofisticado ordenador del cerebro de las hormigas les permite computar una variable relacionada con la proyección horizontal del recorrido, de modo que no se pierden aunque el arenoso trayecto cree nuevas colinas y valles antes del regreso.

VÉASE TAMBIÉN Los primates saben contar (c. 30 millones a. C.) y Números primos generados por cigarras (c. 1 millón a. C.).

Las hormigas del desierto del Sáhara han sido capaces de incorporar «podómetros» que contabilizan sus pasos y les permiten medir distancias con exactitud. Las hormigas con zancos pegados a las patas (en rojo) caminan demasiado y rebasan la entrada al hormiguero, lo que indica que la longitud de la zancada es fundamental a la hora de determinar las distancias.



Los primates saben contar

Hace unos sesenta millones de años, pequeños primates parecidos a los lémures habían evolucionado en muchas áreas del planeta. Hace treinta millones de años ya existían primates con características similares a las de los actuales monos. Esas criaturas, ¿eran capaces de contar? La capacidad de *contar* de los animales es un asunto muy debatido entre los expertos en comportamiento animal. En cualquier caso, muchos de ellos sugieren que los animales tienen cierta noción de lo que son los números. H. Kalmus, en su artículo «Animals as Mathematicians», de la revista *Nature* dice:

> A día de hoy quedan pocas dudas acerca de que a algunos animales, por ejemplo a las ardillas y a los loros, se les puede enseñar a contar... La facultad de contar se ha detectado en ardillas, en ratas y en insectos polinizadores. Algunos de estos animales son capaces de distinguir de alguna manera números en patrones visuales similares, mientras que a otras especies se les puede enseñar a reconocer, o incluso a reproducir, secuencias de señales acústicas. A unos pocos se les puede entrenar incluso para que den tantos golpecitos como elementos (puntos) ven en una determinada imagen... La ausencia de numerales orales y de símbolos escritos hace que mucha gente se muestre reacia a aceptar la idea de que algunos animales tienen facultades matemáticas.

Algunas ratas han aprendido a «contar»: son capaces de reproducir una actividad un número concreto de veces a cambio de una recompensa. Los chimpancés pueden seleccionar en un ordenador el número que corresponde a los plátanos que hay en una caja. Tetsuro Matsuzawa, del Instituto de Investigaciones con Primates de la Universidad de Kioto, enseñó a un chimpancé a identificar los números del 1 al 6 presionando la tecla adecuada de un ordenador cuando le mostraban un determinado número de objetos en la pantalla.

Michael Beran, investigador de la Georgia State University de Atlanta, adiestró a unos chimpancés para que utilizaran la pantalla y el *joystick* de un ordenador. En la pantalla aparecían un número y una serie de puntos, y los chimpancés tenían que relacionarlos. Uno de ellos aprendió los números del 1 al 7; otro logró llegar a contar hasta 6. Cuando se volvió a examinar a los chimpancés, tres años después, ambos seguían siendo capaces de identificar los números, aunque la tasa de error se había duplicado.

VÉASE TAMBIÉN El cuentakilómetros de las hormigas (c. 150 millones a. C.) y El hueso de Ishango (c. 18.000 a. C.) .

Parece que los primates poseen algún tipo de concepto numérico, y los primates superiores pueden aprender a identificar los números del 1 al 6 y a presionar la tecla adecuada de un ordenador cuando se les muestra un número determinado de objetos.



Números primos generados por cigarras

Las cigarras son insectos alados que evolucionaron hace 1,8 millones de años, durante el Pleistoceno, en el momento en que los glaciares avanzaban y retrocedían en América del Norte. Las cigarras del género *Magicicada* pasan la mayor parte de su vida bajo tierra, donde se alimentan de jugos de raíces antes de emerger, aparearse y morir. Estas criaturas muestran un comportamiento sorprendente. Salen a la luz al cabo de un ciclo periódico que suele ser de 13 o 17 años: dos números primos. (Un número primo es un número entero que sólo es divisible por 1 y por sí mismo, como el 11, el 13 y el 17.) En la primavera de su decimotercer o decimoséptimo año, estas cigarras periódicas construyen un túnel de salida. A veces, más de un millón y medio de individuos emergen en menos de media hectárea; esta abundancia de ejemplares puede responder a una razón de supervivencia, ya que les permite abrumar a sus depredadores, por ejemplo los pájaros, incapaces de comérselas todas.

Algunos investigadores han conjeturado que esta evolución, que ha llevado a ciclos que coinciden con números primos, tuvo lugar para que las cigarras tuvieran más posibilidades de escapar de los predadores y parásitos, cuya vida es más corta. Por ejemplo, si sus ciclos vitales fuesen de doce años, los predadores con ciclos vitales de 2, 3, 4 o 6 años lo tendrían más fácil para encontrar a los insectos. Mario Markus, del Instituto Max Plank de Fisiología Molecular de Dortmund, en Alemania, descubrió, junto a sus colaboradores, que este tipo de ciclos basados en números primos surge de forma natural a partir de modelos matemáticos evolutivos que reflejan la interacción entre predadores y presas. Para comprobarlo, simularon por ordenador diversas poblaciones de insectos y les asignaron ciclos vitales de duración aleatoria. Después de un tiempo, una serie de mutaciones en el sistema acababa llevando a las cigarras a ciclos estables cuya duración era un número primo.

Esta investigación está todavía en sus inicios, por supuesto, y quedan muchas cuestiones por resolver. ¿Qué tienen de especial el 13 y el 17? ¿Qué predadores y parásitos han sido realmente los que han llevado a las cigarras a ceñirse a estos periodos? Queda otro misterio: saber por qué, de entre las mil quinientas especies de cigarras que hay en el planeta, sólo de un pequeño número del género *Magicicada* se sabe que son periódicas.

VÉASE TAMBIÉN El cuentakilómetros de las hormigas (c. 150 millones a. C.), El hueso de Ishango (c. 18.000 a. C.), La criba de Eratóstenes (c. 240 a. C.), La conjetura de Goldbach (1742), La construcción de un heptadecágono regular (1796), Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801), La demostración del teorema de los números primos (1896), La constante de Brun (1919), La conjetura de Gilbreath (1958), Los números de Sierpiński (1960), La espiral de Ulam (1963), Erdös y la colaboración extrema (1971) y La conjetura de Andrica (1985).

Algunas cigarras muestra un comportamiento asombroso: salen de debajo del suelo en periodos sincronizados con los números primos 13 y 17. A veces, más de un millón y medio de individuos emergen en menos de media hectárea en un corto intervalo de tiempo.



Nudos

El uso de nudos es anterior al hombre moderno (*Homo sapiens*). Por ejemplo, las conchas marinas teñidas de ocre y atravesadas por agujeros descubiertas en una cueva de Marruecos datan de hace ochenta y dos mil años. Otras pruebas arqueológicas indican que los humanos utilizaban cuentas mucho antes. Los agujeros implican el uso de cuerdas y de nudos con los que atar los objetos mediante un lazo a, por ejemplo, un collar.

El ejemplo más claro de nudos decorativos se encuentra en el *Libro de Kells*, un Nuevo Testamento que los monjes celtas ilustraron con motivos ornamentales en el año 800 de nuestra era. En tiempos más recientes, el estudio de nudos, por ejemplo del nudo de trébol con tres cruces, forma parte de una rama de las matemáticas que estudia los bucles cerrados. En 1914, el matemático alemán Max Dehn (1878-1952) demostró que las imágenes especulares del nudo de trébol no son equivalentes.

Los matemáticos han tratado durante siglos de desarrollar un modo de distinguir las marañas que *parecen* nudos (llamados *nudos triviales*) de los verdaderos nudos, así como de clasificar los distintos nudos verdaderos. A lo largo de los años, los matemáticos han creado tablas aparentemente infinitas de nudos distintos. Hasta ahora se han identificado un millón setecientos mil nudos no equivalentes con dieciséis cruces o menos.

Hay congresos específicos dedicados a los nudos. Los científicos estudian los nudos en campos que van desde la genética molecular (para ayudarnos a comprender cómo desenmarañar una hélice de ADN) a la física de partículas, en un intento de representar la naturaleza fundamental de las partículas elementales.

Los nudos han resultado cruciales en el desarrollo de la civilización, ya que se han utilizado para atar la ropa, para asegurar las armas al cuerpo, para crear refugios y para permitir que los barcos naveguen. La teoría de nudos ha avanzado tanto que a los simples mortales les cuesta comprender sus aplicaciones más profundas. En unos pocos milenios los seres humanos han transformado los nudos, que antes eran simples maneras de atar cosas, en modelos de la estructura misma de la realidad.

VÉASE TAMBIÉN Quipus (c. 3000 a. C.), Los anillos de Borromeo (834), Los nudos de Perko (1974), El polinomio de Jones (1984) y La ley de Murphy y los nudos (1988).

El ejemplo más claro de nudos decorativos se encuentra en el Libro de Kells, *un Nuevo Testamento que los monjes celtas ilustraron con motivos ornamentales en el año 800 de nuestra era. Varias formas parecidas a nudos pueden observarse con detalle en esta ilustración.*



c. 18.000 a. C.

El hueso de Ishango

En 1960, el geólogo y explorador belga Jean de Heinzelin de Braucourt (1920-1998) descubrió, en lo que hoy es la República Democrática del Congo, un hueso de babuino con una serie de marcas. Al principio se creyó que el hueso de Ishango, con sus muescas, era una simple vara de cuentas que utilizaban los africanos de la Edad de Piedra. En cualquier caso, algunos científicos consideran que las marcas indican cierta destreza matemática que va más allá de la mera tarea de contar objetos.

El hueso se encontró en Ishango, cerca de las fuentes del Nilo, hogar de una numerosa población de seres humanos del Paleolítico superior previa a una erupción volcánica que sepultó la zona. Una de las columnas de marcas del hueso comienza con tres muescas que se duplican y se convierten en seis. Cuatro muescas se convierten en ocho. Diez muescas se dividen por dos, y quedan cinco. Estas secuencias parecen indicar una aproximación a las nociones de multiplicar y dividir por dos. Aún más chocante es el hecho de que los números de otras columnas sean todos impares (9, 11, 13, 17, 19 y 21). Una de las columnas contiene los números primos que hay entre el 10 y el 20; y la suma de los números de cada columna da como resultado 60 o 48, dos múltiplos de 12.

Se han encontrado otras varas para contar anteriores al hueso de Ishango. El hueso de Swaziland Lebombo, por ejemplo, es un peroné de babuino de treinta y siete mil años de antigüedad que contiene veintinueve muescas. En Checoslovaquia se encontró una tibia de lobo, de 32.000 años de antigüedad, con cincuenta y siete muescas agrupadas de cinco en cinco. Aunque se trata sólo de una hipótesis, hay quien cree que las marcas del hueso de Ishango forman una especie de calendario lunar de la mujer de la Edad de Piedra, que llevaba la cuenta de sus ciclos menstruales, lo que ha llevado a acuñar la frase «la menstruación creó las matemáticas». Aunque el hueso de Ishango fuera un simple mecanismo para llevar cuentas, da la impresión de que estas varas nos separan del resto de los animales y representan el primer paso hacia las matemáticas simbólicas. El misterio del hueso de Ishango no podrá resolverse por completo mientras no se encuentren objetos similares.

VÉASE TAMBIÉN Los primates saben contar (c. 30 millones a. C.), Números primos generados por cigarras (c. 1 millón a. C.) y La criba de Eratóstenes (c. 240 a. C.)

En un principio se creyó que el hueso de babuino de Ishango, con sus muescas ordenadas, era una simple vara de cuentas que utilizaban los africanos de la Edad de Piedra. Sin embargo, algunos científicos creen que las muescas indican destrezas matemáticas que van más allá de la simple tarea de contar objetos.



Quipus

Los antiguos incas utilizaban *quipus*, verdaderos bancos de memoria construidos con cuerdas y nudos, para registrar información numérica. Hasta hace poco, los quipus más antiguos que se conocían databan aproximadamente del año 650 d. C. En 2005, sin embargo, se encontró un quipu de cinco mil años de antigüedad en la ciudad costera de Caral, en Perú.

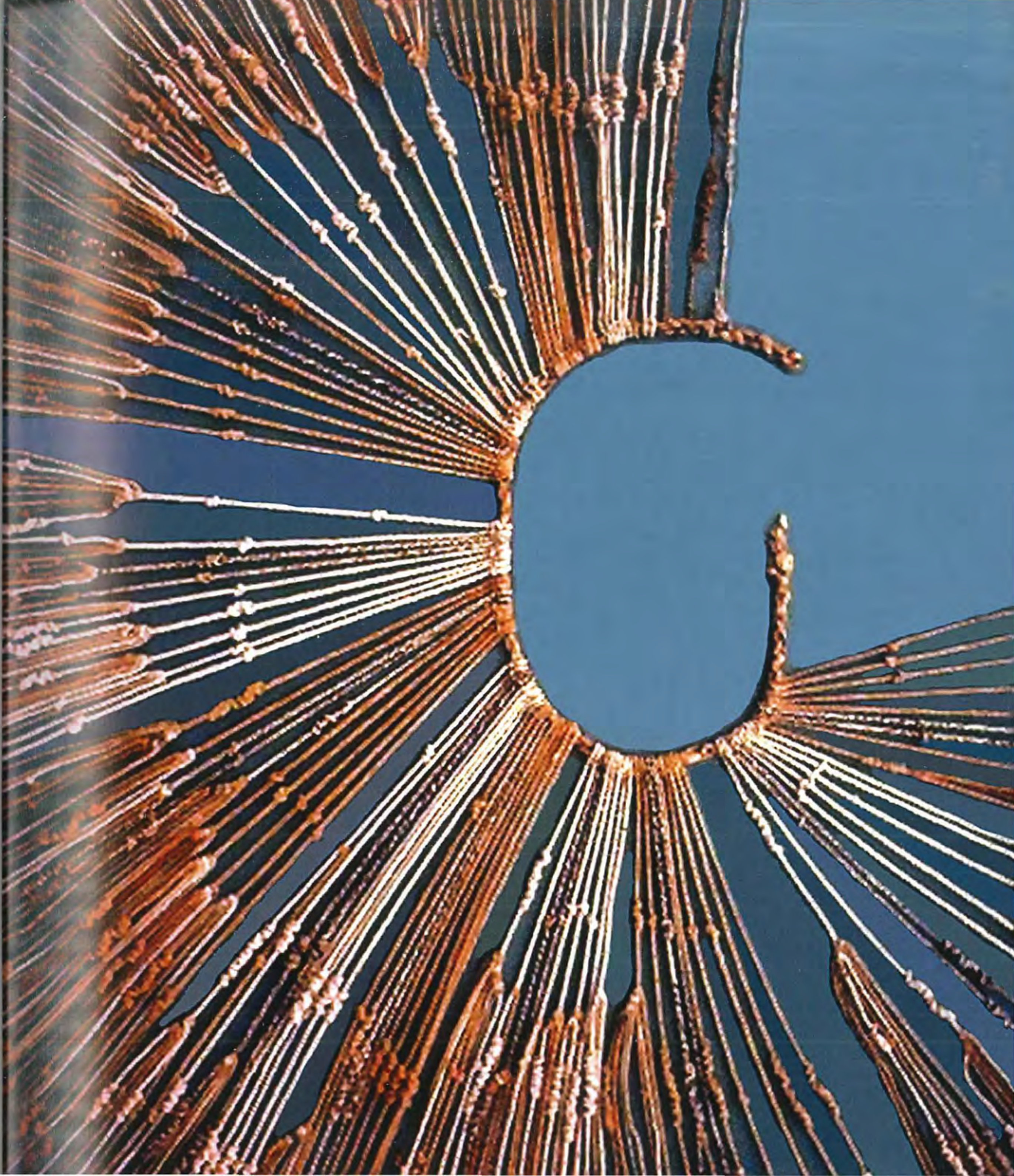
Los incas de América del Sur poseían una civilización compleja con una única religión estatal y un lenguaje común. Aunque no poseían escritura, mantenían un extenso archivo codificado gracias al sistema lógico-numérico empleado en los quipus cuya complejidad variaba según el número de cuerdas (entre tres y mil). Por desgracia, los españoles que llegaron a América del Sur creyeron que los quipus eran instrumentos del demonio. Destruyeron miles de ellos en nombre de Dios, y en la actualidad sólo quedan unos seiscientos.

El tipo de nudo, su posición, la dirección de la cuerda y su nivel, así como el color y los espacios, representan números que, a su vez, proporcionan información sobre diferentes aspectos del mundo real. Los distintos grupos de nudos señalaban las distintas potencias de 10. Lo más probable es que los nudos sirvieran para registrar datos de recursos materiales y humanos, así como referencias al calendario. Es posible que los quipus contuvieran información acerca de danzas, planes de construcción e incluso aspectos de la historia de los Incas. La relevancia de los quipus reside en el hecho de que contradice la teoría de que las matemáticas sólo pueden florecer después de que una civilización ha adquirido la escritura; parece que las sociedades pueden alcanzar estados avanzados de desarrollo sin dejar registros escritos. Es interesante señalar que en la actualidad existen sistemas informáticos cuyos administradores de archivos reciben el nombre de quipus en honor a esta utilísima y antigua herramienta.

Entre las aplicaciones que los Incas dieron a los quipus existe una muy siniestra, como «calculadora de muertes». Cada año se realizaba un número determinado de sacrificios rituales de adultos y niños: se utilizaba un quipu para planificarlos. Algunos quipus informaban sobre el imperio: las cuerdas hacían referencia a las carreteras, mientras que los nudos reflejaban las víctimas de sacrificios.

VÉASE TAMBIÉN Nudos (c. 100.000 a. C.) y El ábaco (c. 1200).

Los antiguos Incas utilizaban quipus hechos con cuerdas y nudos para registrar información numérica. El tipo del nudo y su posición, así como los colores y la dirección y el nivel de las cuerdas representaban a menudo fechas y contabilidad de personas y objetos.



c. 3000 a. C.

Dados

Imaginemos un mundo sin números aleatorios. En la década de 1940 la generación estadística de números aleatorios resultaba decisiva para que los científicos pudieran simular explosiones termonucleares. Hoy en día, muchas redes informáticas se sirven de números aleatorios para dirigir el tráfico de Internet y evitar que se colapse. Los encargados de elaborar encuestas políticas se sirven de números aleatorios para seleccionar muestras no sesgadas de votadores potenciales.

Los dados, que se fabricaban al principio con tabas de animales ungulados, fueron uno de los primeros métodos de producción de números aleatorios. Las civilizaciones antiguas creían que sus dioses controlaban el resultado de los lanzamientos de dados, de modo que se recurría a los dados para tomar decisiones cruciales, desde la elección de gobernantes hasta el reparto de las herencias. La metáfora de un dios que controla los dados sigue vigente, como demuestra la cita de Stephen Hawkin: «Dios no sólo juega a los dados, sino que a veces nos confunde lanzándolos en lugares en los que no podemos verlos».

Los dados más antiguos que se conocen aparecieron en una excavación en la legendaria Ciudad Quemada, en el sudeste de Irán: al parecer, formaban parte de un juego de tablero (el Senet, antecesor del actual *Backgammon*). La ciudad, abandonada en el año 2100 a. C., supone cuatro etapas de la civilización destruidas por el fuego. Los arqueólogos descubrieron en este mismo lugar el ojo artificial más antiguo que se conoce, un ojo que lanzaba su hipnótica mirada desde la cara de una hechicera o sacerdotisa.

Durante muchos siglos los dados se han utilizado para enseñar probabilidad. Si se lanza un dado con n caras una sola vez, la probabilidad de obtener cada uno de los resultados es $1/n$. La probabilidad de obtener una secuencia concreta de i números es $1/n^i$. Por ejemplo, la probabilidad de obtener un 1 seguido de un 4 en un dado cúbico tradicional es $1/6^2 = 1/36$. Si se utilizan dos dados a la vez, la probabilidad de obtener una suma dada se calcula determinando el número de formas posibles de alcanzar esa suma y dividiéndolo por el número total de combinaciones. Por eso es mucho más probable obtener 7 como suma que 2.

VÉASE TAMBIÉN La ley de los grandes números (1713), La aguja de Buffon (1777), Mínimos cuadrados (1795), La *Théorie Analytique des probabilités* de Laplace (1812), Chi-cuadrado (1900), Perdido en el hiperespacio (1921), El desarrollo de las máquinas de aleatorización (1938), La estrategia del juego del cerdo (1945) y El método del cuadrado medio de Von Neumann (1946).

Los dados, que se fabricaban con tabas de animales ungulados, fueron uno de los primeros métodos de generación de números aleatorios. Las civilizaciones antiguas se servían de los dados para predecir el futuro, ya que creían que los dioses decidían el resultado del lanzamiento.



c. 2200 a. C.

Cuadrados mágicos

Bernard Frénicle de Bessy (1602–1675)

La leyenda asegura que los cuadrados mágicos se originaron en China. Su primera mención aparece en un manuscrito de la época del emperador Yu, alrededor del año 2200 a. C. Un *cuadrado mágico* consta de N^2 casillas, cada una ocupada por un número entero distinto. La suma de los números de las distintas filas horizontales y verticales así como de las diagonales principales es siempre la misma.

Si los números de un cuadrado mágico son todos los comprendidos entre 1 y N^2, el cuadrado se dice de orden N, y la suma de cada fila y de cada columna es una constante igual a $N(N^2 + 1)/2$. En 1514, el artista del Renacimiento Alberto Durero creó el cuadrado mágico 4 x 4 que vemos a continuación.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Nótese que los dos números centrales de la última fila forman la cifra «1514», el año de esta maravillosa construcción. Las filas, las columnas y las diagonales principales suman 34. También suman 34 los números de las esquinas (16+13+4+1) y el cuadrado central 2 x 2 (10+11+6+7).

En 1693 se publicaron de forma póstuma los 880 cuadrados mágicos distintos (todos de cuarto orden) en *Des quassez ou tables magiques*, del francés Frénicle Bessy, eminente matemático aficionado y uno de los investigadores más importantes de todos los tiempos en la materia.

Hemos avanzado mucho desde aquellos simples cuadrados mágicos 3 x 3 que recibieron la veneración de distintas civilizaciones de todas las épocas y continentes, desde los mayas hasta los hausa africanos. Los matemáticos actuales estudian estos objetos mágicos en dimensiones superiores, por ejemplo bajo la forma de hipercubos de cuatro dimensiones que suman un mismo resultado en todas las direcciones posibles.

VÉASE TAMBIÉN El cuadrado mágico de Franklin (1769) y El hipercubo mágico perfecto (1999).

En el templo de la Sagrada Familia de Barcelona hay un cuadrado mágico 4 x 4 cuya suma constante es 33 (la edad de la muerte de Jesús, según la mayoría de las interpretaciones bíblicas). Nótese que no se trata de un cuadrado mágico tradicional, porque hay números repetidos.


1 14 14 4
11 7 6 9
8 10 10 5
13 2 3 15

c. 1800 a. C.

Plimpton 322

George Arthur Plimpton (1855–1936)

Plimpton 322 hace referencia a una misteriosa tabla de arcilla de origen babilonio que contiene diversas cifras en escritura cuneiforme, dispuestas en cuatro columnas y quince filas. La historiadora de la ciencia Eleanor Robson se refiere a ella como «uno de los artefactos matemáticos más famosos del mundo». Grabada en torno al año 1800 a. C., la tabla ofrece un listado de ternas pitagóricas (números naturales que especifican las longitudes de los lados de triángulos rectángulos, es decir, soluciones del teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$. Los números 3, 4 y 5, por ejemplo, forman una terna pitagórica. La cuarta columna de la tabla indica simplemente el número de fila. Existen diversas interpretaciones acerca del significado preciso de los números de la tabla, que algunos expertos consideran un solucionario de problemas de álgebra o de trigonometría para estudiantes.

La tablilla Plimpton 322 debe su nombre al editor neoyorquino George Plimpton, que la compró en 1922 por diez dólares y la donó a la universidad de Columbia. Se puede seguir el rastro de la tablilla hasta la vieja civilización babilonia, que floreció en Mesopotamia, el fértil valle de los ríos Tigris y Eúfrates, en el actual Iraq. Para ver esa época en perspectiva, pensemos en que el desconocido escriba que talló la tablilla vivió aproximadamente en el mismo siglo que el rey Hammurabi, famoso por el conjunto de leyes que incluye el famoso «ojo por ojo, diente por diente». Según la historia bíblica, Abraham, del que se dice que llevó a su pueblo hacia el oeste (desde la ciudad de Ur, en la ribera del Eúfrates, hasta Canaan), habría sido otro personaje que vivió más o menos en la misma época.

Los babilonios escribían sobre arcilla húmeda con un punzón o una cuña. En el sistema numérico babilonio, el número 1 se representaba con un simple punto, y los números del 2 al 9 con una combinación de puntos.

VÉASE TAMBIÉN El teorema de Pitágoras y los triángulos (c. 600 a. C.).

La tablilla Plimpton 322 es una tablilla babilonia de arcilla que contiene números en escritura cuneiforme. Estos grupos de tres números enteros especifican las medidas exactas de los lados de un triángulo rectángulo, es decir, soluciones del teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$.



c. 1650 a. C.

El papiro de Rhind

Ahmes (c. 1680 a. C.–c. 1620 a. C.), **Alexander Henry Rhind** (1833–1863)

El papiro de Rhind esta considerado como la fuente de información más importante que se conoce sobre las matemáticas de los antiguos egipcios. Se trata de un rollo de unos treinta centímetros de altura y cinco metros y medio de longitud que se encontró en una tumba de Tebas, en la orilla oriental del río Nilo. Ahmes, el escriba, lo copió en escritura hierática, relacionada con el sistema jeroglífico. Se escribió en torno al año 1650 a. C., lo que convierte a Ahmes en el primer personaje de nombre conocido en la historia de las matemáticas. El rollo contiene además los símbolos más antiguos que se conocen para operaciones matemáticas: la suma se representa con un par de piernas andando hacia el número que se debe añadir.

En 1858, el jurista y egiptólogo escocés Alexander Henry Rhind visitó Egipto por motivos de salud. Compró el rollo de papiro en un mercado de Luxor. El British Museum lo adquirió en 1864.

Ahmes escribió que el rollo ofrece «un cálculo preciso para investigar las cosas, y el conocimiento de todas las cosas, los misterios... todos los secretos». El documento incluye problemas matemáticos con fracciones y progresiones aritméticas, así como álgebra y geometría de la pirámide. También hay matemáticas prácticas, útiles para la medición, la construcción y la contabilidad. El problema que más me intriga es el problema número 79, cuya interpretación inicial es desconcertante.

En la actualidad, muchos interpretan el problema número 79 como un acertijo, que pude traducirse así: «Siete casas contienen siete gatos. Cada gato mata siete ratones. Cada ratón se había comido siete espigas de cereal. Cada espiga habría producido siete medidas de trigo. ¿Cuál es el total?» Parece increíble que este mismo acertijo, con el número siete y varios animales como protagonistas, haya perdurado a lo largo de miles de años. ¡Parece indestructible! Encontramos acertijos similares en el *Liber abaci* (Libro de cálculo) de Fibonacci, del año 1202, y en la antigua adivinanza infantil inglesa *As I was going to St. Ives*, donde también aparecen siete gatos.

VÉASE TAMBIÉN *Ganita Sara Samgraha* (850), El *Liber Abaci* de Fibonacci (1202) y La aritmética de Treviso (1478).

El papiro de Rhind es la fuente de información más importante que se conoce sobre las matemáticas del antiguo Egipto. El pergamino, del que se muestra un fragmento a continuación, incluye problemas matemáticos con fracciones, progresiones aritméticas, álgebra, geometría y contabilidad.

c. 1300 a. C.

Tres en raya

El juego del tres en raya es uno de los más antiguos y conocidos de la historia de la humanidad. Es posible que las reglas actuales sean relativamente recientes, pero los arqueólogos han rastreado juegos del mismo tipo hasta el antiguo Egipto, alrededor del año 1300 a. C.; sospecho que juegos similares tuvieron que aparecer en el mismísimo despertar de las sociedades humanas. El principio es sencillo: dos jugadores, O y X, trazan por turnos sus símbolos respectivos en los espacios de un cuadrado formado por nueve casillas (3 x 3). Gana el jugador que logra colocar su símbolo tres veces en una misma fila o columna, o en una de las dos diagonales principales. En el tablero 3 x 3 siempre se puede terminar en tablas.

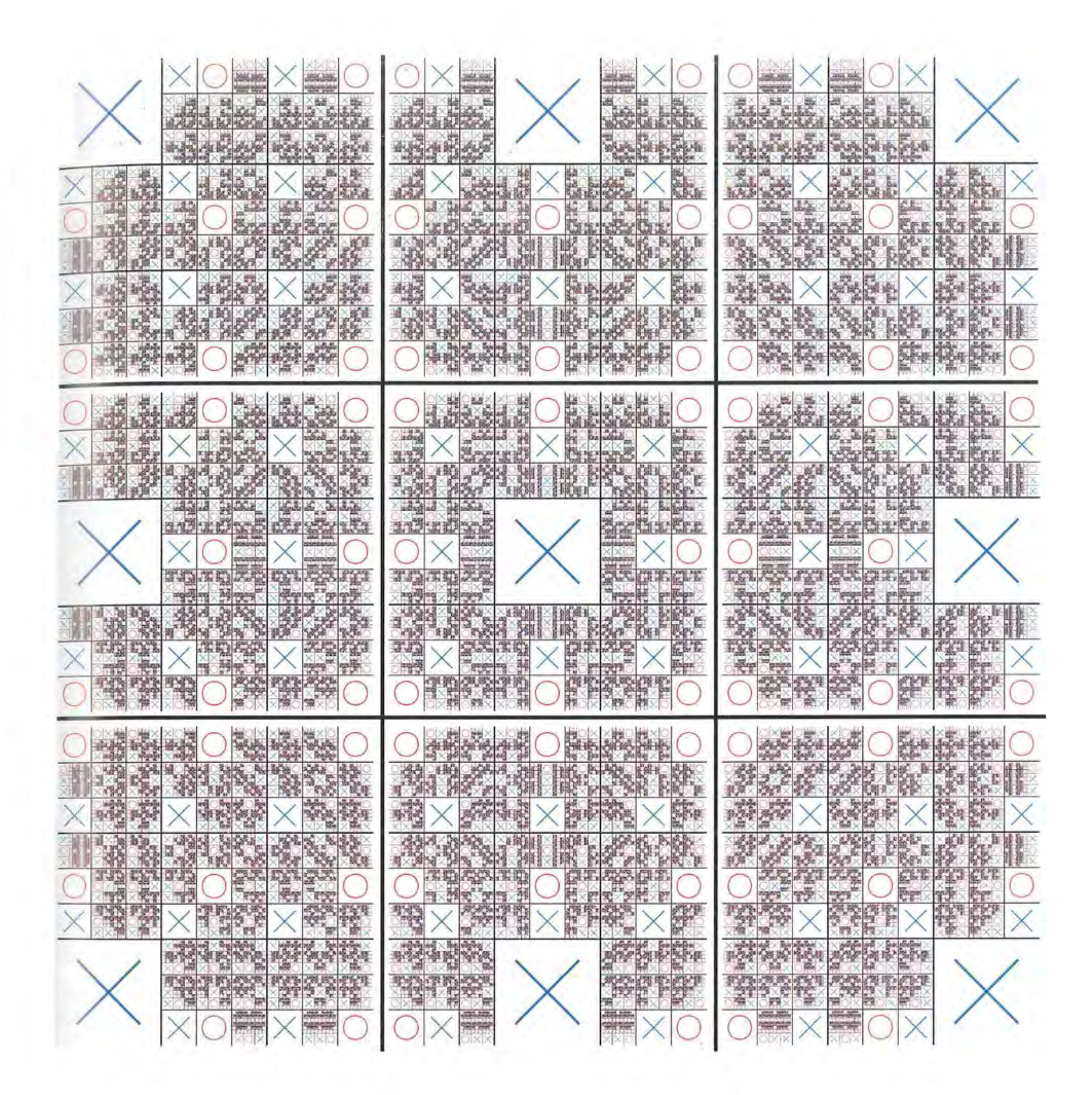
En el antiguo Egipto, en la época de los grandes faraones, los juegos de tablero desempeñaban un papel muy importante en la vida cotidiana; se sabe que los del tipo «tres en raya» ya se jugaban en esa época remota. El tres en raya puede considerarse el «átomo» con el que se han construido juegos de posición mucho más complejos, elaborados a lo largo de los siglos. Con algunas pequeñas variantes y ampliaciones, este juego tan sencillo puede convertirse en un reto fantástico para todo aquel que quiera dominarlo.

Los matemáticos y los aficionados a los acertijos han extendido este juego a tableros más grandes, o añadiendo más dimensiones y extrañas superficies de juego, por ejemplo rectángulos o cuadrados unidos por los bordes para formar un toro (la figura geométrica que coloquialmente podríamos llamar «forma de rosquilla») o una botella de Klein (una superficie con una única cara).

Veamos algunas curiosidades del tres en raya. Los jugadores pueden colocar sus «equis» y sus «oes» sobre el tablero de 362.880 formas diferentes (9!). Si consideramos todas las partidas posibles que terminen en 5, 6, 7, 8 o 9 movimientos, tenemos 255.168 variantes. A comienzos de la década de 1980, los genios de la informática Danny Hill y Brian Silverman construyeron, junto con algunos amigos, la computadora Tinkertoy®, que jugaba al tres en raya. El aparato se construyó a partir de diez mil piezas del juguete didáctico de construcción Tinkertoy. En 1998, algunos investigadores y estudiantes de la universidad de Toronto crearon un robot capaz de jugar a un «tres en raya» tridimensional (4 x 4 x 4) con un humano.

VÉASE TAMBIÉN Go (548 a. C), El juego icosiano (1857), La solución del Awari (2002) y La solución matemática de las damas (2007).

Representación analítica de todas las partidas posibles del juego del tres en raya realizada por los filósofos Patrick Grim y Paul St. Denis. Cada casilla del tablero de juego del tres en raya se divide en tableros más pequeños para mostrar todas las configuraciones posibles.



El teorema de Pitágoras y los triángulos

Baudhayana (c. 800 a. C.), **Pythagoras of Samos** (c. 580 a. C.–c. 500 a. C.)

Hay muchos niños que oyen hablar por primera vez del famoso teorema de Pitágoras al ver una película del año 1939, *El mago de Oz*. Es el espantapájaros el que habla de él, nada más conseguir su cerebro. Desafortunadamente, el espantapájaros recita mal el teorema.

El teorema de Pitágoras establece que, en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa c es igual a la suma de los cuadrados de los catetos a y b. Se escribe así: $a^2 + b^2 = c^2$. Es el teorema matemático del que más demostraciones se han publicado. El libro de Elisha Scott Loomis, *Pythagorean Proposition*, contiene trescientas sesenta y siete demostraciones.

Llamamos triángulos pitagóricos a los triángulos rectángulos cuyos lados tienen una longitud expresable mediante números enteros. El triángulo pitagórico cuyos catetos miden 3 y 4 y cuya hipotenusa tiene una longitud igual a 5 es el único cuyos tres lados son números enteros consecutivos. También es el único triángulo de lados enteros cuyo perímetro, es decir, la suma de sus tres lados (12 en este caso), es el doble de su área (6). El siguiente triángulo pitagórico con catetos de medidas consecutivas es el 20 - 21 - 29. El décimo en cumplir esta condición es mucho mayor: 27304196 -27304197 - 38613965.

En 1643, el matemático francés Pierre de Fermat (1601–1665) consideró el problema de encontrar un triángulo pitagórico en el que tanto su hipotenusa como la suma de sus catetos fueran cuadrados perfectos. Por sorprendente que pueda parecer, los tres números más pequeños que cumplen esas condiciones son 1.061.652.293.520, 4.565.486.027.761 y 4.687.298.610.289. Resulta que el siguiente triángulo en cumplir los requisitos sería tan «grande» que, si tomáramos el pie como unidad de medida (unos 30 centímetros), cada uno de los catetos llegaría desde la Tierra hasta el Sol.

Se suele atribuir a Pitágoras la formulación del teorema de Pitágoras, pero las pruebas señalan a un matemático anterior, el hindú Baudhayana, que vivió alrededor del año 800 a. C. y que lo escribió en su libro *Baudhayana Sulba Sutra*. Sin embargo, se cree que los babilonios ya conocían los triángulos pitagóricos.

VÉASE TAMBIÉN Plimpton 322 (c. 1800 a. C.), Pitágoras funda una hermandad matemática (c. 530 a. C.), La cuadratura de la lúnula (c. 440 a. C.), Teorema del coseno (c. 1427) y El teorema de Viviani (1659).

El matemático persa Nasr al-Din al-Tusi (1201–1274) dio a conocer una versión de la demostración de Euclides del teorema de Pitágoras. Al-Tusi fue un prolífico matemático, astrónomo, biólogo, químico, biólogo, filósofo, físico y teólogo.

بحـ رآ اط كحـ ونصل زح خطاً ولحدّ الكون زاويتي
بحـ ز بحـ ه قائمتين وكذلك بـ اط وبحـ من آ لـ كـ موازيا
لـ د ويقع داخل المثلث لان زاوية د آ اكبر من قائمة فتكون
زاوية آ ك اقل من زاوية بـ آحـ القائمة ويقطع لا محالة بحـ
على م وينقسم به مربع بـ ه الى سطحي بـ ل لحـ ونصل
حـ ح اد فلان في مثلثي ح حـ بـ اد ضلعي حـ بـ بحـ
وزاوية ح بحـ مساوية لضلعي اب بد وزاوية ابـ د
يكون المثلثان متساويين ومثلث ح حـ بـ يساوي نصف مربع
ز بـ لكونهما على قاعدة
ح بـ بين متوازيي ح بـ
ز حـ وكذلك مثلث ابـ د
يساوي نصف سطح بـ ل
لكونهما على قاعدة بـ د
بين متوازيي بـ د ال
فمربع ز بـ يساوي
سطح بـ ل المساوي نصفيهما وبمثل ذلك تبين ان مربع ط حـ يساوي
سطح حـ ل فاذن مربع بحـ يساوي مربعي آ ب آحـ وذلك ما اردناه

Go

El go es un juego de tablero para dos jugadores que apareció en China alrededor del año 2000 a. C. Las fuentes escritas más antiguas que lo mencionan proceden del primer trabajo de historia narrativa de China, *Zuo Zhan* (Crónica de Zuo), donde aparece un hombre del año 548 a. C. que juega al go. El juego se extendió a Japón, donde se hizo muy popular en el siglo XIII. Dos jugadores se alternan para colocar piedras blancas y negras en un tablero de 19 x 19 casillas. Una piedra o grupo de piedras son capturadas y retiradas del tablero si están completamente rodeados por piedras del oponente. El objetivo consiste en controlar más territorio que el contrario.

Se trata de un juego complejo por muchas razones, entre ellas el tamaño del tablero, que hace que existan muchísimas variantes. Terminar con más piedras que el oponente no garantiza la victoria. Si se tiene en cuenta la simetría, existen 32.940 aperturas posibles, de las cuales 992 se consideran buenas. El número de posibles configuraciones de las piedras sobre el tablero se estima en torno a 10^{172}, con unas 10^{768} partidas posibles. Una partida típica entre jugadores expertos consta de unos 150 movimientos, con una media de 250 opciones por movimiento. Mientras que el potente *software* que se utiliza para el ajedrez es capaz de vencer a maestros del ajedrez, los mejores programas de go son incapaces de ganarle a un niño un poco espabilado.

A los ordenadores programados para jugar al go les resulta muy difícil «ver más allá» para juzgar los posibles resultados de una acción, ya que en el go hay muchos más movimientos razonables que en el ajedrez. La gran complejidad del proceso de evaluación que lleva a decidir si una posición es o no favorable se debe a que la más pequeña diferencia, por ejemplo una única casilla vacía, puede afectar a grandes grupos de piedras.

En 2006, dos investigadores húngaros anunciaron que un algoritmo llamado UCT era capaz de competir con jugadores profesionales, pero sólo en un tablero de 9 x 9. El UCT actúa ayudando a que el ordenador limite su búsqueda centrándose en los movimientos más prometedores.

VÉASE TAMBIÉN Tres en raya (c. 1300 a. C.), La solución del Awari (2002) y La solución matemática de las damas (2007).

La complejidad del juego del go se debe en parte a su gran tablero, a sus complicadas estrategias y al enorme número de variaciones posibles. El potente software que se utiliza para el ajedrez es capaz de vencer a maestros del ajedrez, pero los mejores programas de go son incapaces de ganarle a un niño un poco espabilado.



530 a. C.

Pitágoras funda una hermandad matemática

Pitágoras de Samos (c. 580 a. C.–c. 500 a. C.)

Alrededor del año 530 a. C., el matemático griego Pitágoras se trasladó a Crotona, en la actual Italia, para enseñar nociones de matemáticas, música y reencarnación. Aunque muchos de los descubrimientos atribuidos a Pitágoras se deben en realidad a sus discípulos, las ideas de su hermandad influyeron durante siglos tanto en la numerología como en las matemáticas. Suele atribuirse a Pitágoras el descubrimiento de la relación relevante entre las matemáticas y las armonías musicales. Observó, por ejemplo, que las cuerdas en vibración producen sonidos armónicos cuando las razones entre las longitudes de las cuerdas son números enteros. También estudió los números triangulares (basados en diagramas de puntos dispuestos en forma triangular) y los números perfectos (números enteros que son la suma de sus divisores). Aunque es posible que indios y babilonios conocieran ya el célebre teorema que lleva su nombre ($a^2 + b^2 = c^2$, para un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c), algunos expertos señalan que es probable que Pitágoras y sus discípulos fueran los primeros griegos en demostrarlo.

Pitágoras y sus seguidores creían que los números eran como dioses: puros e inmunes a los cambios de la materia. La devoción por los números del 1 al 10 se convirtió para los pitagóricos en una especie de politeísmo. Creían que los números eran entes vivos que poseían una forma telepática de conciencia. Los seres humanos podían escapar de sus vidas tridimensionales y entrar en contacto telepático con estos números, por medio de diversas formas de meditación.

Algunas de estas ideas de apariencia tan extraña no resultan del todo ajenas a algunos matemáticos modernos, que suelen debatir acerca de si las matemáticas son una creación de la mente humana o una parte integrante del universo, independiente del pensamiento humano. Para los pitagóricos, las matemáticas eran una revelación relacionada con el éxtasis. La mezcla de matemáticas y teología, que tuvo su auge gracias a esta hermandad, terminó afectando a una gran parte de la filosofía religiosa griega, desempeñó un papel crucial en la Edad Media y alcanzó, en tiempos más recientes, al filósofo Immanuel Kant. Bertrand Russell opinaba que, de no ser por los pitagóricos, los teólogos no hubieran puesto tanto empeño en buscar demostraciones lógicas de la existencia de Dios.

VÉASE TAMBIÉN Plimpton 322 (c. 1800 a. C.) y El teorema de Pitágoras y los triángulos (c. 600 a. C.).

Pitágoras (el hombre con barba que aparece en la esquina inferior izquierda con un libro) enseña música a un joven en el fresco La escuela de Atenas, *obra de Rafael (1483-1520), el famoso pintor y arquitecto del Renacimiento italiano.*



Las paradojas de Zenón

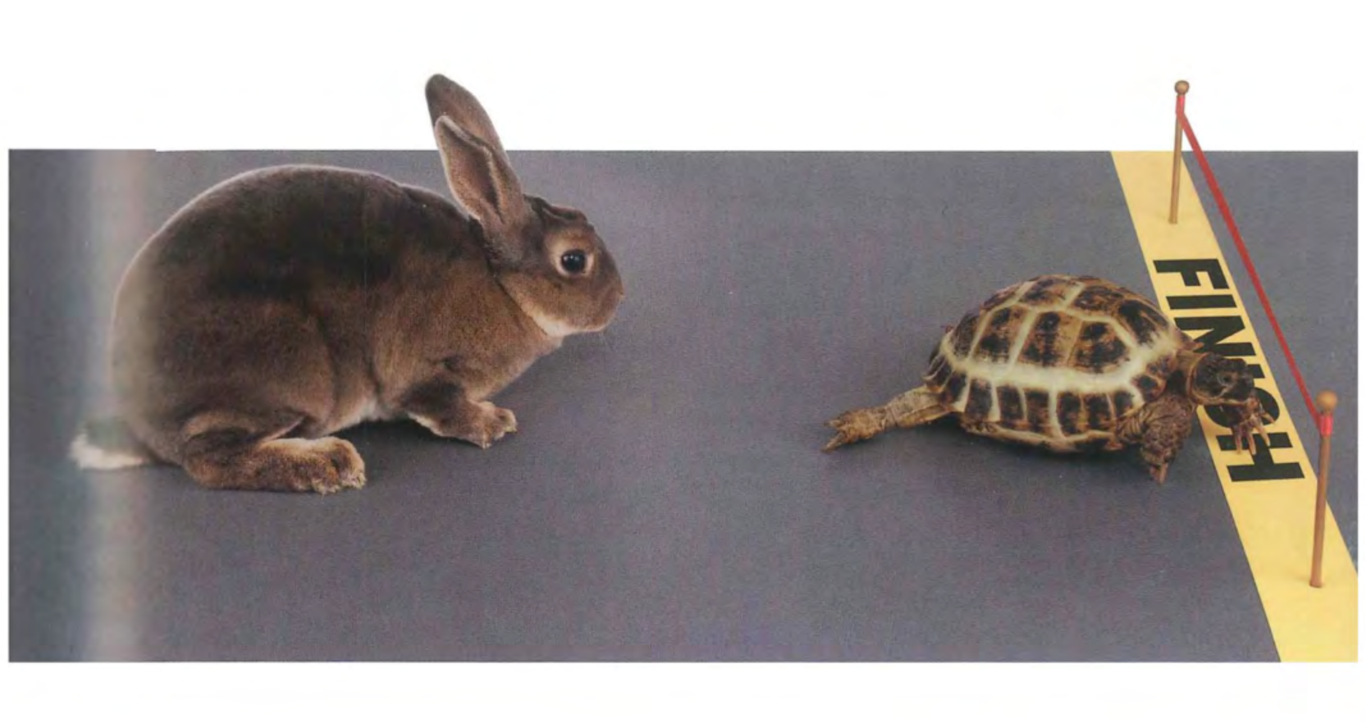
Zenón de Elea (c. 490 a. C.– c. 430 a. C.)

Durante más de mil años los filósofos y matemáticos han tratado de comprender las paradojas o aporías de Zenón, un conjunto de enigmas y contradicciones lógicas que sugieren que el movimiento es imposible, o una ilusión. Zenón fue un filósofo griego presocrático procedente del sur de la actual Italia. Su paradoja más famosa tiene como protagonistas a Aquiles, el héroe griego, y a una tortuga a la que Aquiles es incapaz de alcanzar en una carrera en la que el animal ha salido con ventaja. De hecho, la paradoja implica, al menos en apariencia, que es imposible salir de la habitación en la que uno se encuentra. Para alcanzar la puerta, primero debemos llegar a la mitad del espacio que nos separa de ella. Después habrá que cubrir la mitad de la distancia que queda, y después la mitad del resto del camino, y así sucesivamente. No alcanzaríamos la puerta aunque nos desplazásemos un número infinito de veces. Esta secuencia infinita de acciones puede representarse matemáticamente por medio de la serie (1/2+1/4+1/8+...). Una de las tendencias modernas a la hora de solventar esta paradoja consiste en insistir en que la suma de esta serie infinita 1/2+1/4+1/8+... es 1. Si cada paso se da en la mitad de tiempo que el anterior, el tiempo real que se necesita para completar la serie infinita de pasos no difiere del tiempo que se emplea en salir de la habitación.

En cualquier caso, esta manera de abordar el problema no proporciona una respuesta plenamente satisfactoria, porque no explica la forma de poder pasar por un número infinito de puntos sin saltarse ninguno. Los matemáticos contemporáneos utilizan números infinitesimales (cantidades infinitamente pequeñas, que se acercan mucho al cero pero que no son cero) para proporcionar un análisis microscópico de esta paradoja. Esto, junto a una rama de las matemáticas que se llama análisis no estándar y a la teoría de conjuntos internos en particular, permite resolver el problema. Pero el debate continúa. Algunos razonan que, si el tiempo y el espacio son discretos, el número total de pasos necesarios para desplazarse de un punto a otro debe ser finito.

VÉASE TAMBIÉN La paradoja de la rueda de Aristóteles (c. 320 a. C.), La serie armónica diverge (c. 1350), El descubrimiento del desarrollo en serie de π (c. 1500), El descubrimiento del cálculo (c. 1665), La paradoja de San Petersburgo (1738), La paradoja del barbero (1901), La paradoja de Banach-Tarski (1924), El hotel infinito de Hilbert (1925), La paradoja del cumpleaños (1939), La paradoja de la línea de costa (c. 1950), La paradoja de Newcomb (1960) y La paradoja de Parrondo (1999).

Según la paradoja más famosa de Zenón, el conejo nunca alcanzará a la tortuga si ésta última ha salido con ventaja. De hecho, da la impresión de que la paradoja implica que ninguno de los dos llegará a la línea de meta.


FINISH

La cuadratura de la lúnula

Hipócrates de Quíos (c. 470 a. C.–c. 400 a. C.)

Los antiguos matemáticos griegos adoraban la belleza, la simetría y el orden de la geometría. El matemático griego Hipócrates de Quíos, víctima de esa pasión, demostró cómo construir un cuadrado de igual área que una lúnula dada. Una lúnula es una superficie plana en forma de luna creciente, limitada por dos arcos de circunferencia cóncavos. Esta cuadratura de la lúnula es unas de las primeras demostraciones matemáticas que se conocen. En otras palabras, Hipócrates demostró que el área de estas lúnulas se podía expresar de manera exacta como un área rectilínea o «cuadratura». En el ejemplo que describimos aquí, el área conjunta de dos lúnulas amarillas asociadas con los lados de un triángulo rectángulo coincide con la del triángulo.

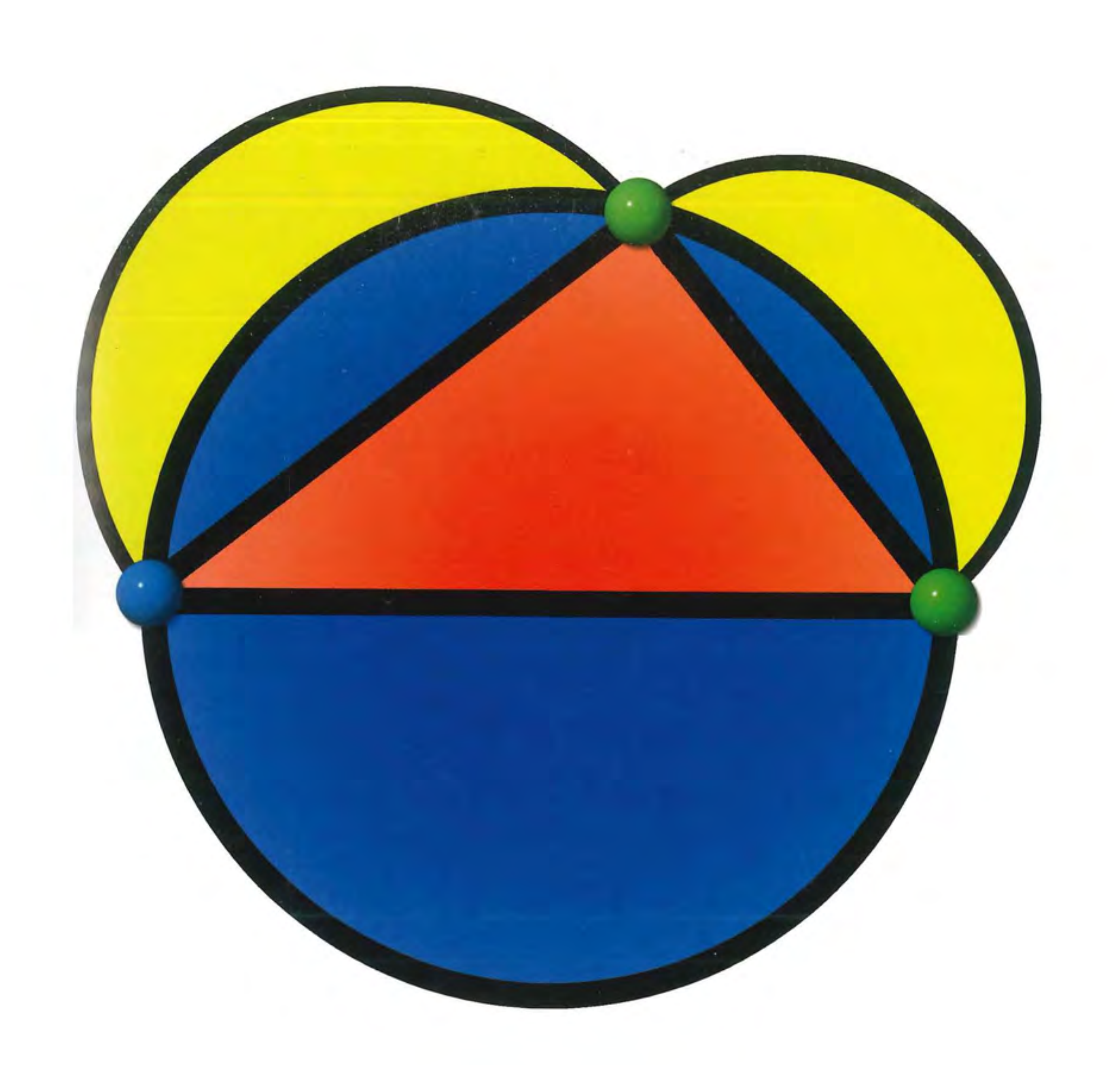
Para los antiguos griegos, encontrar la cuadratura equivalía a construir un cuadrado cuya área coincidiera con la de una figura dada utilizando una regla y un compás. Si tal construcción resulta posible, se dice que la figura es «cuadrable». Los griegos habían logrado la cuadratura de los polígonos, pero las formas curvas resultaban mucho más difíciles. De hecho, en principio parece poco probable que un objeto curvo pueda cuadrarse.

Hipócrates debe su fama, además, a la primera compilación conocida de trabajos sobre geometría, casi un siglo antes de la de Euclides. Es posible que Euclides se sirviera de algunas de las ideas de Hipócrates para su propia obra, *Elementos*. La importancia de los escritos de Hipócrates se debe a que proporcionaron un marco común sobre el que construir las matemáticas.

La búsqueda de la lúnula de Hipócrates fue, de hecho, parte del esfuerzo investigador por lograr la «cuadratura del círculo» (es decir, construir un cuadrado cuya área coincidiera con la de una circunferencia dada). Los matemáticos llevaban más de dos mil años tratando de resolver el problema de la cuadratura del círculo cuando Ferdinand von Lindemann demostró por fin, en 1882, que era imposible. Hoy sabemos que sólo cinco tipos de lúnula son «cuadrables». Hipócrates descubrió tres de ellas; las otras dos se hallaron en la década de 1770.

VÉASE TAMBIÉN El teorema de Pitágoras y los triángulos (c. 600 a. C.), Los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), La geometría de Descartes (1637) y Los números trascendentes (1844).

El área conjunta de las dos lúnulas (las regiones amarillas con forma de luna creciente) asociadas con los lados de un triángulo rectángulo coincide con el área del triángulo. Los antiguos matemáticos griegos adoraban la elegancia de estos descubrimientos geométricos.



c. 350 a. C.

Los sólidos platónicos

Platón (c. 428 a. C.-c. 348 a. C.)

Un *sólido platónico* es un objeto tridimensional convexo cuyas caras son polígonos idénticos con todos los lados y todos los ángulos iguales. Además, en todos los vértices de un sólido platónico confluyen el mismo número de caras. El caso más conocido de sólido platónico es el cubo, cuyas caras son seis cuadrados idénticos.

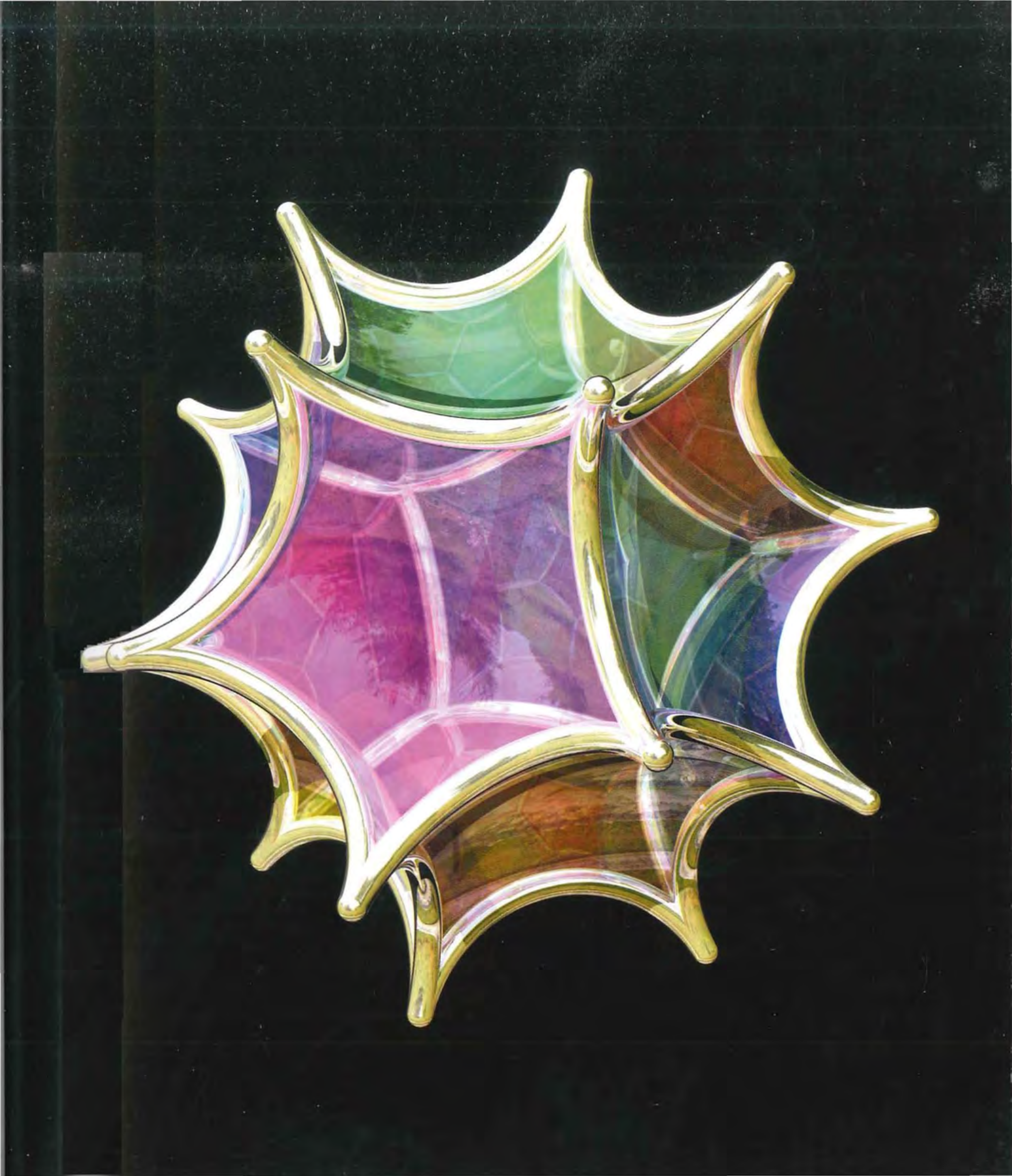
Los antiguos griegos demostraron que sólo existen cinco sólidos platónicos: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro. El icosaedro, por ejemplo, consta de veinte caras, cada una de las cuales es un triángulo equilátero.

Platón describió estos cinco sólidos alrededor del año 350 a. C. en su obra *Timeo.* Su belleza y simetría le sobrecogieron, y no sólo eso: creía que estas formas representaban las estructuras de los cuatro elementos fundamentales que componen el cosmos. Para Platón, el tetraedro era la forma que representaba al fuego, tal vez debido al aspecto afilado de sus aristas. El octaedro era el aire. El agua estaba formada por icosaedros, menos angulosos que el resto de los sólidos platónicos. La tierra se componía de cubos, de apariencia sólida y firme. Platón decidió que Dios se servía del dodecaedro para organizar las constelaciones celestes.

Pitágoras de Samos, el famoso matemático y místico contemporáneo de Buda y de Confucio en torno al año 550 a. C., conocía seguramente tres de los cinco sólidos platónicos (el cubo, el tetraedro y el dodecaedro). Se han descubierto versiones ligeramente redondeadas de estas figuras, hechas de piedra, en áreas habitadas por los últimos habitantes neolíticos de Escocia, al menos mil años antes de Platón. El astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630), en un intento de describir las órbitas de los planetas alrededor del Sol, construyó modelos de los sólidos platónicos que podían encajarse unos dentro de otros. Aunque las teorías de Kepler no eran correctas, fue uno de los primeros científicos que insistió en buscar explicaciones geométricas a los fenómenos celestes.

VÉASE TAMBIÉN Pitágoras funda una hermandad matemática (c. 530 a. C.), Los poliedros arquimedianos (c. 240 a. C.), La fórmula de Euler para los poliedros (1751), El juego icosiano (1857), El teorema de Pick (1899), La cúpula geodésica (1922), El poliedro de Császár (1949), El poliedro de Szilassi (1977), Spidrones (1979) y La solución del holiedro (1999).

Un dodecaedro tradicional es un poliedro con doce caras pentagonales. Aquí vemos una aproximación gráfica de Paul Nylander al dodecaedro hiperbólico, que tiene una porción de esfera en cada cara.



c. 350 a. C.

El *Órganon* de Aristóteles

Aristóteles (384 a. C.–322 a. C.)

Aristóteles, filósofo y científico griego, fue discípulo de Platón y profesor de Alejandro Magno. Se denomina *Órganon* (instrumento) al conjunto de los seis trabajos de Aristóteles sobre lógica: *Categorías, Primeros analíticos, De la interpretación, Segundos analíticos, Refutación de los sofistas y Tópicos.* Andrónico de Rodas fijó el orden de estos seis trabajos alrededor del año 40 a. C. Aunque Platón (c. 428–348 a. C.) y Sócrates (c. 470–399 a. C.) ahondaron en asuntos de lógica, Aristóteles fue el que sistematizó su estudio, que dominó el razonamiento occidental durante dos mil años.

El objetivo del *Órganon* no es decirle al lector qué es verdad, sino darle una perspectiva desde la que investigar tanto la verdad como el modo de encontrarle sentido al mundo. La primera herramienta de Aristóteles es el silogismo, un razonamiento en tres pasos del tipo «Todas las mujeres son mortales; Cleopatra es una mujer; por lo tanto, Cleopatra es mortal». Si las dos premisas son verdaderas, la conclusión debe serlo también. Aristóteles estableció asimismo una distinción entre particulares y universales (categorías generales). «Cleopatra» es una categoría particular. «Mujer» y«mortal» son categorías universales. Las universales, en su uso, deben venir precedidas de los marcadores «todos», «algunos» o «ningún». Aristóteles analizó muchos tipos posibles de silogismo y mostró cuáles eran válidos.

Además, extendió su análisis a silogismos que incluían lógica modal, es decir, afirmaciones que contienen las palabras «posiblemente» o «necesariamente». La lógica matemática moderna puede tomar como punto de partida la metodología de Aristóteles, pero también puede extender su trabajo a otros tipos de estructuras oracionales, para incluir aquellas que expresan relaciones más complejas o que incluyen más de un cuantificador. Veamos un ejemplo: «A ninguna mujer le gustan todas las mujeres a las que no les gustan algunas mujeres». En cualquier caso, la aproximación sistemática de Aristóteles, su intento de desarrollar la lógica, se considera uno de los más grandes logros de la humanidad, ya que proporcionó un primer impulso para ciertos campos de las matemáticas que se encuentran muy cerca de la lógica. Llegó a influir en los teólogos en su intento comprender la realidad.

VÉASE TAMBIÉN Los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), El álgebra de Boole (1854), Los diagramas de Venn (1880), *Principia Mathematica* (1910-1913), El teorema de Gödel (1931) y La lógica difusa (1965).

Rafael, el artista del Renacimiento italiano, representa a Aristóteles (a la derecha) sosteniendo su Ética *junto a Platón. Este fresco del Vaticano,* La escuela de Atenas, *se pintó entre 1510 y 1511.*


ETIC

c. 320 a. C.

La paradoja de la rueda de Aristóteles

Aristóteles (384 a. C.–322 a. C.)

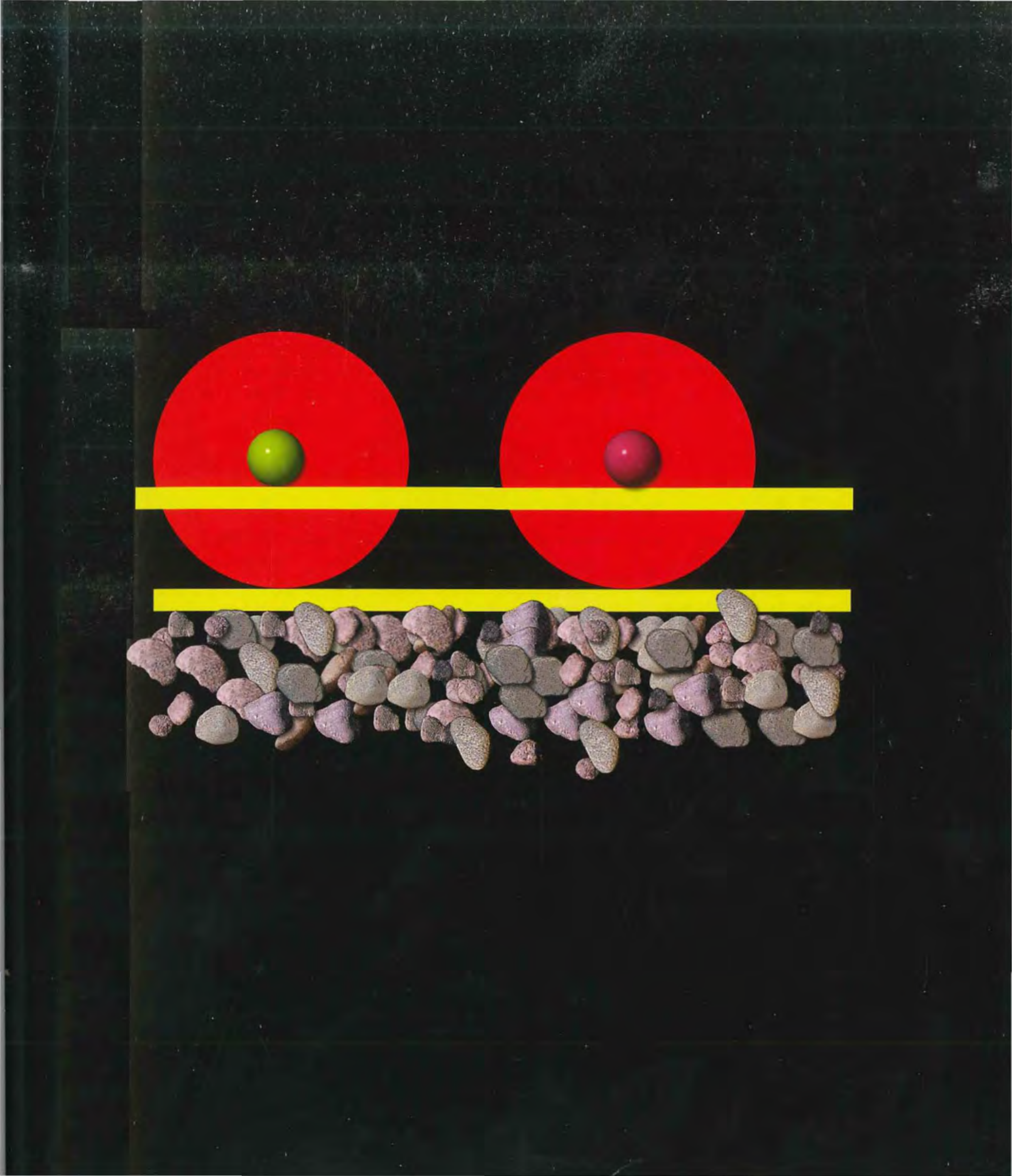
La paradoja de la rueda de Aristóteles se menciona en un antiguo texto griego, *Mechanica*. Durante siglos, el problema ha fascinado a algunos grandes matemáticos. Pensemos en una pequeña rueda acoplada a una rueda más grande, idea que puede esquematizarse en la figura de dos círculos concéntricos. Existe una correspondencia biyectiva (uno a uno) entre los puntos del círculo más grande y los puntos del círculo pequeño; es decir, a cada punto del círculo mayor le corresponde exactamente un punto del círculo menor, y viceversa. Por lo tanto, el conjunto de las dos ruedas debería desplazarse una misma distancia horizontal en cada giro, con independencia de que se deslice sobre una varilla tangente a la rueda pequeña o sobre la rueda inferior, que toca el suelo. ¿Cómo puede ser? Después de todo, sabemos que las dos circunferencias de los círculos tienen distinta longitud.

Los matemáticos actuales saben que una correspondencia uno a uno entre puntos no implica que dos curvas tengan la misma longitud. Georg Cantor (1845–1918) demostró que el número de puntos (o cardinal) de un segmento es siempre el mismo, independientemente de su longitud. Llamó a este **número transfinito** de puntos el «continuum». Los puntos del segmento que va de cero a uno, por ejemplo, pueden emparejarse en una correspondencia uno a uno con todos los puntos de una línea infinita. Después del trabajo de Cantor los matemáticos lo han pasado bastante mal con este asunto. Nótese además que, desde un punto de vista físico, si la rueda mayor rodara sobre el suelo, la rueda más pequeña iría dando saltos y se vería arrastrada a lo largo de la línea que toca su superficie.

Puede que la fecha precisa y el autor de *Mechanica* queden para siempre envueltos en el misterio. Aunque se ha considerado frecuentemente obra del mismo Aristóteles, muchos expertos dudan de que *Mechanica*, el libro de ingeniería más antiguo que se conoce, fuera escrito en realidad por el estagirita. Otro posible candidato es Estratón de Lampsaco, discípulo de Aristóteles que murió en torno al año 270 a. C.

VÉASE TAMBIÉN Las paradojas de Zenón (c. 445 a. C.), La paradoja de San Petersburgo (1738), Los números transfinitos de Cantor (1874), La paradoja del barbero (1901), La paradoja de Banah-Tarski (1924), El hotel infinito de Hilbert (1925), La paradoja del cumpleaños (1939), La paradoja de la línea de costa (c. 1950), La paradoja de Newcomb (1960), La indecibilidad de la hipótesis del continuo (1963) y La paradoja de Parrondo (1999).

Imagine una rueda pequeña acoplada a una rueda grande. Piense en el movimiento del conjunto cuando se mueve de derecha a izquierda sobre una varilla en contacto con la rueda más pequeña y un plano que toca la rueda inferior.





Los *Elementos* de Euclides

Euclides de Alejandría (c. 325 a. C. – c. 270 a. C.)

El geómetra Euclides de Alejandría vivió en el Egipto helénico; su obra *Elementos* es uno de los manuales más célebres de la historia de las matemáticas. Su forma de presentar la geometría plana se basa en teoremas que pueden derivarse, sin excepción, a partir de cinco axiomas básicos o postulados muy simples. Uno de estos postulados afirma que, dados dos puntos cualesquiera, sólo puede trazarse una recta que pase por los dos. Otro de los famosos postulados afirma que, dados un punto y una recta, sólo se puede trazar una recta que pase por el punto y que sea paralela a la recta dada. En el siglo XIX los matemáticos empezaron a explorar por fin **geometrías no euclídeas,** en las cuales el postulado de las paralelas no se exige necesariamente. La propuesta metodológica de Euclides para la demostración de teoremas matemáticos por medio del razonamiento lógico no sólo sentó las bases de la geometría, sino que dio forma a otras muchas disciplinas relacionadas con las demostraciones lógicas y matemáticas.

Elementos está formado por trece libros que comprenden geometría en dos y tres dimensiones, proporciones y teoría de números. *Elementos* fue una de las primeras obras que se imprimieron después del descubrimiento de la imprenta y ha formado parte, durante siglos, de los *curricula* universitarios. Desde su primera impresión en 1482 se han publicado más de mil ediciones. Es posible que Euclides no fuera el primero en demostrar varios de los resultados de *Elementos*, pero su estilo y la simplicidad de su ordenación convirtieron la obra en un trabajo de importancia duradera. El historiador de las matemáticas Thomas Helath lo llamó «el manual de matemáticas más importante de todos los tiempos». Científicos como Galileo Galilei e Isaac Newton recibieron una fuerte influencia de *Elementos*. El filósofo y lógico Bertrand Russell escribió: «A los once años comencé con Euclides, con mi hermano como tutor. Fue uno de los grandes acontecimientos de mi vida, tan deslumbrante como el primer amor. No había imaginado que existiera en el mundo nada tan delicioso». La poeta Edna St. Vincent Millay escribió: «Sólo Euclides ha contemplado la belleza desnuda».

VÉASE TAMBIÉN El teorema de Pitágoras y los triángulos (c. 600 a. C.), La cuadratura de la lúnula (c. 440 a. C.), El *Órganon* de Aristóteles (c. 350 a. C.), La geometría de Descartes (1637), Geometría no euclidea (1829) y La variedad de Weeks (1985).

Frontispicio de la traducción de Elementos *de Euclides por Adelardo de Bath, c. 1310. Esta traducción del árabe es la versión en latín más antigua que se conserva.*



Arquímedes: arena, ganado y el *stomachion*

Arquímedes de Siracusa (c. 287 a. C. – c. 212 a. C.)

En 1941, el matemático G. H. Hardy escribió: «A Arquímedes se le recordará cuando el dramaturgo Esquilo haya sido olvidado; los idiomas mueren, pero las ideas matemáticas permanecen. Puede que "inmortalidad" sea una palabra un poco absurda, pero es posible que los matemáticos tengan más posibilidades de alcanzarla, signifique lo que signifique». De hecho, a menudo se considera que Arquímedes, el geómetra griego es el matemático y científico más importante de la Antigüedad y uno de los cuatro grandes matemáticos que han habitado el planeta (junto a Isaac Newton, Friedrich Gauss y Leonhard Euler). Se dice que Arquímedes enviaba teoremas falsos a sus colegas para pillarlos cuando trataran de robarle las ideas.

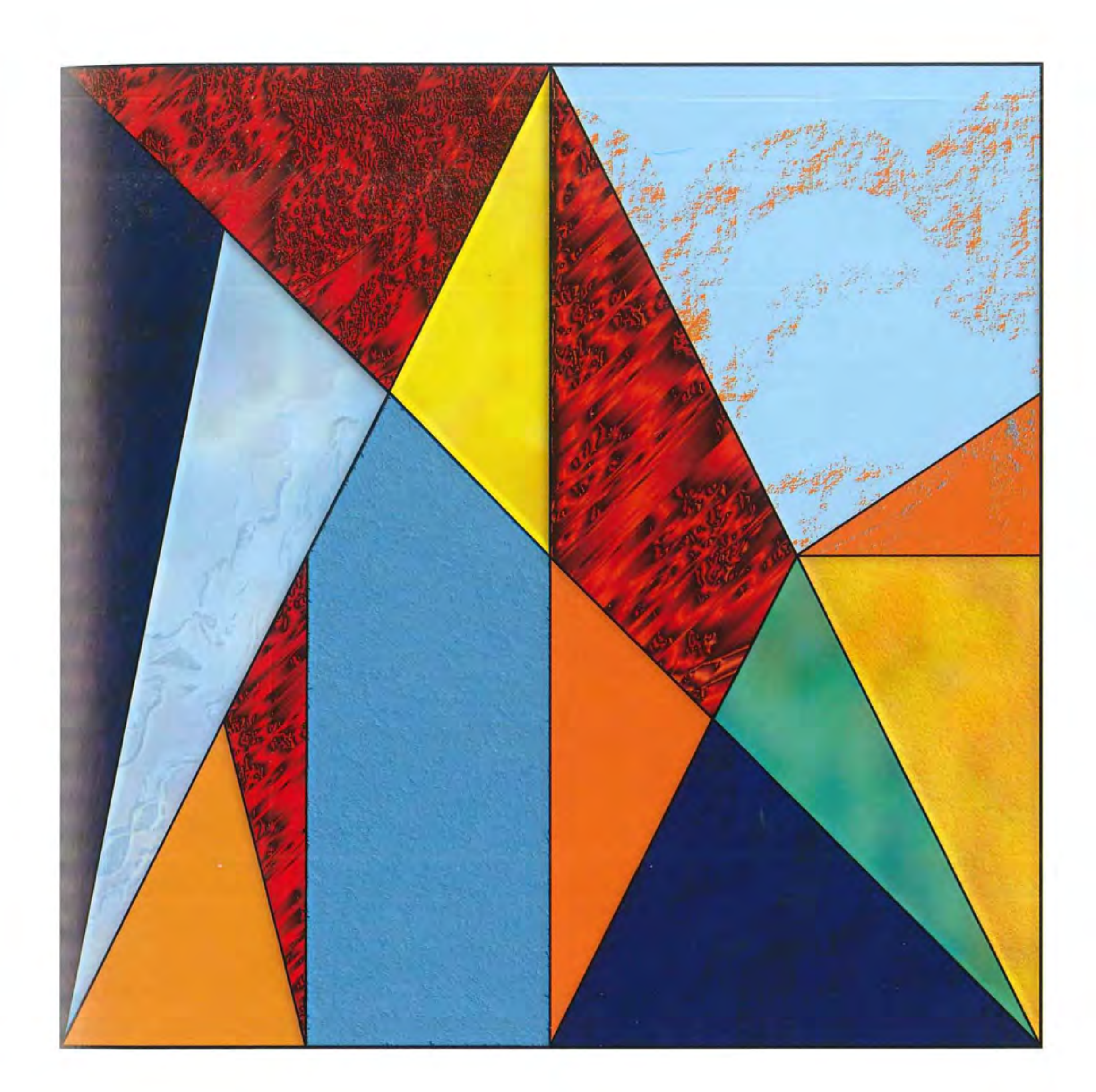
Además de otras muchas ideas matemáticas, su celebridad se debe a su visión de los números muy grandes. En el libro *El contador de arena* calculó que el universo podía llenarse con 8×10^{63} granos de arena.

Aún más sorprendente es el número $7{,}760271406486818269530232833213... \times 10^{202544}$ solución a una versión del famoso «problema del ganado» de Arquímedes, que consiste en calcular el número total de cabezas de ganado en un acertijo en el que aparecen involucrados cuatro hipotéticos rebaños de distintos colores. Arquímedes escribió que aquel capaz de resolver el problema sería «coronado por la gloria» y «considerado perfecto en este tipo de sabiduría». Los matemáticos no lograron hallar una respuesta aproximada hasta 1880. Los primeros en hacer un cálculo más preciso fueron los matemáticos canadienses Hugh C. Williams, R. A. German y C. Roberto Zarnke, que lo lograron en 1965 gracias a la ayuda de un ordenador IBM 7040.

En el año 2003 los historiadores de las matemáticas encontraron más información, perdida durante siglos, acerca del *stomachion* de Arquímedes. Un antiguo pergamino que los monjes habían sobrescrito casi mil años antes, describe el *stomachion* de Arquímedes como un rompecabezas relacionado con la combinatoria. La *combinatoria* es la rama de las matemáticas que trata sobre el número de maneras de resolver un problema determinado. El objetivo del *stomachion* es determinar de cuántas maneras distintas se puede construir un cuadrado con las catorce piezas del juego. En 2003, cuatro matemáticos calcularon que la respuesta es 17.152.

VÉASE TAMBIÉN π (c. 250 a. C.), El problema de la división del polígono de Euler (1751), El número gúgol (c. 1920) y La teoría de Ramsey (1928).

Uno de los objetivos del stomachion *consiste en determinar de cuántas maneras distintas se puede construir un cuadrado con las catorce piezas que se muestran. En 2003, cuatro matemáticos calcularon que la respuesta es 17.152. (Reproducción de Teja Krašek.)*



π

Arquímedes de Siracusa (c. 287 a. C.–c. 212 a. C.)

Pi, simbolizado por la letra griega π, es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, y es un número próximo a 3,14159. Es posible que los pueblos de la Antigüedad se dieran cuenta de que, en cada giro de la rueda de un carro, el vehículo se desplazaba tres veces el diámetro de la rueda, más o menos: se trata de una primera percepción de la relación entre la longitud y el diámetro de una circunferencia. Una tablilla babilonia afirma que la proporción entre la longitud de una circunferencia y el perímetro de un hexágono inscrito es 1 a 0,96, lo que otorga para π un valor de 3,125. El matemático griego Arquímedes (c. 250 a. C) fue el primero en darnos una aproximación matemática rigurosa para π: un valor comprendido entre 223/71 y 22/7. El matemático galés William Jones (1675-1749) introdujo el símbolo π en 1706, seguramente por la palabra griega que designa el perímetro, que comienza con esa letra.

La constante matemática más famosa es π, tanto en nuestro planeta como en las civilizaciones más avanzadas del universo, si es que hay alguna. Las cifras de π no terminan nunca, y nadie ha sido capaz de encontrar un patrón ordenado en su distribución. Un factor determinante para medir la habilidad computacional de un ordenador es la velocidad a la que puede calcular π: actualmente conocemos más de un billón de dígitos de π.

Normalmente relacionamos π con las circunferencias, como toda la humanidad hasta el siglo XVII. Fue entonces cuando π se liberó de la circunferencia. En aquella época se inventaron y estudiaron muchas curvas (por ejemplo distintos tipos de arcos, hipocicloides y unas curvas conocidas como «brujas»). Se descubrió que el área de la mayor parte de ellas podía expresarse en términos de π. Tiempo después, π se liberó incluso de la geometría y en la actualidad se relaciona con incontables áreas de teoría de números, probabilidad, números complejos y series de fracciones simples (por ejemplo $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7\ldots$). En 2006, Akira Haraguchi, un ingeniero japonés jubilado, estableció un récord mundial al memorizar cien mil dígitos de π que era capaz de recitar.

VÉASE TAMBIÉN Arquímedes: arena, ganado y el *stomachion* (c. 250 a. C.), El descubrimiento del desarrollo en serie de π (c. 1500), El acertijo de la cuerda que rodea la Tierra (1702), El número de Euler, *e* (1727), La constante de Euler-Mascheroni (1735), La aguja de Buffon (1777), Los números trascendentes (1844), El teorema de Holditch (1858) y Números normales (1909).

π, la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, equivale aproximadamente a 3,14. Es posible que los antiguos se dieran cuenta de que, con cada giro de una rueda, el carro se desplazaba unas tres veces el diámetro de la rueda.



La criba de Eratóstenes

Eratóstenes (c. 276 a. C.–c. 194 a. C.)

Llamamos números primos a los números enteros mayores que 1 que sólo son divisibles por 1 y por ellos mismos (por ejemplo el 5 y el 13). El número 14 no es primo porque 14 = 7 x 2. Los números primos han fascinado a los matemáticos durante más de dos milenios. Alrededor del año 300 a. C., Euclides demostró que no existe un «número primo mayor», es decir, que existe un número infinito de ellos. ¿Cómo podemos saber si un número es primo? En el año 240 a. C., el matemático griego Eratóstenes desarrolló la primera prueba conocida para determinar números primos. Se conoce a este procedimiento como la criba de Eratóstenes. La criba puede utilizarse para encontrar todos los números primos que hay antes de un número determinado. (Erastótenes, siempre versátil, fue director de la famosa biblioteca de Alejandría y la primera persona que obtuvo una estimación razonable del diámetro de la Tierra).

El teólogo y matemático francés Marin Mersenne (1588–1648), que también sintió la atracción de los números primos, trató de encontrar una fórmula con la que hallarlos todos. Aunque no fue capaz de lograrlo, su trabajo sobre los números de Mersenne (aquellos que tienen la forma $2^p - 1$, donde p es un número entero) sigue siendo muy interesante. Los números de Mersenne en los que p es un número primo son el tipo de números más sencillo a la hora de determinar si son o no números primos, de modo que es habitual que figuren ente los números primos más grandes que conoce la humanidad. El cuadragésimoquinto número primo de Mersenne conocido ($2^{43.112.609} - 1$), calculado en 2008, contiene 12.978.189 dígitos.

En la actualidad los números primos desempeñan un papel decisivo en la criptografía de clave pública, cuyos algoritmos se utilizan para enviar mensajes de forma segura. Para los matemáticos puros, los números primos se encuentran en el núcleo de muchas conjeturas intrigantes, todavía sin resolver, planteadas a lo largo de la historia, entre ellas **la hipótesis de Riemann** (que tiene que ver con la distribución de los números primos) y la **conjetura fuerte de Goldbach** (que afirma que todos los números enteros pares mayores que 2 pueden escribirse como la suma de dos números primos).

VÉASE TAMBIÉN Números primos generados por cigarras (c. 1 millón a. C.), El hueso de Ishango (c. 18.000 a. C.), La conjetura de Goldbach (1742), La construcción de un heptadecágono regular (1796), Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801), La hipótesis de Riemann (1859), La demostración del teorema de los números primos (1896), La constante de Brun (1919), La conjetura de Gilbreath (1958), Los números de Sierpiński (1960), La espiral de Ulam (1963), Erdös y la colaboración extrema (1971), Criptografía de clave pública (1977) y La conjetura de Andrica (1985).

El polaco Andreas Guskos crea obras de arte contemporáneo mediante la concatenación de miles de números primos que utiliza para crear texturas sobre diversas superficies. Esta obra lleva por título Eratóstenes, *en honor al matemático griego pionero de los trabajos sobre números primos.*



Los poliedros arquimedianos

Arquímedes de Siracusa (c. 287 a. C.–c. 212 a. C.)

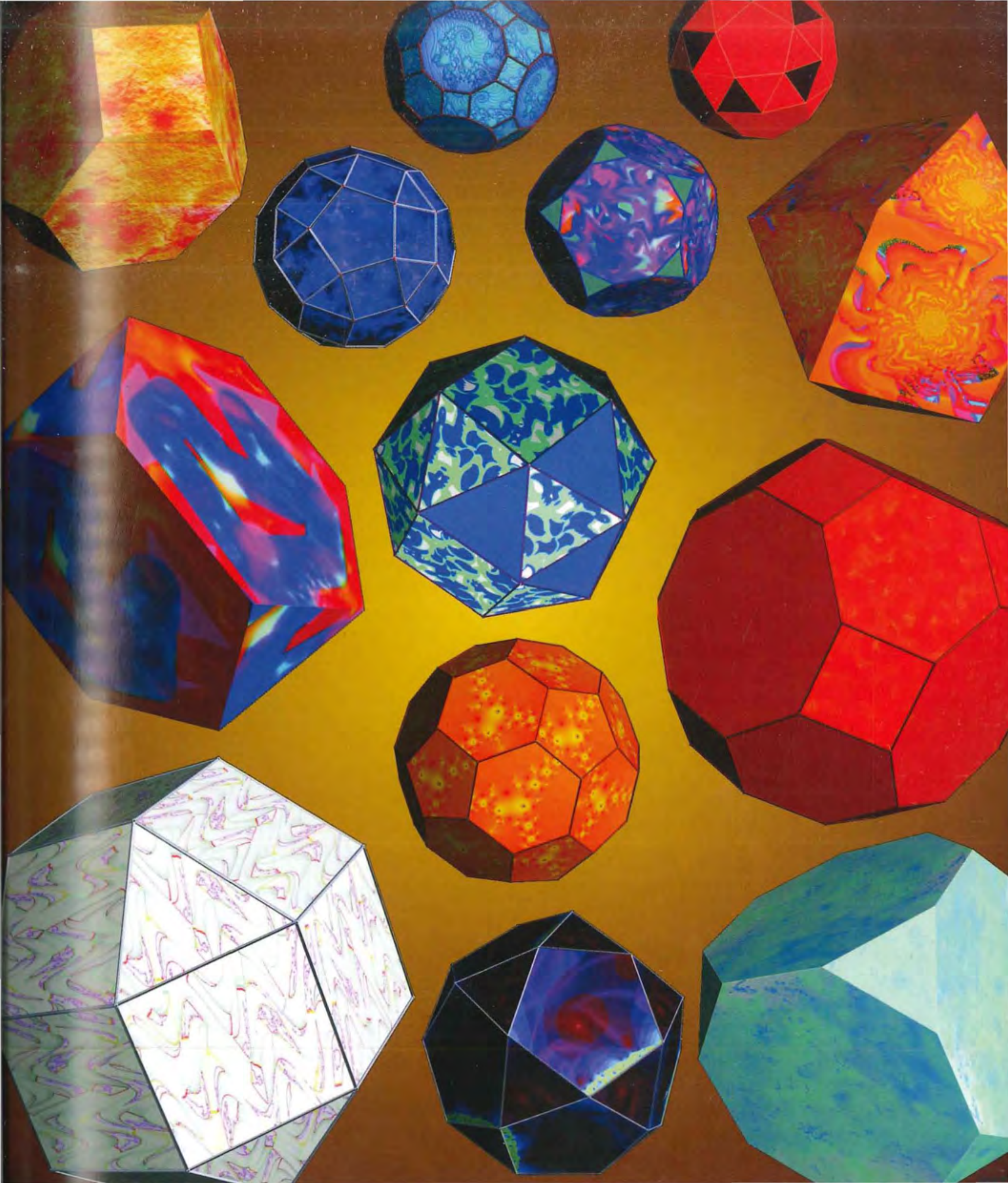
Los poliedros arquimedianos, o poliedros semirregulares de Arquímedes, son, como los **sólidos platónicos,** objetos convexos cuyas caras son polígonos que tienen lados y ángulos iguales. Sin embargo, en el caso de estos poliedros, las caras son de distintos tipos. Arquímedes describió, por ejemplo, el poliedro formado por doce pentágonos y veinte hexágonos (parecido a un balón de fútbol) y otros doce similares. En torno a los vértices de estos sólidos, los polígonos aparecen siempre en la misma secuencia (por ejemplo hexágono-hexágono-triángulo).

Se han perdido los escritos originales de Arquímedes que describían los trece poliedros semirregulares; sólo los conocemos por fuentes indirectas. Durante el Renacimiento, los artistas reconstruyeron todos los poliedros arquimedianos, salvo uno. En 1619, Kepler dio a conocer todo el conjunto en su libro *Harmonices Mundi* (Las armonías del mundo). Los poliedros arquimedianos pueden describirse usando una notación numérica que indica las figuras que rodean cada vértice. Por ejemplo, 3, 5 ,3 ,5 designa el poliedro en cuyos vértices aparecen un triángulo, un pentágono, un triángulo y un pentágono, en ese orden. Con esa notación, tenemos los siguientes poliedros arquimedianos: 3, 4, 3, 4 (cuboctaedro); 3, 5, 3, 5 (icosidodecaedro); 3, 6, 6 (tetraedro truncado); 4, 6, 6 (octaedro truncado); 3, 8, 8 (cubo truncado);5, 6, 6 (icosaedrotruncado, o pelota de fútbol); 3, 10, 10 (dodecaedro truncado);3, 4, 4, 4 (rombicuboctaedro); 4, 6, 8 (cuboctaedro truncado); 3, 4, 5, 4 (rombicosidodecaedro); 4, 6, 10 (icosidodecaedro truncado); 3, 3, 3, 3, 4 (cubo romo, o cuboctaedro romo) y 3, 3, 3, 3, 5 (dodecaedro romo, o icosidodecaedro romo).

El icosaedro truncado, de treinta y dos caras, resulta particularmente fascinante. La forma de los balones de fútbol está basada en este sólido arquimediano, y también fue la forma utilizada para tallar las lentes que concentraron las ondas de choque de los detonadores de la bomba atómica (conocida como «fat man») que explotó en Nagasaki al final de la Segunda Guerra Mundial. En la década de 1980 los químicos lograron crear el balón de fútbol más pequeño del mundo, una molécula de carbono con sesenta átomos en los vértices de un icosaedro truncado. Estas nanoestructuras, conocidas como «buckyballs», resultan fascinantes por sus propiedades químicas y físicas, y son utilizadas en diversas aplicaciones que van desde los lubricantes hasta tratamientos contra el SIDA).

VÉASE TAMBIÉN Los sólidos platónicos (c. 350 a. C.), Arquímedes: arena, ganado y el *stomachion* (c. 250 a. C.), La fórmula de Euler para los poliedros (1751), El juego icosiano (1857), El teorema de Pick (1899), La cúpula geodésica (1922), El poliedro de Császár (1949), El poliedro de Szilassi (1977), Spidrones (1979) y La solución al holiedro (1999).

La eslovena Teja Krašek explora los trece poliedros arquimedianos en una obra de arte titulada Harmonices Mundi II *(en honor de la presentación que Johannes Kepler hizo de estos mismos objetos en su libro de 1619* Harmonices Mundi).



225 a. C.

La espiral de Arquímedes

Arquímedes de Siracusa (c. 287 a. C.–c. 212 a. C.)

El término «espiral» se utiliza de forma general para describir cualquier curva geométrica generada por un punto que gira en torno a un centro al mismo tiempo que se aleja de él. Cuando pensamos en ejemplos de espirales nos vienen a la mente imágenes de distintos tipos, tanto corrientes como exóticas, desde el brote de un helecho hasta el tentáculo recogido de un pulpo, pasando por la forma que adopta un ciempiés al morir, el intestino de una jirafa, la lengua de una mariposa o la sección transversal de cualquier tipo de rollo. La espiral posee una belleza simple que los humanos han copiado en sus técnicas y herramientas; la naturaleza se ha servido de ella para crear muchas de sus estructuras.

Arquímedes fue el primero que estudió las propiedades matemáticas de la espiral más simple en su libro *De las espirales*, del año 225 a. C. Esa espiral, que conocemos como espiral de Arquímedes, puede expresarse mediante la ecuación $r = a + b\theta$. El parámetro a rota el conjunto de la espiral, mientras que b controla la distancia entre dos giros sucesivos. Las espirales más comunes son del tipo arquimediano: brotes rizados, los extremos de una alfombra enrollada y las espirales decorativas que se ven en joyería. Entre los usos prácticos de la espiral de Arquímedes se incluye la transformación de un movimiento rotativo en lineal en las máquinas de coser. Resulta de especial interés el comienzo de la espiral de Arquímedes, por su capacidad para resistir fuerzas de torsión o de traslación.

Entre los ejemplos más antiguos de la espiral de Arquímedes encontramos laberintos prehistóricos, diseños espirales en ollas de terracota del siglo VI a. C. motivos decorativos en objetos de la antigua cultura altaica (de mediados del primer milenio a. C.), los grabados de las piedras en el umbral de antiguas estancias de iniciación de la Edad de Bronce en la actual Irlanda, las filigranas de algunos manuscritos irlandeses y las obras de arte de los tanka tibetanos (diseños budistas, pintados o bordados que cuelgan en algunos monasterios). De hecho, la espiral es un símbolo omnipresente en todo el mundo antiguo. Su frecuente presencia en enterramientos sugiere la idea de que representaba un ciclo de vida, muerte y renacimiento, como en el movimiento continuo del Sol.

VÉASE TAMBIÉN La proporción áurea (1509), La loxodrómica (1537), La espiral de Fermat (1638), Las teselaciones de Voderberg (1936), La espiral de Ulam (1963) y Spidrones (1979).

Un brote del helecho exhibe una espiral de Arquímedes, una curva que Arquímedes estudió en el año 225 a. C. en su libro De las espirales.



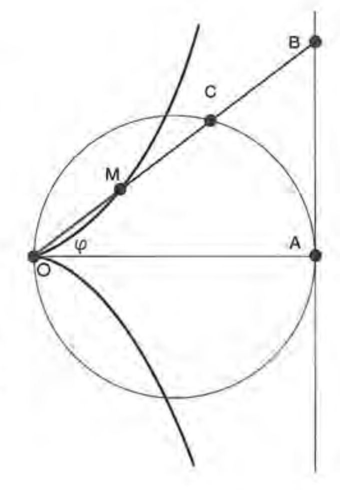
c. 180 a. C.

La cisoide de Diocles

Diocles (c. 240 a. C.–c. 180 a. C.)

El matemático griego Diocles descubrió la cisoide que lleva su nombre alrededor del año 180 a. C., cuando trataba de utilizar sus sorprendentes propiedades para duplicar un cubo. La expresión «duplicar el cubo» hace referencia al célebre y antiguo desafío de construir un cubo cuyo volumen sea el doble del de un cubo anterior más pequeño, lo que implica que el lado del cubo grande debe ser $\sqrt[3]{2}$ veces mayor que el del cubo pequeño. El uso que hizo Diocles de la cisoide, y su intersección con una línea recta, era teóricamente correcto pero no seguía con rigor las reglas de la construcción euclidiana, que sólo permiten el uso de regla y compás.

El nombre «cisoide» procede del griego y significa «con forma de hiedra». La gráfica de la curva se extiende hasta el infinito en las dos direcciones del eje y, y presenta un único vértice. Las dos ramas de la curva, que se alejan del vértice, se aproximan a una misma asíntota vertical. Si trazamos una circunferencia que pase por el vértice en el punto O y que sea tangente a la asíntota, cualquier segmento que una el vértice con un punto M de la cisoide pude prolongarse de modo que corte a la circunferencia en C y a la asíntota en B. La distancia de la prolongación desde C hasta B es igual a la distancia entre O y M. La curva puede expresarse en coordenadas polares como $r = 2a(\sec\theta - \cos\theta)$ y en coordenadas cartesianas como $y^2 = x^3/(2a - x)$. La cisoide puede ser generada por el vértice de una parábola mientras ésta rueda, sin deslizar, sobre una segunda parábola del mismo tamaño.



Diocles, fascinado por las curvas que conocemos como secciones cónicas, estudió el punto focal de la parábola en su trabajo *En los espejos ardientes*. Uno de sus objetivos era encontrar una superficie reflectante que concentrara en su foco la mayor cantidad posible de calor al orientarla hacia la luz del Sol.

VÉASE TAMBIÉN La cardioide (1637), La longitud de la parábola semicúbica de Neile (1657) y La astroide (1674).

Antena parabólica de telecomunicaciones. El matemático griego Diocles, fascinado por curvas como ésta, estudió el punto focal de la parábola en su trabajo En los espejos ardientes. *Diocles quería encontrar una superficie reflectante que concentrase la máxima cantidad posible de calor al ser iluminada.*



c. 150

El *Almagesto* de Ptolomeo

Claudius Ptolemaeus (c. 90–c. 168)

El matemático y astrónomo Ptolomeo de Alejandría escribió la obra *Almagesto*, un tratado sistemático de todos los aspectos de la astronomía conocidos en su época. En esta obra, que consta de trece libros, Ptolomeo trata sobre el movimiento aparente de planetas y estrellas. Su modelo geocéntrico, según el cual la Tierra se encuentra en el centro del universo mientras que el Sol y los demás planetas orbitan alrededor, se aceptó durante más de mil años tanto en Europa como en el mundo árabe.

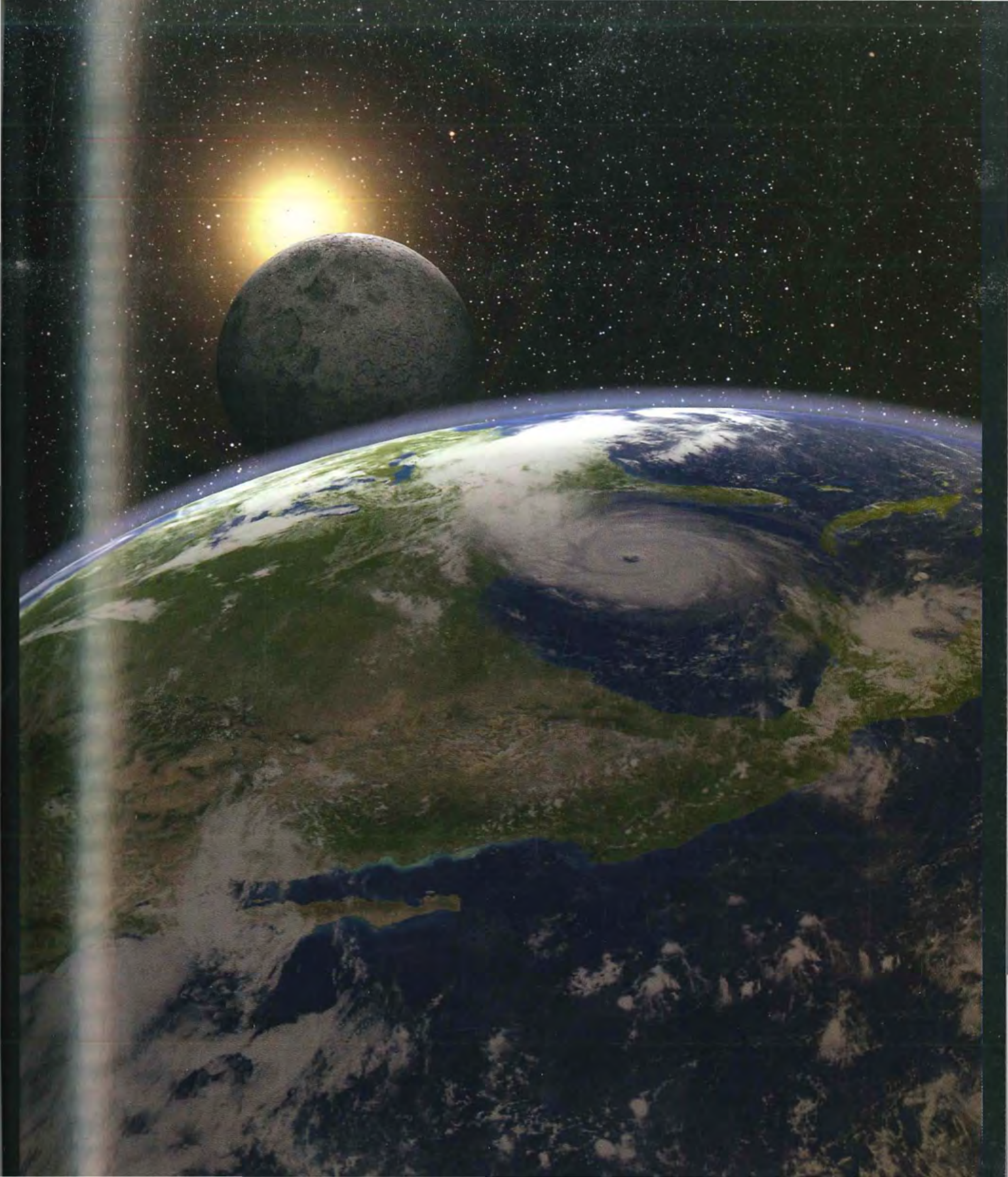
Almagesto es la forma latina del nombre árabe «al-kitabu-l-mijisti» (el gran libro) y su especial interés por las matemáticas se debe a su contenido trigonométrico, que incluye el equivalente a una tabla de los senos de los ángulos comprendidos entre 0 y 90 grados (en intervalos de 15 minutos de arco), así como una introducción a la trigonometría esférica. El *Almagesto* contiene, además, teoremas que corresponden a nuestra moderna «ley de los senos», así como fórmulas para sumas y diferencias de ángulos y semiángulos. Según Jan Gullberg, «el hecho de que se haya perdido gran parte del trabajo de los primeros griegos sobre astronomía se debe a la completitud y a la elegancia en la presentación del *Almagesto* de Ptolomeo, que hizo que todos los trabajos anteriores parecieran superfluos». Gess Grasshoff, por otra parte, afirma que «el *Almagesto* de Ptolomeo comparte el honor, junto a los *Elementos* de Euclides, de ser el manual científico que durante más tiempo se ha utilizado. Desde que se concibió en el siglo II hasta el final del Renacimiento, este trabajo asentó la astronomía como ciencia».

El *Almagesto* se tradujo al árabe en torno al año 827, y del árabe al latín en el siglo XII. El matemático y astrónomo persa Abu al-Wafa (940–998) se basó en el *Almagesto* para sistematizar los teoremas trigonométricos y sus demostraciones.

Resulta interesante saber que Ptolomeo trató de calcular el tamaño del universo a partir de su modelo de los movimientos celestes, según el cual los planetas se mueven en pequeñas órbitas circulares llamadas epiciclos, que a su vez se desplazan a lo largo de una circunferencia mayor. Calculó que la esfera que contenía las lejanas «estrellas fijas» tenía un radio veinte mil veces mayor que el de la Tierra.

VÉASE TAMBIÉN Los *Elementos* de Euclides (300 a. C.) y Teorema del coseno (c. 1427).

El Almagesto *de Ptolomeo describe un modelo geocéntrico del universo que sitúa a la Tierra en su centro, alrededor del cual orbitan el Sol y el resto de planetas. Este modelo fue aceptado durante más de mil años, tanto en Europa como en el mundo árabe.*



250

La *Arithmetica* de Diofanto

Diofanto de Alejandría (c. 200–c. 284)

El matemático griego Diofanto de Alejandría, llamado a veces «el padre del álgebra», fue el autor de *Arithmetica* (c. 250), una serie de textos matemáticos que han influido en las matemáticas durante siglos. *Arithmetica*, el trabajo más célebre sobre álgebra de toda la matemática griega, contiene diversos problemas, así como soluciones numéricas para ecuaciones. La importancia de Diofanto reside, además, en sus avances en notación matemática y en el tratamiento de las fracciones como números. En la dedicatoria de *Arithmetica*, Diofanto le dice a Dionisio (seguramente el obispo de Alejandría) que, aunque puede que el material del libro resulte complicado, «no te será difícil captarlo, con tu entusiasmo y mis enseñanzas».

Los árabes conservaron los diversos trabajos de Diofanto; se tradujeron al latín en el siglo XVI. Las ecuaciones diofánticas, con soluciones enteras, llevan ese nombre en su honor. Pierre de Fermat garabateó su célebre **Último teorema de Fermat** (que trataba sobre las soluciones enteras de $a^n + b^n = c^n$) en una traducción al francés de *Arithmetica* publicada en 1681.

En su *Arithmetica*, Diofanto muestra mucho interés por hallar soluciones enteras de ecuaciones como $ax^2 + bx = c$. Aunque los babilonios conocían algunos métodos para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas como las que tanto intrigaban a Diofanto, el matemático griego es especial porque fue, en palabras de J. D. Swift, «el primero que introdujo una notación algebraica sistemática y coherente, un hecho que representó una mejora significativa respecto del estilo puramente verbal de sus predecesores (y de muchos de sus sucesores). El redescubrimiento de *Arithmetica*, con la mediación de fuentes bizantinas, fue una ayuda enorme para el renacimiento de las matemáticas en la Europa occidental y estimuló a muchos matemáticos, de entre los que el más grande fue Fermat».

Nótese que el matemático persa al-Khwarizmi (780–850) comparte el título de «padre del álgebra» por su libro ***Álgebra***, que contiene una solución sistemática de las ecuaciones lineales y cuadráticas. Al-Khwarizmi fue el introductor de los números indoarábigos (y de ciertos conceptos algebraicos) en las matemáticas europeas; las palabras «algoritmo» y «álgebra» derivan de su nombre y de «al-jabr» respectivamente. «Al-jabr» es la palabra árabe con la que se designa una de las operaciones usadas en la resolución de ecuaciones cuadráticas.

VÉASE TAMBIÉN La muerte de Hipatia (415), El *Álgebra* de al-Khwarizmi (830), *Sumario Compendioso* (1556) y El último teorema de Fermat (1637).

Portada de la edición de 1621 de la Arithmetica *de Diofanto, traducida al latín por el matemático francés Claude Gaspard Bachet de Méziriac. El descubrimiento europeo de* Arithmetica *fomentó el renacimiento de las matemáticas en Europa occidental.*

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX,

ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.

AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.



LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.

M. DC. XXI.

CVM PRIVILEGIO REGIS.

340

El teorema del hexágono de Pappus

Pappus de Alejandría (c. 290–c. 350)

Un granjero desea plantar nueve arces de modo que formen diez filas, cada una formada por tres árboles. Una manera curiosa de lograr este objetivo se sirve del teorema de Pappus. Si tres puntos A, B, C están situados en cualquier lugar de una recta y otros tres puntos D, E, F en cualquier lugar de una segunda recta, el teorema de Pappus nos garantiza que las intersecciones X, Y, Z de los lados opuestos de un hexágono cruzado A, F, B, D, C, E estén alieneados. El granjero puede resolver su problema de formar una décima fila si mueve el árbol B hasta alinearlo con Y y E.

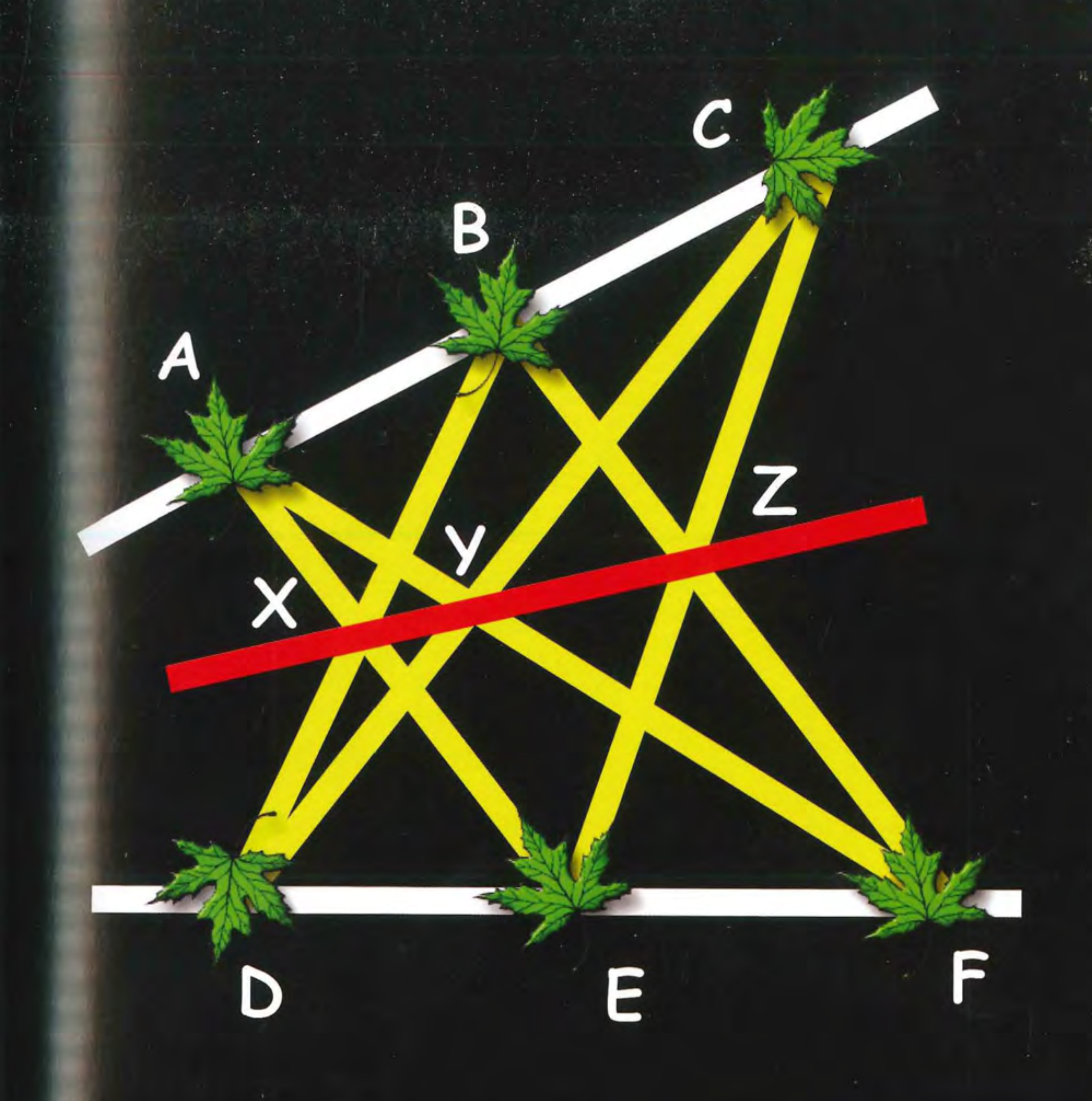
Pappus fue uno de los matemáticos helénicos más importantes de su época; debe su fama a la obra *Synagoge*, escrita en torno al año 340. El trabajo se centra en temas de geometría que incluyen polígonos, poliedros, circunferencias, espirales y panales construidos por abejas. La obra *Synagoge* es valiosa, además, porque incluye resultados basados en trabajos anteriores que no han llegado hasta nosotros. Thomas Heath escribe que «*Synagoge*, escrita con la intención evidente de revitalizar la geometría clásica griega, abarca prácticamente toda la materia».

En cuanto al famoso teorema de Pappus, Max Dehn afirma que «supone un acontecimiento en la historia de la geometría. La geometría se preocupó desde su origen por las medidas: longitudes de líneas, áreas de figuras planas y volúmenes de cuerpos. Aquí encontramos, por primera vez, un teorema que se establece desde la teoría ordinaria de medidas, pero que se ha liberado de todos los elementos de medida». En otras palabras, el teorema demuestra la existencia de una figura determinada, pero sólo mediante la incidencia de líneas y puntos. Dehn dice que esta figura constituye «la primera configuración de la **geometría proyectiva**».

La obra *Synagoge* llegó a ser muy conocida en Europa tras la impresión, en 1588, de una traducción al latín de Federico Commandino. La figura de Pappus intrigó a Isaac Newton y a René Descartes. Aproximadamente 1.300 años después de que Pappus escribiera *Synagoge*, el matemático francés Blaise Pascal proporcionó una interesante generalización de su teorema.

VÉASE TAMBIÉN La geometría de Descartes (1637), La geometría proyectiva (1639) y El problema de la recta de Sylvester (1893).

Si tres puntos A, B, C están situados en cualquier lugar de una recta y otros tres puntos D, E, F en cualquier lugar de una segunda recta, el teorema de Pappus nos garantiza que las intersecciones X, Y, Z estén alineadas.


C
B
A
Z
Y
X
D
E
F

350

El manuscrito de Bakhshali

El manuscrito de Bakhshali es una famosa recopilación matemática descubierta en 1881 en el interior de un cercado de piedra en el noroeste de la India; puede que su origen sea anterior al siglo III. Gran parte del manuscrito había sido destruida y, en el momento de su descubrimiento, sólo quedaban unas setenta hojas de corteza de abedul. El manuscrito de Bakhshali recoge técnicas y reglas para resolver problemas de aritmética, álgebra y geometría, y proporciona una fórmula para calcular raíces cuadradas.

Veamos uno de los problemas planteados en el texto: «Tiene ante usted un grupo de veinte personas formado por hombres, mujeres y niños. Entre todos ganan veinte monedas. Cada hombre gana tres monedas, cada mujer una moneda y media, y cada niño la mitad de una moneda. ¿Cuál es el número de hombres, de mujeres y de niños?» ¿Sabe usted hallar la solución? El resultado es el siguiente: 2 hombres, 5 mujeres y 13 niños. Sean h, m y n el número de hombres, mujeres y niños respectivamente. Dos fórmulas describen nuestra situación: $h + m + n = 20$ y $3h + (3/2)m + (1/2)n = 20$. La solución dada es la única válida.

El manuscrito se encontró cerca de la aldea de Bakhshali, en la subdivisión Yusufzai del distrito de Peshawar (en la actual Pakistán). La fecha del manuscrito ha generado mucho debate; sin embargo, varios expertos creen que se trata de un comentario acerca de un trabajo más antiguo que pudo haber existido entre los años 200 y 400 de nuestra era. Una característica excepcional de la anotación de Bakhshali es el uso del signo «+» colocado después de un número para indicar que es negativo. Las ecuaciones contienen un punto grande que representa el valor desconocido que se trata de hallar. Un punto semejante se utiliza para representar el número cero. Según Dick Teresi, «lo más importante es que en el manuscrito de Bakhshali encontramos el primer documento de matemáticas indias desprovisto de cualquier tipo de vínculo religioso».

VÉASE TAMBIÉN La *Arithmetica* de Diofanto (250), Cero (c. 650) y *Ganita Sara Samgraha* (850).

Un fragmento del manuscrito de Bakhshali, descubierto en 1881 en el noroeste de la India.

La muerte de Hipatia

Hipatia de Alejandría (c. 370–415)

Hipatia de Alejandría murió despedazada a manos de una muchedumbre cristiana, en parte porque no se adhirió a los estrictos principios cristianos. Se consideraba a sí misma neoplatónica, pagana y seguidora de las ideas pitagóricas. Hipatia es la primera matemática de la historia de la humanidad de la que poseemos datos razonablemente ciertos y detallados. Se decía que era muy atractiva y célibe por voluntad propia. Cuando le preguntaron por su decisión de no casarse y por su obsesión por las matemáticas, contestó que ya estaba casada con la verdad.

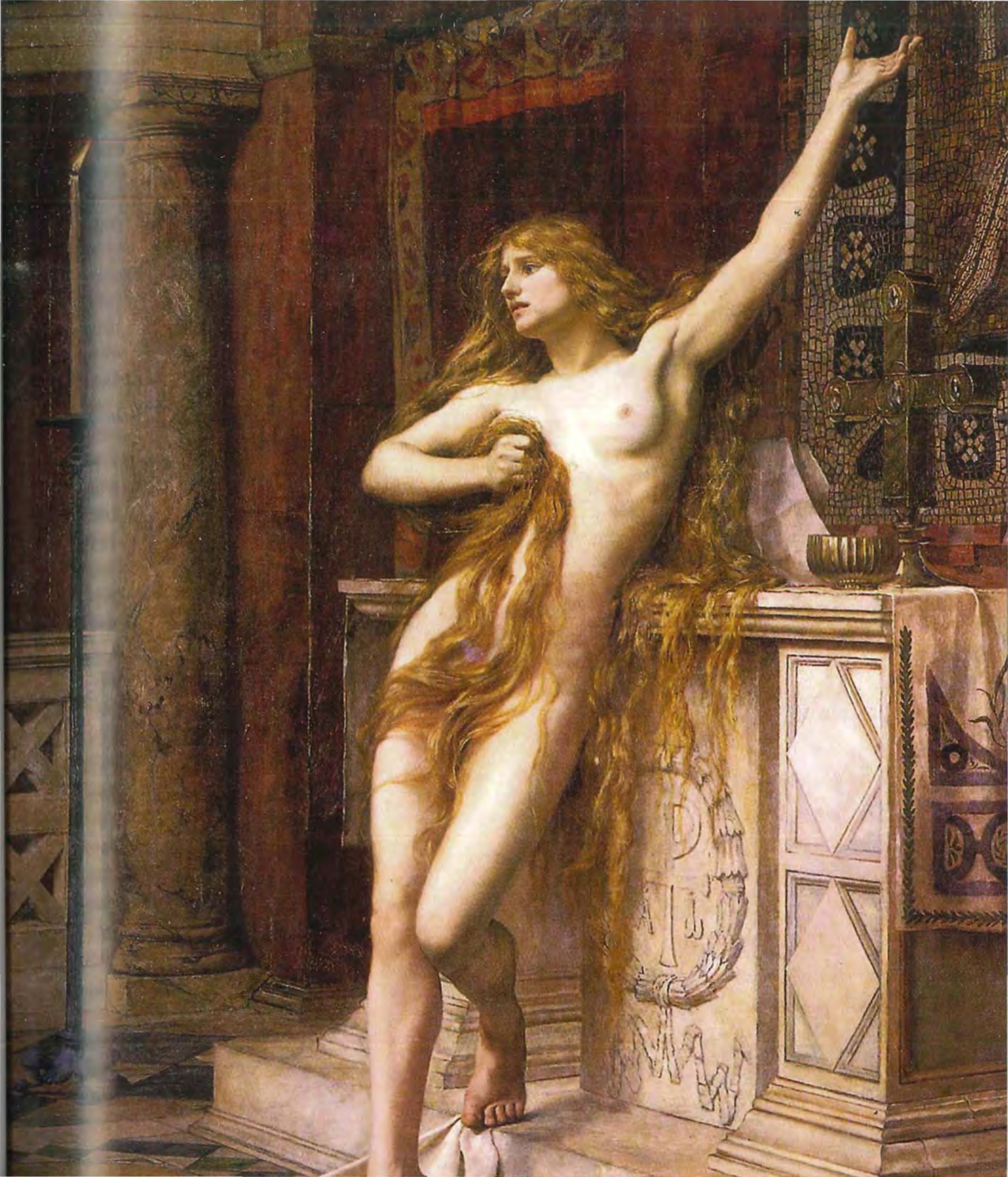
Entre los trabajos de Hipatia encontramos comentarios a la ***Arithmetica* de Diofanto.** Uno de los problemas matemáticos que proponía a sus estudiantes trataba sobre las soluciones enteras del sistema de ecuaciones: $x - y = a$ y $x^2 - y^2 = (x - y) + b$, donde a y b son datos conocidos. ¿Puede usted encontrar valores enteros para x, y, a y b que cumplan ambas ecuaciones?

Los cristianos fueron sus más duros rivales filosóficos: rechazaron sus afirmaciones platónicas acerca de la naturaleza de Dios y de la vida después de la muerte. En un cálido día de marzo del año 415, una multitud de cristianos fanáticos la asaltó, la desnudó y le arrancaron la carne de los huesos con conchas afiladas. A continuación despedazaron su cuerpo y quemaron los trozos. Al igual que algunas víctimas actuales del fundamentalismo religioso, es posible que la asesinaran simplemente porque se encontraba al otro lado de la frontera religiosa. Hasta después del Renacimiento no hubo otra mujer, Maria Agnesi, que se hiciera un nombre en las matemáticas.

La muerte de Hipatia provocó la salida de muchos eruditos de Alejandría y marcó en muchos sentidos el fin de siglos de progreso griego en matemáticas. Durante la Alta Edad Media europea, árabes e hindúes fueron los que desempeñaron los papeles fundamentales en el fomento del progreso de las matemáticas.

VÉASE TAMBIÉN Pitágoras funda una fraternidad matemática (c. 530 a. C.), La *Arithmetica* de Diofanto (250), Las *Instituzioni Analitiche* de Agnesi (1748) y El doctorado de Kovalevskaya (1874).

En 1885, el pintor inglés Charles William Mitchell representó a Hipatia momentos antes de su muerte a manos de una muchedumbre cristiana que la desnudó y la asesinó en una iglesia. Según algunos documentos, la desollaron con objetos cortantes y después la quemaron viva.



c. 650

Cero

Brahmagupta (c. 598–c. 668), **Bhaskara** (c. 600–c. 680), **Mahavira** (c. 800–c. 870)

Los antiguos babilonios no disponían de un símbolo para el cero, un hecho que generaba dificultades en su notación, una confusión similar a la que sentiríamos hoy si los números 12, 102 y 1.002 no tuvieran ceros que los diferenciaran. Los escribas babilonios dejaban un espacio donde debía haber un cero; no era fácil distinguir el número de espacios en el centro o al final de los números. Finalmente, los babilonios inventaron un símbolo para marcar el vacío entre sus dígitos, aunque es probable que no consideraran al cero un número como los demás.

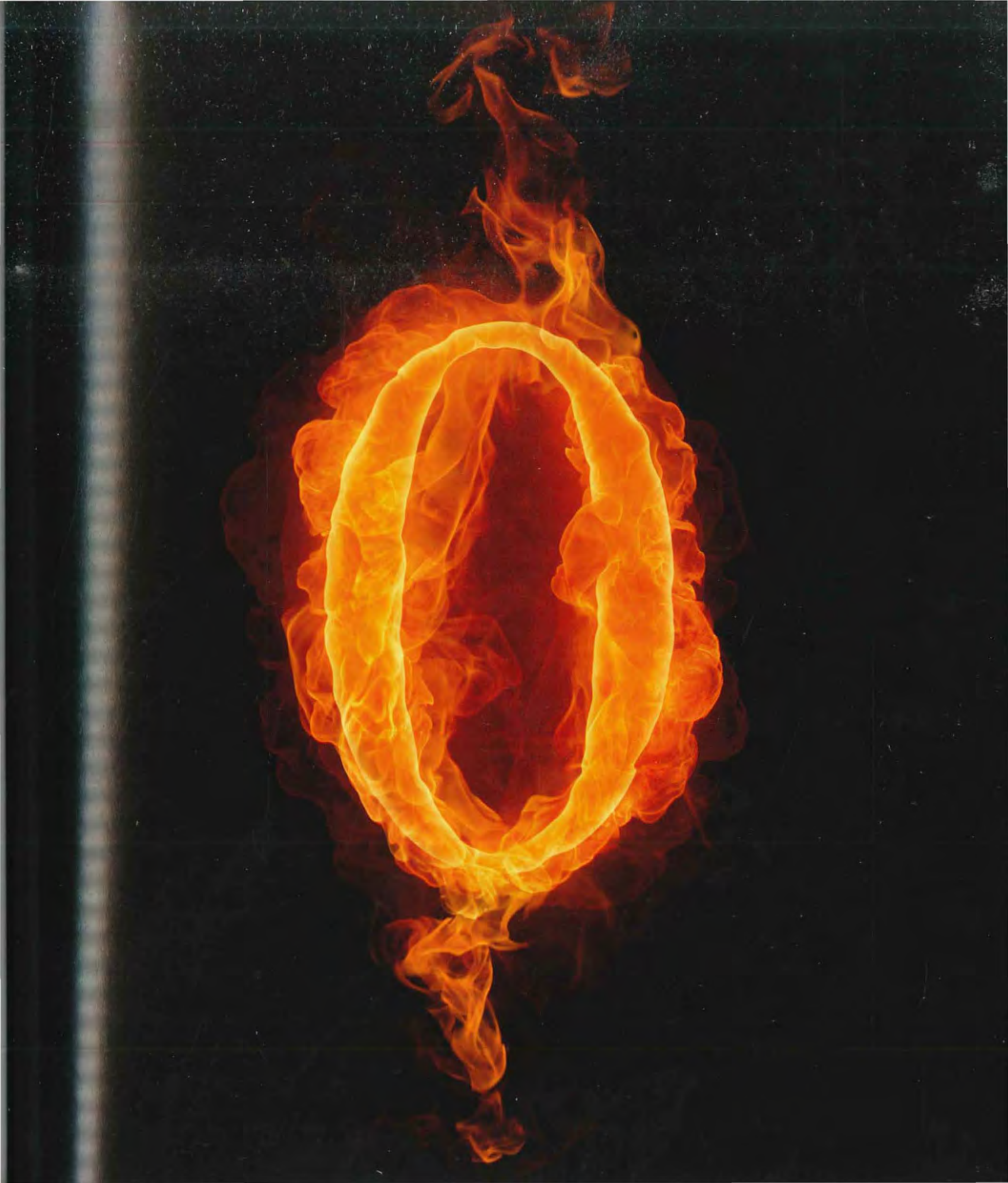
Alrededor del año 650 el uso del número era habitual en las matemáticas indias; una tablilla de piedra, encontrada en Gwalior, al sur de Delhi, contenía los números 270 y 50. Los números de la tablilla, fechados en el año 876, son muy parecidos a los números modernos, salvo por el hecho de que los ceros son más pequeños y están un poco alzados. Los matemáticos indios (Brahmagupta, Mahavira y Bhaskara, por ejemplo) utilizaron el cero en operaciones matemáticas. Brahmagupta explicó que un número al que se le resta él mismo da como resultado cero; señaló, además, que cualquier número multiplicado por cero es cero. **El manuscrito de Bakhshali** puede ser la primera prueba documentada del número cero con propósitos matemáticos, aunque su datación no está clara.

Alrededor del año 665, la civilización maya de América Central desarrolló también el número cero, pero parece que su logro no repercutió en otras culturas. Por otra parte, el concepto indio del cero se propagó a árabes, europeos y chinos transformando el mundo.

Según el matemático Hossein Arsham, «la introducción del cero en el sistema decimal en el siglo XIII fue el logro más significativo en el desarrollo de un sistema numérico, haciendo que el cálculo con números grandes empezara a ser viable. Sin la noción de cero hubiera sido impensable establecer procedimientos para el comercio, la astronomía, la física, la química o la industria. La falta de ese símbolo es uno de los inconvenientes más graves del sistema numérico romano».

VÉASE TAMBIÉN El manuscrito de Bakhshali (c. 350), *Ganita Sara Samgraha* (850), *Capítulos de matemáticas indias* (c. 953), Lo asombroso, de al-Samawal (c. 1150), El *Liber Abaci* de Fibonacci (1202).

La noción del cero inició un movimiento que permitió a la humanidad trabajar con más facilidad con números grandes y alcanzar eficacia en los cálculos de diversos campos (desde el comercio hasta la física).



800

Las *Propositiones ad Acuendos Iuvenes* de Alcuino

Alcuin de York (c. 735–c. 804), **Gerbert de Aurillac** (c. 946–c. 1003)

Flaccus Albinus Alcuinus, también conocido como Alcuino de York, fue un estudioso inglés. A invitación de rey Carlomagno, llegó a ser uno de los maestros destacados de la corte carolingia, donde escribió tratados y poemas teológicos. En el año 796 fue nombrado abad de la abadía de Saint Martin de Tours; se convirtió en el mayor erudito de un renacido interés por el conocimiento que se conoce como renacimiento carolingio.

Los expertos creen que su libro *Propositiones ad acuendos iuvenes* (Problemas para aguzar el ingenio de los jóvenes) contribuyó a la educación del último Papa Matemático, Gerbert de Aurillac, fascinado por las matemáticas, que fue elegido Papa en el año 999 con el nombre de Silvestre II. El profundo conocimiento matemático del Papa convenció a algunos de sus enemigos de que se trataba en realidad de un brujo.

El «Papa de los números» transformó el suelo de la catedral de Reims en un **ábaco** gigante. Además, sustituyó los números romanos por los árabes (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9). Contribuyó a la invención del reloj de péndulo, inventó mecanismos para seguir las órbitas planetarias y escribió sobre geometría. Cuando se dio cuenta de que le faltaban nociones de lógica formal, estudió con lógicos alemanes. Este «Papa de los números» fue el que dijo: «El hombre justo vive por la fe, pero es bueno que tenga que conjugar la ciencia con su fe».

Las *Propositiones* de Alcunio contienen cincuenta problemas verbales y sus soluciones, los más famosos tratan sobre contar palomas en una escalera, cruzar un río, un padre agonizante que deja unas vasijas de vino a sus hijos o tres maridos celosos que no pueden permitir que otro de ellos esté a solas con sus esposas. Hay varias clases mayores de problemas que aparecen por primera vez en *Propositiones*. El escritor Ivars Peterson señala que «ojear los problemas (y las soluciones) de *Propositiones* proporciona una visión fascinante de varios aspectos de la vida en los tiempos medievales y da fe del inagotable poder de los acertijos en la educación matemática».

VÉASE TAMBIÉN El papiro de Rhind (c. 1650 a. C.), El *Álgebra* de al-Khwarizmi (830) y El ábaco (c.1200).

Se cree que el trabajo matemático de Alcuino contribuyó a la educación del último Papa Matemático, Gerbert de Aurillac, fascinado por las matemáticas, que fue elegido Papa en el año 999 con el nombre de Silvestre II. Una estatua del «Papa de los números» en Aurillac, Auvernia, Francia.


A GERBERT SYLVESTRE II
PREMIER PAPE FRANÇAIS
MORT A ROME EN 1003
L'AUVERGNE SA PATRIE
PAR LES SOINS DE E GROGNIER ANCIEN MAIRE
ET LA MUNICIPALITÉ D'AURILLAC

830

El *Álgebra* de al-Khwarizmi

Abu Ja'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (c. 780–c. 850)

Al-Khwarizmi fue un matemático y astrónomo persa que pasó casi toda su vida en Bagdad. Su libro de álgebra, *Kitab al-mukhtasar fi al-jabr wa' l-muqabala* (Compendio sobre el cálculo por medio de transposición y reducción) fue la primera obra sobre la solución sistemática de ecuaciones lineales y cuadráticas; a veces se nombra simplemente con la abreviatura *Álgebra*. Está considerado, junto a **Diofanto**, el «padre de álgebra». La traducción al latín de sus trabajos introdujo en Europa el sistema numérico decimal posicional. La palabra «álgebra» procede de *al-jabr*, una de las dos operaciones utilizadas en este libro para resolver ecuaciones cuadráticas.

Para al-Khwarizmi, *al-jabr* es un método en el que podemos eliminar cantidades negativas de una ecuación sumando la misma cantidad a cada lado. Por ejemplo, podemos reducir $x^2 = 50x - 5x^2$ a $6x^2 = 50x$ sumando $5x^2$ a ambos lados. *Al-muqabala* es el método por el que se agrupan cantidades semejantes a un mismo lado de la ecuación. Por ejemplo, $x^2 + 15 = x + 5$ se reduce a $x^2 + 10 = x$.

El libro ayudó a sus lectores a resolver ecuaciones del tipo $x^2 + 10x = 39$, $x^2 + 21 = 10x$, y $3x + 4 = x^2$, pero de un modo más general al-Khwarizmi creía que los problemas matemáticos difíciles podían resolverse si se desglosaban en partes más pequeñas. Al-Khwarizmi quería que su libro fuera práctico, que ayudara a la gente a hacer cálculos relacionados con el dinero, las herencias de tierras, los pleitos, el comercio o la construcción de acequias. Su libro contenía además diversos problemas (con sus soluciones) a modo de ejemplo.

Al-Khwarizmi trabajó la mayor parte de su vida en la Casa de la Sabiduría de Bagdad, una biblioteca que era además instituto de traducción y centro de enseñanza, un importante foco intelectual de la edad de oro islámica. Por desgracia, los mongoles destruyeron la Casa de la Sabiduría en 1258: la leyenda asegura que las aguas del Tigris se volvieron negras debido a la tinta de los libros lanzados al río.

VÉASE TAMBIÉN La *Arithmetica* de Diofanto (250) y Lo asombroso, de al-Samawal (c. 1150).

Sello de la Unión Soviética emitido en 1983 en honor a Al-Khwarizmi, el matemático y astrónomo persa cuyo libro sobre álgebra ofrecía una solución sistemática a una gran variedad de ecuaciones.


ПОЧТА СССР
4к
1983
1200 ЛЕТ
Мухаммед аль-Хорезми

1768

Los anillos de Borromeo

Peter Guthrie Tait (1831–1901)

Un conjunto sencillo pero intrigante de objetos entrelazados, que interesa tanto a matemáticos como a químicos, es el formado por los anillos de Borromeo o nudo Borromeo, tres anillos enlazados que deben su nombre a la familia italiana del siglo XV que lo exhibía en su escudo de armas.

Nótese que, en los anillos de Borromeo, estos no están enlazados dos a dos: si cortamos cualquiera de ellos, los tres anillos se separan. Algunos historiadores opinan que es posible que la antigua configuración de los anillos representara a las familias de Visconti, Sforza y Borromeo, que formaron una delicada unión por medio de matrimonios. Encontramos el mismo símbolo, en 1467, en la iglesia de San Pancracio, en Florencia. Otras versiones aún más antiguas, triangulares, eran utilizadas por los vikingos (una conocida representación se encontró en unos de los pilares de la cama de una mujer importante que murió en el año 834).

Los anillos aparecen por primera vez en un contexto matemático en 1876, en un artículo sobre **nudos** del físico matemático escocés Peter Tait. Dado que cada anillo puede adoptar dos posiciones posibles en cada cruce, arriba o abajo, existen sesenta y cuatro posibilidades de formación (2^6). Si tenemos en cuenta las simetrías, sólo diez de estas formaciones son diferentes desde el punto de vista geométrico.

Los matemáticos saben que no se puede construir un nudo Borromeo auténtico a partir de anillos planos; el lector puede comprobarlo con anillos de alambre: es necesario deformar o retorcer el alambre. En 1987, Michael Freedman y Richard Skora demostraron el teorema que establece que los anillos de Borromeo no pueden construirse con circunferencias planas.

En 2004, un grupo de químicos de UCLA creó un compuesto con un nudo Borromeo molecular de 2,5 nanómetros que incluía seis iones metálicos. En la actualidad, los investigadores buscan formas de utilizar estos nudos Borromeos moleculares en campos diversos como los *spintronics* (una tecnología que aprovecha el espín y la carga del electrón) y las imágenes médicas.

VÉASE TAMBIÉN Nudos (c. 100.000 a. C.), El teorema de Johnson (1916) y La ley de Murphy y los nudos (1988).

Este motivo con los anillos de Borromeo se encontró en un manuscrito francés del siglo XIII como representación de la Santísima Trinidad. El original contiene la palabra «trinitas» (que en latín quiere decir «trinidad» o «tres en uno») descompuesta en sus tres sílabas —tri, ni y tas— escritas en los tres anillos.



850

Ganita Sara Samgraha

Mahavira (c. 800–c. 870)

El *Ganita Sara Samgraha* (Compendio de la esencia de las matemáticas), datado en el año 850, es especial por varias razones. En primer lugar, se trata del único tratado conocido de aritmética escrito por un erudito de Jaina. Además, incluye, en esencia, todo el conocimiento matemático de la India de mediados del siglo IX. Es el texto indio más antiguo que se conserva dedicado por entero a las matemáticas.

Ganita fue escrito por Mahavira (o Mahaviracharya, que significa «Mahavira el maestro»), que vivió en el sur de la India. Hay un problema del libro que ha maravillado a los expertos durante siglos y que fue redactado de la siguiente forma: Una joven tiene una riña con su marido y rompe su collar. La tercera parte de las perlas caen sobre la dama. Un sexto se esparce por la cama. La mitad de lo que queda (y la mitad de lo que queda después, y otra vez la mitad de lo que queda después, y así sucesivamente seis veces en total) cae en otros lugares. Al final sólo quedan 1.161 perlas sin dispersarse. ¿Cuántas perlas tenía la joven en el collar?

La asombrosa respuesta a este acertijo es 148.608. Reflexionemos un instante sobre este problema. Un sexto cae sobre la cama. La tercera parte, sobre la dama. Esto significa que las perlas restantes, las que no están ni en la cama ni sobre la joven, suman la mitad del total. Las perlas restantes se dividen por dos seis veces, así que $((1/2)^7)x =$ 1,161, donde x es el número total de perlas, de modo que x es 148.608. ¡Valía la pena discutir por un collar de ese tamaño!

Ganita debe su fama, además, a la afirmación explícita de que la raíz cuadrada de un número negativo no existe. En *Ganita*, Mahavira estudió también las propiedades del cero y proporcionó un esquema de nomenclatura para todos los números desde 10 hasta 10^{24} así como métodos para obtener la suma de una serie cuyos términos son cuadrados de una progresión aritmética, reglas para determinar el área y el perímetro de una elipse y métodos para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas.

VÉASE TAMBIÉN El manuscrito de Bakhshali (c. 350), Cero (c. 650) y La aritmética de Treviso (1478).

El Ganita Sara Samgraha *propone un problema matemático que tiene como protagonista a una mujer que discute con su marido y rompe un collar. Las perlas se dispersan de acuerdo a una serie de reglas y se trata de determinar cuántas perlas tenía el collar antes de romperse.*



850

La fórmula de Thabit para números amigos

Thabit ibn Qurra (826-901)

Los pitagóricos de la antigua Grecia estaban fascinados por los números amigos, aquellos tales que cada uno es la suma de los divisores propios del otro. (Los divisores propios de un número no incluyen al número mismo.) La pareja más pequeña de números amigos está formada por el 220 y el 284. El número 220 es divisible por 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110, que suman 284; el 284, por su parte, es divisible por 1, 2, 4, 71 y 142, que suman 220.

En el año 850, Thabit ibn Qurra, un astrónomo y matemático árabe, ofreció una fórmula que podría utilizarse para generar números amigos. Calcule $p = 3 \times 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \times 2^{n} - 1$ y $r = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ para un número entero $n > 1$. Si p, q y r son números primos, entonces $2^{n}pq$ y $2^{n}r$ son una pareja de números amigos. Cuando $n = 2$, obtenemos los números 220 y 284. La fórmula, por desgracia, no genera todos los números amigos existentes. En todas las parejas conocidas de números amigos, ambos son pares o ambos son impares. ¿Descubriremos alguna vez una pareja de números amigos compuesta por un número par y un número impar? Los números amigos son muy difíciles de encontrar. En 1747 Leonhard Euler, un matemático y físico suizo, sólo fue capaz de encontrar treinta parejas. En la actualidad conocemos más de once millones de parejas, pero sólo 5.001 de ellas están formadas por dos números menores que $3{,}06 \times 10^{11}$.

En *Génesis*, 32:14, Jacob le regala 220 cabras a su hermano. Según los místicos, se trató de un «acuerdo secreto», ya que 220 pertenece a una de las parejas de números amigos, y Jacob quería asegurar su amistad con Esaú. Martin Gardner, un popular escritor de temas matemáticos y científicos, señaló lo siguiente: «Un árabe pobre del siglo XI dejó escrito que en cierta ocasión había probado el efecto erótico de comer algo marcado con el número 284 al mismo tiempo que otra persona saboreaba algo marcado con el número 220, pero se olvidó de añadir el resultado del experimento».

VÉASE TAMBIÉN Pitágoras funda una fraternidad matemática (c. 530 a. C.).

En Génesis, Jacob le regala 220 cabras a su hermano. Según los místicos, se trató de un «acuerdo secreto», ya que 220 pertenece a una de las parejas de números amigos, y Jacob quería asegurar su amistad con Esaú.



953

Capítulos de matemáticas indias

Abu'l Hasan Ahmad ibn Ibrahim al-Uqlidisi (c. 920–c. 980)

Al-Uqlidisi («el Euclidiano») fue un matemático árabe cuya obra *Kitab al-fusul fi al-hisab al-hindi* (Capítulos de matemáticas indias) es el texto árabe más antiguo conocido que describe el uso posicional de los números indoarábigos, es decir, el uso de los dígitos del 0 al 9 en los que cada posición de un número de varias cifras (comenzando por la derecha) se corresponde con una potencia de 10 (por ejemplo, 1, 10, 100, y 1.000). La obra de al-Uqlidisi representa además el primer trabajo sobre aritmética que se conoce en el mundo árabe. Al-Uqlidisi nació y murió en Damasco, pero viajó mucho y es posible que aprendiera las matemáticas hindúes en la India. Sólo ha sobrevivido una copia de este manuscrito.

Además, al-Uqlidisi estudió los problemas de los matemáticos precedentes en términos del nuevo sistema de numeración posicional. Dick Teresi, autor de varios libros acerca de ciencia y tecnología, señala que «su mismo nombre es una prueba de la reverencia que sentía por los griegos. Copió los trabajos de Euclides, de ahí el nombre al-Uqlidisi. Entre sus legados están las matemáticas de papel y pluma». En tiempo de al-Uqlidisi era común, tanto en la India como en el mundo islámico, realizar cálculos matemáticos sobre la arena o el polvo, borrando pasos con la mano a medida que se avanzaba en un razonamiento. Al-Uqlidisi sugirió cambiar este método por el papel y la pluma. La aritmética escrita permite conservar todas las fases del proceso y, aunque su método suponía no poder borrar los números de tinta, permitió una mayor flexibilidad en el cálculo. El papel, de algún modo, canalizó la evolución de los modernos métodos para realizar multiplicaciones y divisiones largas.

Régis Morelon, editor de la *Encyclopedia of the History of Arabic Science*, escribe: «Una de las ideas más notables de la aritmética de al-Uqlidisi es el uso de fracciones decimales» y la utilización del separador decimal. Por ejemplo, para dividir 19 entre 2 varias veces, al-Uqlidisi propuso lo siguiente: 19, 9,5, 4,75, 2,375, 1,1875, 0,59375. Los cálculos avanzados que permite el sistema decimal llevaron a que su uso se extendiera por toda la región y, finalmente, por todo el mundo.

VÉASE TAMBIÉN Cero (c. 650).

En tiempo de al-Uqlidisi era común, tanto en la India como en el mundo islámico, realizar cálculos matemáticos sobre la arena o el polvo, borrando los pasos con la mano a medida que se avanzaba en un razonamiento. Con el método de al-Uqlidisi de utilizar papel y pluma, la aritmética escrita permitió conservar el proceso y confirió una mayor flexibilidad al cálculo.



1070

El *Tratado* de Omar Khayyam

Omar Khayyam (1048–1131)

Omar Khayyam, el matemático, astrónomo y filósofo persa, es conocido ante todo por su colección de poemas, los *Rubaiyat de Omar Khayyam*. Sin embargo, logró gran fama también por su influyente *Treatise on Demonstration of Problems of Algebra* (1070). En su libro propuso métodos para resolver ecuaciones cúbicas y de orden superior. Un ejemplo de una ecuación cúbica que resolvió es $x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$. Su forma de abordarlas no era enteramente nueva, pero sus generalizaciones para resolver cualquier ecuación cúbica son dignas de mención. El *Tratado* contiene una clasificación exhaustiva de las ecuaciones cúbicas con soluciones geométricas halladas mediante la intersección de secciones cónicas.

Además, Khayyam fue capaz de mostrar el modo de obtener la potencia enésima del binomio $a + b$ como potencias de a y b para cualquier número entero n. Para ilustrar esto consideremos la expresión $(a + b)^n$, que es igual a $(a + b) \times (a + b) \times (a + b)$... donde el factor $(a + b)$ aparece repetido n veces. Según la fórmula de expansión binomial, $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Los coeficientes numéricos 1, 5, 10, 10, 5 y 1, se denominan coeficientes binomiales y son los valores de una de las filas del **triángulo de Pascal.** Parte del trabajo de Khayyam al respecto aparecía en realidad en otro libro que él mismo menciona, pero que ha desaparecido.

El trabajo de Khayyam sobre geometría del año 1077, *Sharh ma ashkala min musadarat kitab Uqlidis* (Comentarios sobre las dificultades de los postulados del libro de Euclides), proporciona un interesante punto de vista sobre el célebre postulado euclidiano de las paralelas. En *Sharh*, Khayyam estudió propiedades de **geometrías no Euclideas** y se adentró por tanto en un área de las matemáticas que no daría más pasos hasta el siglo XIX.

Una traducción literal del nombre de Khayyam es «hacedor de tiendas», tal vez por la profesión de su padre. Khayyam se refirió una vez a sí mismo como aquel «que cosió las tiendas de la ciencia».

VÉASE TAMBIÉN Los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), El *Ars Magna* de Cardano (1545), El triángulo de Pascal (1654), La curva de distribución normal (1733) y Geometría no euclidea (1829).

La tumba de Omar Khayyam en Neishapur, Irán. La construcción, abierta, ofrece inscripciones con versos del poeta.



c. 1150

Lo asombroso, de al-Samawal

Ibn Yahya al-Maghribi al-Samawal (c. 1130–c. 1180), **Abu Bakr ibn Muhammad ibn al Husayn al-Karaji** (c. 953–c. 1029)

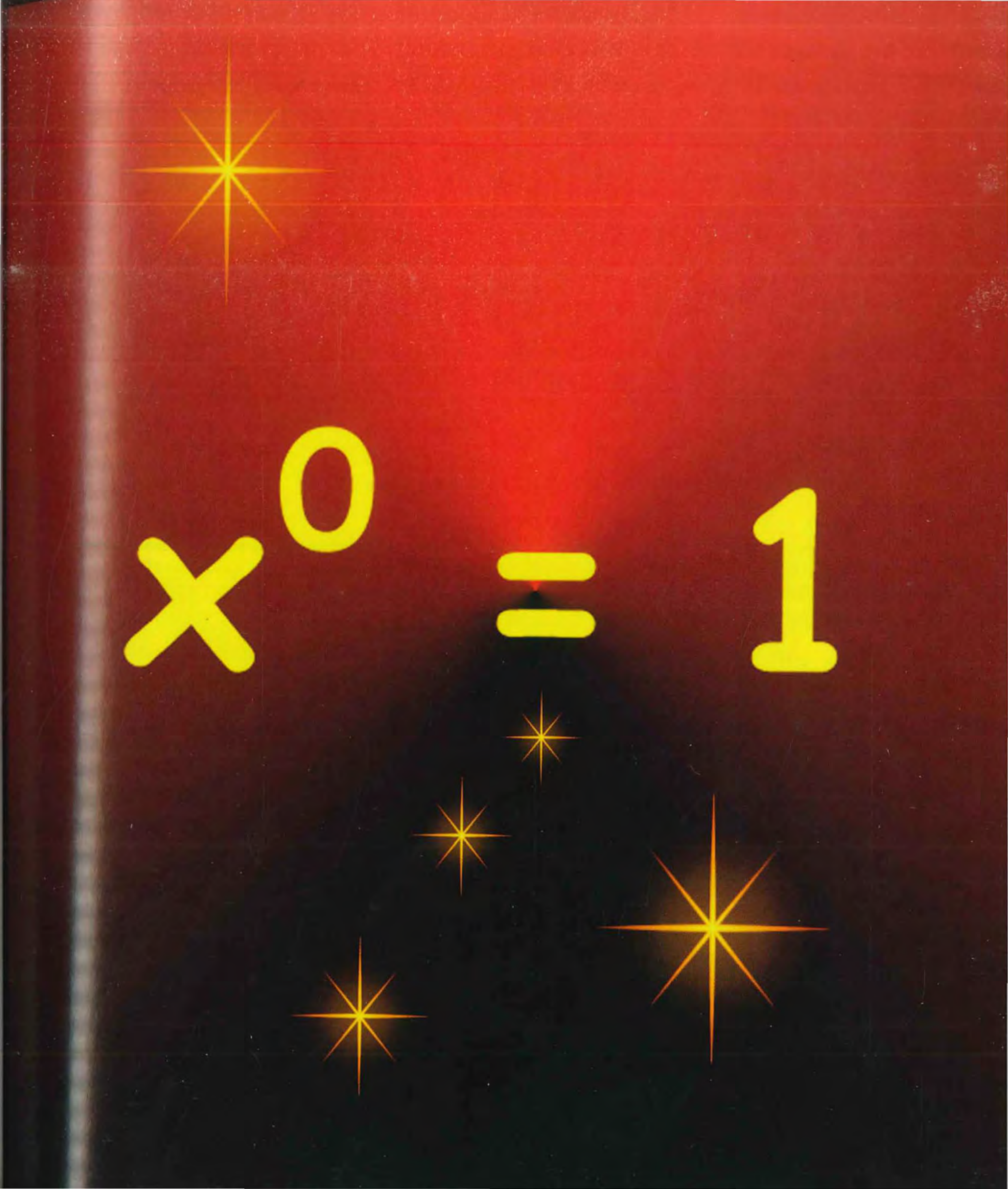
Al-Samawal (también conocido como al-Maghribi) nació en Bagdad en el seno de una familia judía. Comenzó a desarrollar su pasión por las matemáticas a los trece años, cuando empezó sus estudios usando los métodos hindúes de cálculo. Al cumplir dieciocho años ya había leído casi toda la literatura matemática de la época. Al-Samawal escribió su más famoso trabajo, *al-Bahir fil'-jabr* (traducido al inglés como *The Brilliant in Algebra* o *The Dazzling in Algebra* y en castellano conocido como Lo asombroso), cuando contaba tan sólo 19 años de edad. *The Dazzling* es significativo tanto por sus originales ideas como por la información concerniente a los trabajos perdidos de al-Karaji, un matemático persa del siglo X.

The Dazzling se centra en los principios de aritmetización del álgebra; explica el modo en que las cantidades aritméticas desconocidas, o variables, pueden tratarse como si fueran números ordinarios en lo que respecta a operaciones aritméticas. Al-Samawal pasa a definir las potencias, los polinomios y los métodos para encontrar raíces de polinomios. Muchos expertos consideran que *The Dazzling* fue el primer tratado que afirmó que $x^0 = 1$ (según la notación moderna). Es decir, al-Samawal se dio cuenta de que cualquier número elevado a cero da como resultado uno e hizo pública la idea. También se sentía bastante cómodo con el uso de números negativos y del cero, y tuvo en cuenta conceptos del tipo de $0 - a = -a$. (en notación moderna). Además, comprendió el modo de realizar multiplicaciones con números negativos y se sentía orgulloso de su hallazgo $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$, una expresión que, al parecer, no figura en ninguna obra anterior.

En 1163, después de mucho estudio y contemplación, al-Samawal se convirtió del judaísmo al islam. Hubiera dado ese paso antes, pero postergó su decisión porque no quería herir los sentimientos de su padre. Su trabajo *Decisive Refutation of the Christians and Jews* todavía sobrevive.

VÉASE TAMBIÉN La *Arithmetica* de Diofanto (250), Cero (c. 650), El *Álgebra* de al-Khwarizmi (830) y El teorema fundamental del álgebra (1797).

Es probable que The Dazzling *de al-Samawal sea el primer tratado que afirma que* $x^0 = 1$ *(en notación moderna). Es decir, al-Samawal se dio cuenta de que cualquier número elevado a cero da como resultado uno, y publicó la idea.*


$x^0 = 1$

c. 1200

El ábaco

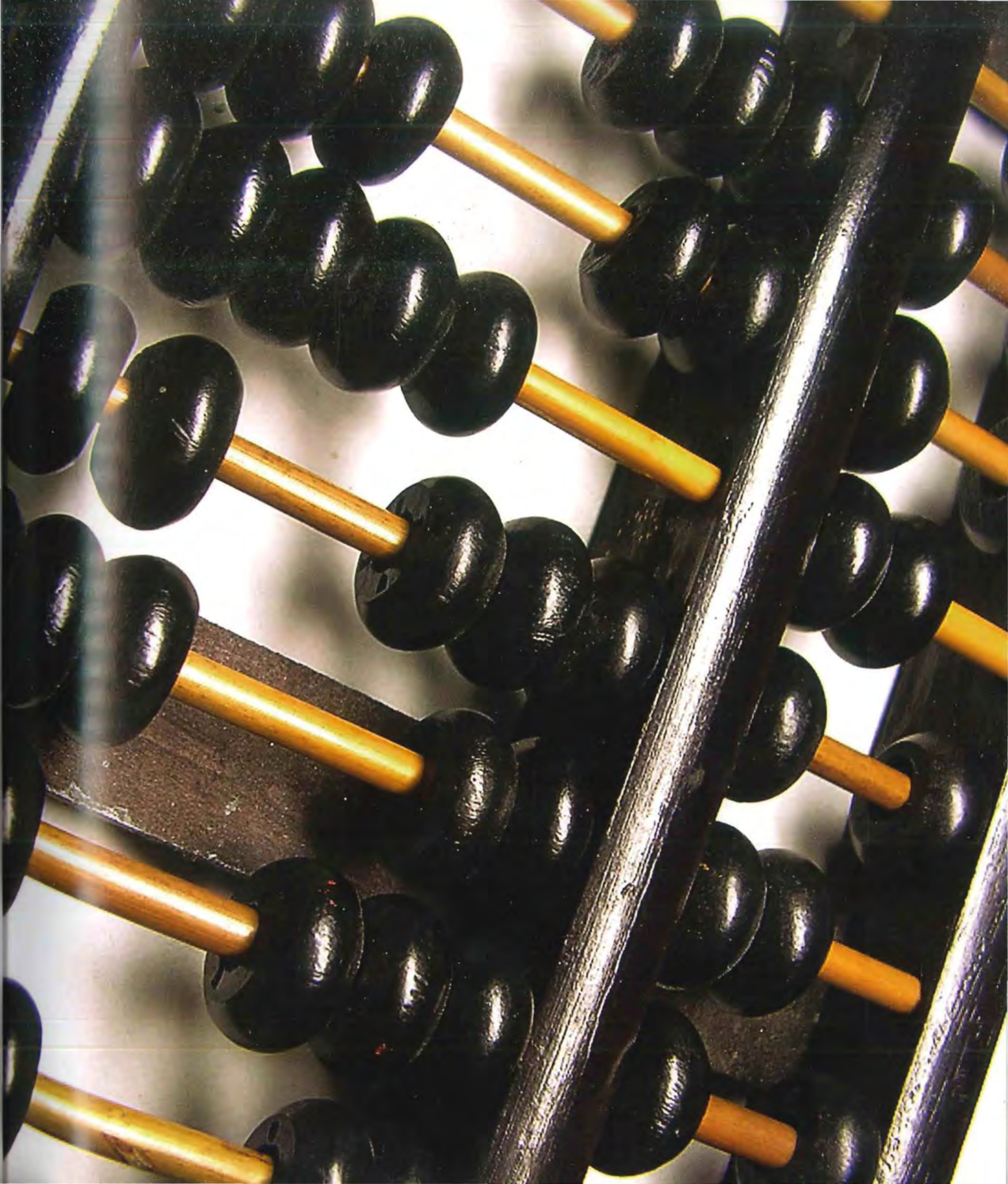
En 2005 los lectores de Forbes.com, los redactores y un conjunto de expertos eligieron el ábaco como la segunda herramienta más importante de todos los tiempos debido a su impacto en las civilizaciones humanas. (El primero y el tercero de la lista fueron el cuchillo y la brújula, respectivamente.)

El ábaco moderno con cuentas y alambres, utilizado para contar, tiene sus raíces en antiguos instrumentos como la tablilla de Salamis, la tabla de cuentas más antigua que conocemos y utilizada por los babilonios alrededor del año 300 a. C. Estas tablas estaban hechas normalmente de madera, metal o piedra, y constaban de líneas o ranuras a lo larg de las cuales se desplazaban cuentas o piedras. Alrededor del año 1000 d. C., los aztecas inventaron el *nepohualtzitzin* (que los entendidos conocen como la «computadora azteca»), un mecanismo parecido al ábaco que se servía de unos granos de maíz situados en unos casilleros de madera que facilitaban la realización de las operaciones.

El ábaco tal como lo conocemos hoy, con cuentas que se desplazan por alambres, ya se utilizaba en China en el año 1200 d. C., donde era conocido como *suan-pan*. En Japón, el ábaco se llama *soroban*. El ábaco puede considerarse, de algún modo, el antepasado del ordenador, ya que se utiliza como una herramienta que permite realizar cálculos rápidos en el comercio y en la ingeniería. Los ábacos todavía se utilizan en China, en Japón, en partes de la Unión Soviética y en África. También los utilizan a veces las personas ciegas, con ligeras variaciones en el diseño. Aunque el ábaco se utiliza generalmente para hacer sumas y restas rápidas, un usuario experimentado puede multiplicar, dividir y calcular raíces cuadradas en unos pocos segundos. En 1946, en Tokio, hubo un concurso de velocidad de cálculo entre un usuario experimentado del *soroban* japonés y una persona que utilizaba una calculadora eléctrica de la época. El *soroban* ganaba casi siempre a la calculadora.

VÉASE TAMBIÉN Quipus (c. 3000 a. C.), Las *Propositiones ad Acuendos Iuvenes* de Alcuino (c. 800), La regla de cálculo (1621), El ordenador mecánico de Babbage (1822) y La calculadora Curta (1948).

El ábaco es uno de las herramientas más importantes de la historia de la humanidad por su impacto en las civilizaciones humanas. Durante siglos, este instrumento se utilizó como una herramienta que permitía realizar cálculos rápidos en comercio e ingeniería.



1202

El *Liber Abaci* de Fibonacci

Leonardo de Pisa (también conocido como Fibonacci, c. 1175–c. 1250)

Carl Boyer se refiere a Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci, como «sin duda alguna, el más original y capacitado de los matemáticos del mundo cristiano medieval». Fibonacci, un rico comerciante italiano, viajó por Egipto, Siria y Berbería (Argelia). En el año 1202 publicó la obra *Liber Abaci (*El libro del ábaco), que introdujo los números indoarábigos y el sistema de numeración decimal en Europa Occidental. En la actualidad este sistema se utiliza en todo el mundo y se ha impuesto a los incomodísimos números romanos que se utilizaban en tiempos de Fibonacci. En el *Liber Abaci*, Fibonacci señala: «Estas son las nueve figuras de los indios: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Con estas nueve figuras, y con este signo 0, que en árabe se llama *zephirum*, se puede representar cualquier número, como demostraremos».

Aunque *Liber Abaci* no fue el primer libro europeo que describió los números indoarábigos —y a pesar de que el sistema de numeración decimal no se extendió por toda Europa directamente después de su publicación— se considera que el libro ejerció una enorme influencia en el pensamiento europeo porque estaba dirigido tanto a académicos como a hombres de negocios.

Liber Abaci introdujo, además, en Europa Occidental la famosa sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13..., conocida como *sucesión de Fibonacci*. Nótese que excepto los dos primeros, cada número es igual a la suma de los dos anteriores. Esta serie aparece en un número asombroso de disciplinas matemáticas, así como en la naturaleza.

¿Es Dios un matemático? Da la impresión de que el universo puede comprenderse bien por medio de las matemáticas. La naturaleza es matemáticas. La disposición de las semillas de un girasol se puede explicar mediante la serie de Fibonacci. Las flores del girasol, y también otras, contienen familias de espirales de semillas entrelazadas (unas giran en el sentido de las agujas del reloj, las otras en sentido contrario). El número de espirales de los girasoles, así como el número de pétalos de las flores, suele coincidir con un número de Fibonacci.

VÉASE TAMBIÉN Cero (c. 650), *La aritmética de Treviso* (1478), La espiral de Fermat (1636) y La ley de Benford (1881).

Las flores del girasol, y también otras, contienen familias de espirales de semillas entrelazadas (unas giran en el sentido de las agujas del reloj, las otras en sentido contrario). El número de espirales de los girasoles, así como el número de pétalos de las flores, suele coincidir con un número de Fibonacci.



1256

Trigo sobre un tablero de ajedrez

Abu-l 'Abbas Ahmad ibn Khallikan (1211–1282), **Dante Alighieri** (1265–1321)

La importancia matemática del problema del tablero de ajedrez de Sissa se debe a que se ha utilizado durante siglos para demostrar la naturaleza de las progresiones geométricas. Además, es una de las primeras menciones al ajedrez en un acertijo. Parece que el erudito árabe Ibn Khallikan fue el primer autor que habló, en 1256, de la historia del gran visir Sissa ben Dahir, al que, según la leyenda, el rey indio Shirham le preguntó qué recompensa quería como premio por haber inventado el juego del ajedrez.

Sissa respondió lo siguiente: «Majestad, sería feliz si usted me concediera un grano de trigo colocado en la primera casilla del tablero de ajedrez, y dos granos de trigo colocados en la segunda casilla, y cuatro granos de trigo colocados en la tercera, y ocho granos de trigo colocados en la cuarta, y así sucesivamente para las sesenta y cuatro casillas».

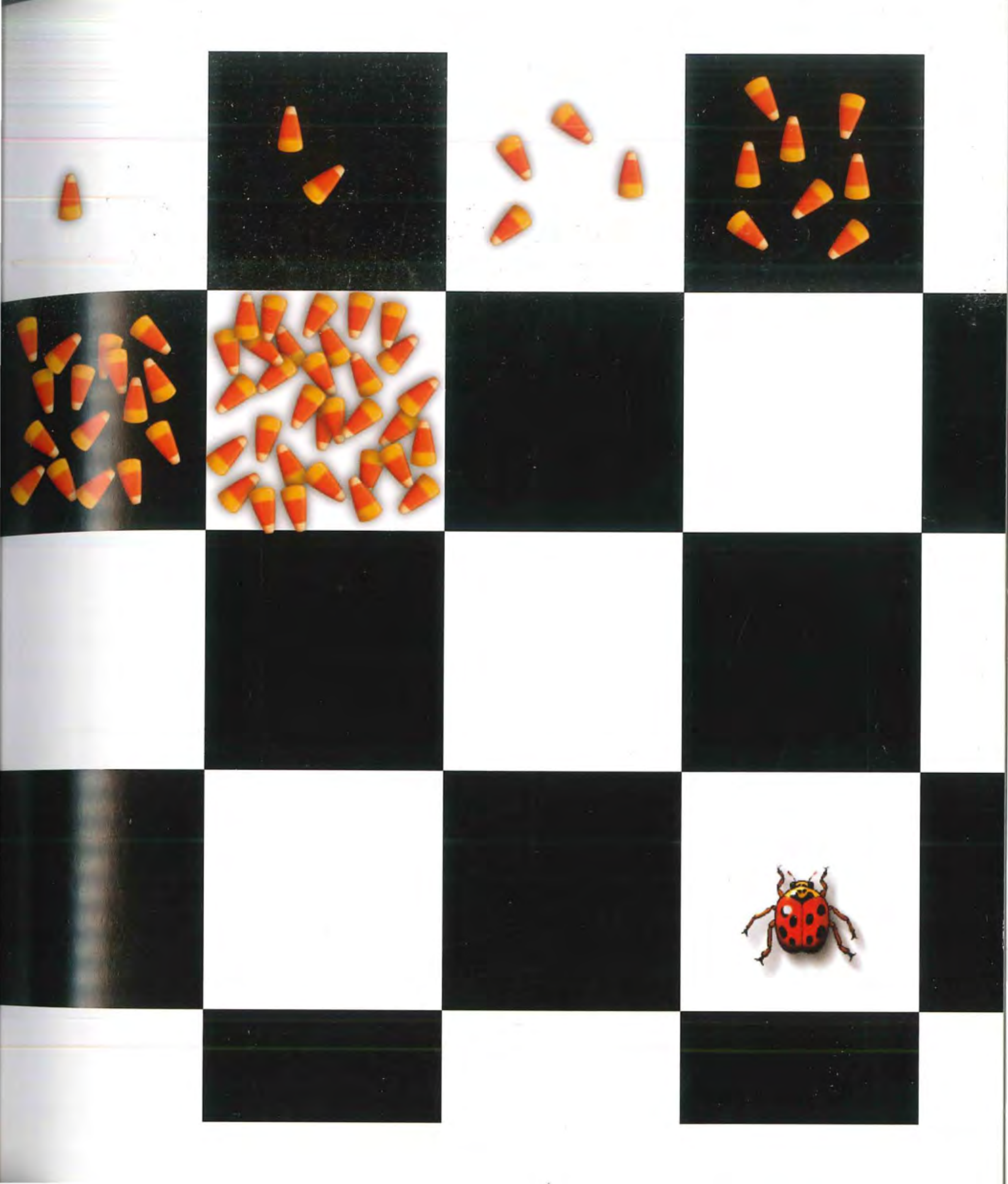
«¿Y eso es todo lo que quieres, Sissa?¿Estás loco?», gritó el rey, asombrado.

El rey no se daba cuenta de la cantidad de trigo a la que ascendía la recompensa de Sissa. Un modo de hallar la solución consiste en calcular la suma de los primeros 64 términos de una progresión geométrica, $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$. El resultado es apabullante: 18.446.744.073.709.551.615 granos de trigo.

Es posible que Dante conociera alguna versión de esta historia, porque en su *Divina Comedia* se refirió a un concepto semejante para describir la abundancia de las luces del Paraíso: «Y tantas eran, que el número de ellas más que el doblar del ajedrez subía». Según Jan Gullberg «si estimamos una cantidad de cien granos por centímetro cúbico, el volumen total del trigo de Sissa sería de casi doscientos kilómetros cúbicos que habría que cargar en dos mil millones de vagones de tren, para lo que sería preciso un tren que diera mil vueltas completas a la Tierra».

VÉASE TAMBIÉN La serie armónica diverge (c. 1350), El acertijo de la cuerda que rodea la Tierra (1702) y el cubo de Rubik (1974).

El famoso problema del tablero de ajedrez de Sissa demuestra la naturaleza de las progresiones geométricas. En la versión reducida que representamos aquí, ¿cuántos dulces conseguirá este escarabajo hambriento si la progresión 1 + 2 + 4 + 8 + 16... continúa?



c. 1350

La serie armónica diverge

Nicole Oresme (1323–1382), **Pietro Mengoli** (1626–1686), **Johann Bernoulli** (1667–1748), **Jacob Bernoulli** (1654–1705)

Si Dios fuera infinito, las *series divergentes* serían sus ángeles, volando cada vez más y más alto para llegar a él. Dada una eternidad, todos esos ángeles se aproximarán a su creador. Consideremos, por ejemplo, la serie infinita siguiente: 1 + 2 + 3 + 4... Si cada año agregamos un término a la serie, la suma después de cuatro años será 10. Si transcurre un número infinito de años, la suma de la serie llega a infinito. Los matemáticos llaman a esas series series divergentes porque, si hay un número infinito de términos, se disparan hacia el infinito. En este capítulo nos fijaremos en una serie que diverge con mucha mayor lentitud. Veremos una serie casi mágica: tal vez sea un ángel con alas menos vigorosas.

Consideremos la serie armónica, el primer ejemplo célebre de una serie divergente cuyos términos van aproximándose a cero: 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 +... Esta serie avanza más lentamente que la del ejemplo anterior, pero aun así termina siendo infinita. De hecho, su crecimiento es tan pausado que, si agregamos un término cada año, después 10^{43} años tendremos una suma total que no llegará a 100. William Dunham señala que «los matemáticos experimentados tienden a olvidarse de lo asombroso que puede resultar este fenómeno para un estudiante, el hecho de que a pesar de agregar términos cada vez más pequeños alcancemos una suma mayor que cualquier cantidad preconcebida».

Nicolas de Oresme, el famoso filósofo francés de la Edad Media, fue el primero en demostrar la divergencia de la serie armónica (c. 1350). Sus resultados se perdieron durante siglos, pero el matemático italiano Pietro Mengoli volvió a encontrar la solución en 1647; el matemático suizo Johann Bernoulli lo logró en 1687. Su hermano Jacob Bernoulli publicó una demostración en su obra de 1689 *Tractatus de Seriebus Infinitis* (Tratado sobre las series infinitas), que termina así: «De modo que el alma de la inmensidad habita en lo diminuto. Y en los límites más estrechos no hay límites inherentes. ¡Qué alegría discernir lo pequeño en la infinidad! ¡Percibir lo enorme en lo diminuto, qué divinidad!».

VÉASE TAMBIÉN Las paradojas de Zenón (c. 445 a. C.), Trigo sobre un tablero de ajedrez (1256), Descubrimiento del desarrollo en serie de π (c. 1500), La constante de Brun (1919) y Circunscripción de polígonos (c. 1940).

Retrato de Nicole Oresme en su Tractatus de origine, natura, jure et mutationibus monetarum (Sobre el origen, la naturaleza, el estatus judicial y las variaciones de invención), *que se publicó alrededor del año 1360.*



Teorema del coseno

Ghiyath al-Din Jamshid Mas'ud al-Kashi (c. 1380–1429), **François Viète** (1540–1603)

El teorema o ley del coseno puede utilizarse para calcular la longitud de un lado de un triángulo cuando se conocen el ángulo opuesto a ese lado y la longitud de los otros dos lados. La ley puede expresarse como $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$, donde a, b y c son las longitudes de los lados del triángulo y C el ángulo que forman los lados a y b. A causa de su generalidad, puede aplicarse a un amplio abanico de cálculos, desde la medición de terrenos hasta la determinación de las trayectorias de vuelo de los aviones.

Nótese que el **teorema de Pitágoras** ($c^2 = a^2 + b^2$) para triángulos rectángulos no es sino un caso particular del teorema del coseno en el que C mide 90° (el coseno de un ángulo recto es cero). Nótese, además, que si se conocen las longitudes de los tres lados de un triángulo es posible utilizar el teorema del coseno para calcular los ángulos.

Los *Elementos* de Euclides (c. 300 a. C.) ya contienen los conceptos que desembocan en el teorema del coseno. En el siglo XV, el astrónomo y matemático persa al-Kashi elaboró tablas trigonométricas muy precisas y expresó el teorema en una forma apropiada para el uso moderno. El matemático francés François Viète descubrió la ley de forma independiente, sin conocer los resultados de al-Kashi.

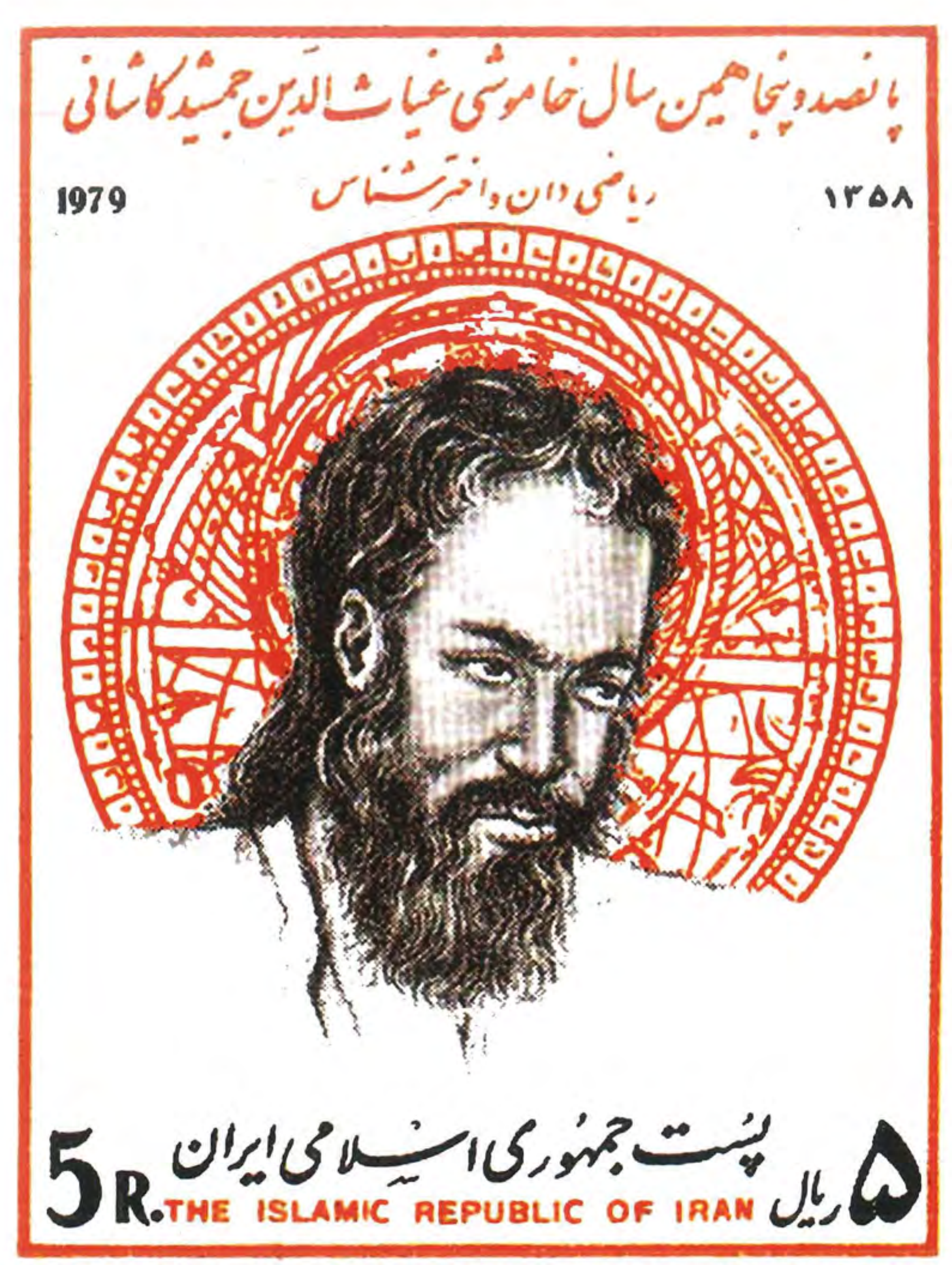
En francés, el teorema del coseno se denomina *Théorème d'Al-Kashi*, en honor a la unificación que hizo al-Kashi de los trabajos existentes al respecto. La obra más importante de al-Kashi es *The Key to Arithmetic*, un libro completado en 1427 que estudia las matemáticas que se utilizan en astronomía, medición, arquitectura y contabilidad. Al-Kashi utiliza fracciones decimales en el cálculo del área total necesaria para ciertas *muqarnas*, estructuras decorativas de la arquitectura islámica y persa.

Viète tuvo una vida fascinante. Logró descifrar los códigos de Felipe II de España para Enrique IV de Francia. Felipe II creía que un simple mortal no podía descifrar sus complejos códigos secretos, y cuando descubrió que los franceses conocían sus planes militares, se quejó al Papa aduciendo que se estaba utilizando magia negra contra España.

VÉASE TAMBIÉN El teorema de Pitágoras y los triángulos (c. 600 a. C.), Los *Elementos de* Euclides (300 a. C.), El *Almagesto* de Ptolomeo (c. 150) y *Polygraphiae Libri Sex* (1518).

Sello iraní emitido en 1979 en honor a al-Kashi. En francés, el teorema del coseno se denomina Théorème D' Al Kashi, *en honor a la unificación que hizo al-Kashi de los trabajos existentes al respecto.*





GHYATH-AL-DIN JAMSHID KASHANI
(14–15) A.C.

1478

La aritmética de Treviso

Los textos aritméticos europeos de los siglos XV y XVI ofrecían con frecuencia problemas matemáticos verbales relacionados con el comercio. El objetivo era enseñar conceptos matemáticos. La idea general de los problemas verbales tiene orígenes muy anteriores, y algunos de los problemas verbales más antiguos que se conocen se plantearon por primera vez en el antiguo Egipto, en China y en la India.

La aritmética de Treviso está repleta de problemas verbales, muchos de los cuales tienen como protagonistas a comerciantes que invierten dinero y que no quieren ser estafados. El libro, escrito en un dialecto veneciano, se publicó en 1478 en la ciudad de Treviso, en Italia. El desconocido autor del libro afirma: «Hay ciertos jóvenes, en quienes tengo puesto mucho interés y que quieren seguir carreras comerciales, que me piden con frecuencia que ponga por escrito los principios fundamentales de la aritmética. De modo que, impulsado por mi afecto hacia ellos, y por el valor de la materia, he emprendido la tarea de satisfacerlos de algún modo con lo mejor de mis humildes facultades». A continuación presenta numerosos problemas verbales protagonizados por comerciantes con nombres como Sebastiano y Jacomo que invierten sus bienes en algún negocio con la intención de ganar dinero. El libro incluye, además, varios métodos de hacer multiplicaciones, así como información acerca de la obra de Fibonacci ***Liber Abaci*** (1202).

La importancia de esta aritmética se debe además al hecho de que es el primer libro de matemáticas impreso que se conoce en Europa. El libro estimula el uso del sistema de numeración decimal y de los algoritmos de cálculo. El comercio de la época comenzó a tener un amplio componente internacional, así que los futuros empresarios necesitaban familiarizarse con urgencia con las matemáticas. La fascinación de los estudiosos actuales por Treviso se debe a que nos permite acceder a los métodos de enseñanza de las matemáticas en la Europa del siglo XV; y también al hecho de que los problemas muestran casos prácticos de cálculo de pagos por bienes, de corte de tejidos, de comercio de azafrán, de aleación de metales en monedas, de cambio de divisas y de repartos proporcionales de ganancias en negocios compartidos; los lectores llegan a percibir las preocupaciones del momento: estafas, usura y cálculo de intereses.

VÉASE TAMBIÉN El papiro de Rhind (c. 1650 a. C.), *Ganita Sara Samgraha* (850), El *Liber Abaci* de Fibonacci (1202) y *Sumario Compendioso* (1556).

Comerciantes pesando sus productos en la plaza del mercado, circa 1400, en una vidriera del siglo XV de la catedral de Chartres, en Francia. Treviso Arithmetic, *el libro impreso de matemáticas más antiguo que se conoce en Europa, incluye problemas protagonizados por comerciantes cuyos temas son la inversión y el comercio.*



c. 1500

Descubrimiento del desarrollo en serie de π

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), **James Gregory** (1638–1675), **Nilakantha Somayaji** (1444–1544)

Las series infinitas, sumas de infinitos números, desempeñan un papel decisivo en las matemáticas. En una serie como 1 + 2 + 3 + ... la suma de todos los términos es infinito: se dice que la serie diverge. Llamamos *serie alterna* a aquella en la que se alternan los términos positivos y negativos. Existe un caso particular de serie alterna que ha intrigado a los matemáticos durante siglos.

Pi, simbolizado por la letra griega π, es la constante que relaciona la longitud de una circunferencia con su diámetro; puede expresarse mediante una fórmula de muy sencilla: $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ...$ Nótese además, que en trigonometría la función arcotangente puede expresarse así: $\operatorname{arctg}(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + ...$ Mediante este desarrollo en serie de potencias del arcotangente, la serie de $\pi/4$ puede obtenerse si se fija $x = 1$.

Ranjan Roy señala que el descubrimiento independiente del desarrollo en serie de π «por personas diferentes que vivían en contextos y culturas distintos nos da una idea del carácter de las matemáticas como disciplina universal». La serie fue descubierta por el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz, por el matemático y astrónomo escocés James Gregory y por un matemático indio de los siglos XIV o XV cuya identidad no conocemos con certeza (aunque suele atribuirse a Nilakantha Somayaji). Leibniz descubrió la fórmula en 1673; Gregory, en 1671. Según Roy, «el descubrimiento del desarrollo en serie de π fue el primer gran logro de Leibniz». El matemático holandés Christiaan Huygens le aseguró a Leibniz que esta notable propiedad de la circunferencia sería celebrada por los matemáticos por siempre. El mismísimo Newton afirmó que la fórmula revelaba el genio de Leibniz.

El descubrimiento de Gregory, concerniente a la fórmula del arcotangente, es anterior al de Leibniz, pero Gregory no tuvo en cuenta el caso particular de la fórmula del arcotangente para $\pi/4$. Esta serie infinita del arcotangente aparece también en un libro de Somayaji del año 1500, Tantrasangraha. Somayaji era consciente de que una serie finita de números racionales no podía expresar π de forma completa.

VÉASE TAMBIÉN π (c. 250 a. C.), Las paradojas de Zenón (c. 445 a. C.), La serie armónica diverge (c. 1350) y La constante de Euler-Mascheroni (1735).

El número π, que puede aproximarse con los dígitos que se muestran en esta ilustración, también puede expresarse mediante una fórmula muy sencilla: $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + ...$

3.14159265358979

2795028841971693

5923078164062862089

706798214808651328230

50582231 725359408 1284811

45028410 270193852 1105559

622948 954930381 9644288109

75 665933446 128475

3378678316 5271201909

145648566 9234603486

1045432664 8213393607

2602491412 7372458700

66063155881 748815209

25409171536 4367892

3054882046652 1384146

4330572703657 5

1932611793105 1

7495673518857

830119491 2

44065

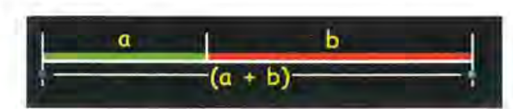
1509

La proporción áurea

Fray Luca Bartolomeo de Pacioli (1445–1517)

En 1509, el matemático italiano Luca Pacioli, amigo íntimo de Leonardo da Vinci, publicó *Divina Proportione*, un tratado acerca del número que en la actualidad conocemos como «proporción áurea». Esta proporción, simbolizada por ø, aparece con una frecuencia asombrosa en matemáticas y en la naturaleza. Podemos comprender la proporción más fácilmente dividiendo un segmento en dos partes de modo que la razón del segmento completo respecto a la parte mayor sea igual a la razón de la parte mayor respecto a la parte menor, es decir $(a + b)/b = b/a = 1{,}61803\ldots$

Si las longitudes de los lados de un rectángulo responden a la proporción áurea, se dice que se trata de un «rectángulo áureo». Cualquier rectángulo áureo puede dividirse en un cuadrado y un nuevo rectángulo áureo. La misma operación puede aplicarse, por supuesto, al nuevo rectángulo así obtenido. Podríamos repetir el proceso de manera indefinida, creando rectángulos áureos cada vez más pequeños.

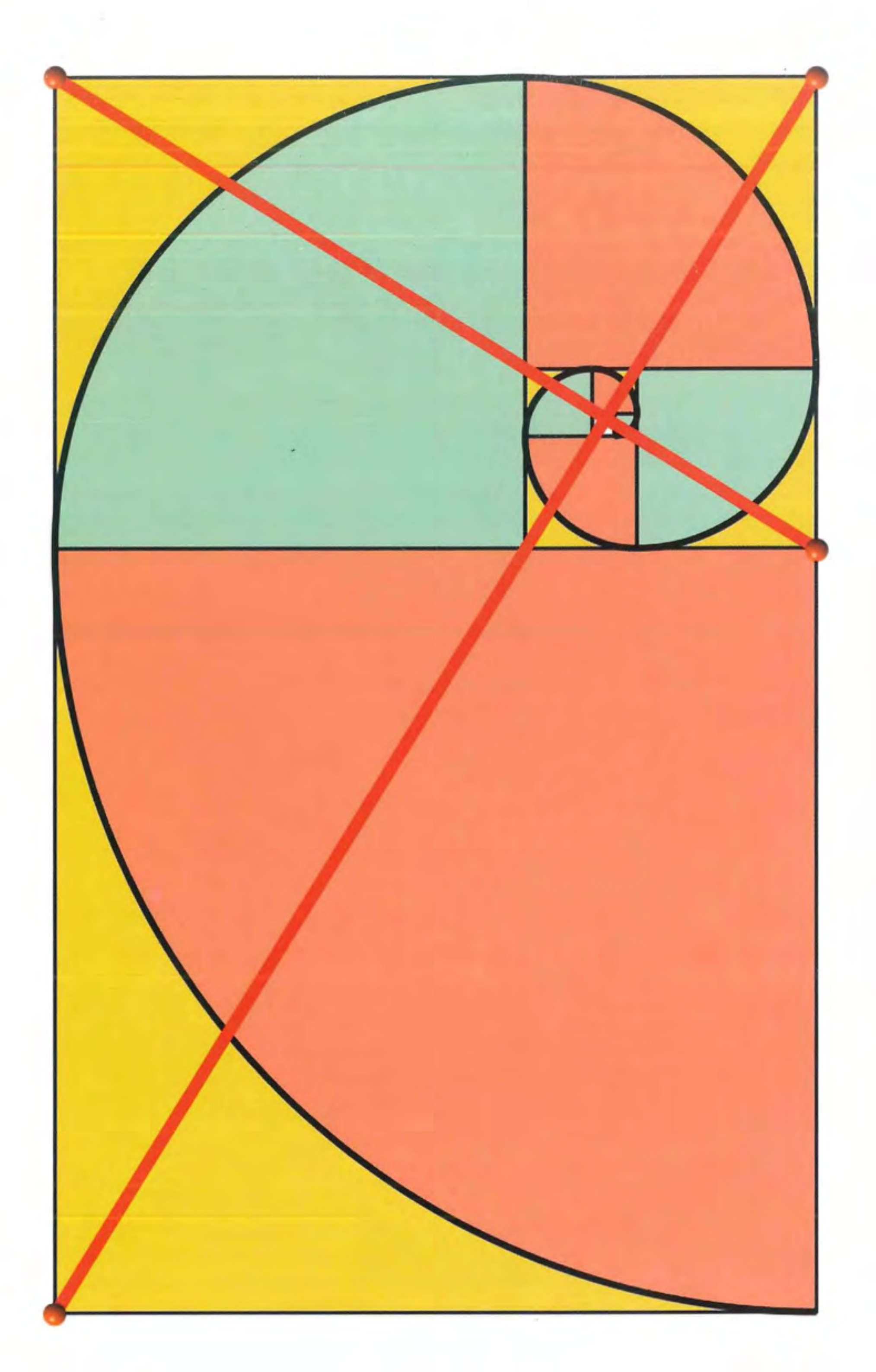


Si, como se ve en la ilustración, trazamos una diagonal desde la esquina superior derecha del rectángulo original hasta la esquina inferior izquierda, y otra desde la esquina inferior derecha del siguiente rectángulo áureo generado hasta la esquina superior izquierda del mismo, el punto de intersección de ambas muestra el punto al que convergen todos los rectángulos áureos sucesivos. Además, las longitudes de las diagonales guardan también la proporción áurea. El punto al que convergen todos los rectángulos áureos se denomina a veces el «ojo de Dios».

El rectángulo áureo es el único del que se puede extraer un cuadrado de modo que el espacio restante sea un rectángulo semejante al original. Si unimos los vértices del diagrama, nos aproximamos a una espiral logarítmica que «envuelve» al ojo de Dios. Las espirales logarítmicas están por todas partes —conchas marinas, cuernos de animales, el caracol del oído interno—, en cualquier lugar en el que la naturaleza tenga la necesidad de ir llenando un espacio de forma económica y regular. Las espirales son sólidas y necesitan muy poca materia. Al expandirse alteran su tamaño, pero no su forma.

VÉASE TAMBIÉN La espiral de Arquímedes (225 a. C.), La espiral de Fermat (1636), La espiral logarítmica (1638) y La cuadratura del rectángulo (1925).

Descripción artística de proporciones áureas. Nótese que las dos diagonales se cruzan en el punto en el que convergen los rectángulos áureos sucesivos.



1518

Polygraphiae Libri Sex

Johannes Trithemius (1462–1516), **Abu Yusuf Yaqub ibn Ishaq al-Sabbah Al-Kindi** (c. 801–c. 873)

En la actualidad, la teoría matemática resulta fundamental para la criptografía. En otras épocas, sin embargo, se utilizaba a menudo la simple sustitución de símbolos en mensajes, limitándose a reemplazar unas letras por otras. Por ejemplo, CAT se convierte en DBU si sustituimos cada letra del alfabeto por la siguiente. Estos códigos tan sencillos eran fáciles de romper tras la aparición del análisis de frecuencias (hallazgo que hizo, por ejemplo, el erudito árabe del siglo IX al-Kindi). Se trata de un método que analiza cuáles son las letras más frecuentes en un idioma —ETAOIN SHRDLU, en el caso del inglés— y utilizan esta información para descifrar códigos de sustitución. Se puede utilizar una estadística más compleja teniendo en cuenta, por ejemplo, combinaciones de pares de letras. En inglés, por ejemplo, la Q aparece casi siempre seguida de la U. Lo mismo ocurre en español.

El primer libro impreso sobre criptografía, *Polygraphiae Libri Sex* (Seis libros de poligrafía), fue escrito por el abad alemán Johannes Trithemius. Se publicó en 1518, después de su muerte. El *Polygraphiae* contiene cientos de columnas de palabras latinas, dispuestas en dos columnas por página. Cada palabra representa una letra del alfabeto. La primera página comienza así:

a: Deus	a: clemens
b: Creator	b: clementissimus
c: Conditor	c: pius

Para codificar un mensaje se utiliza una palabra para sustituir cada letra. Trithemius construyó las tablas de modo que cualquier pasaje codificado parezca una oración con sentido. Por ejemplo, si las primeras dos letras de un mensaje son CA, la oración comenzaría con las palabras *Conditor clemens* (Creador misericordioso), como el comienzo de una oración latina. Los otros libros de que componen *Polygraphiae* presentan métodos más sofisticados, junto a las tablas respectivas, para ocultar información de forma creativa.

Trithemius es autor asimismo de otro trabajo célebre, *Steganographia* (escrito en 1499 y publicado en 1606), que formó parte de la «lista de libros prohibidos» de la Iglesia católica porque parecía un libro acerca de magia negra. En realidad se trataba de otro libro de códigos.

VÉASE TAMBIÉN Teorema del coseno (c. 1427) y Criptografía de clave pública (1977).

Grabado del abad alemán Johannes Trithemius, por André de Thevet (1502–1590). La Polygraphiae *de Trithemius, el primer libro impreso sobre criptografía, proporcionaba una lista de palabras latinas que podían utilizarse para codificar mensajes secretos que, de ser interceptados, parecerían series de oraciones ordinarias.*



1537

La loxodrómica

Pedro Nunes (1502–1578)

En la navegación terrestre, la espiral loxodrómica —también conocida como hélice esférica, loxodrómica, línea de rumbo o de derrota— atraviesa los meridianos de la Tierra en un ángulo constante. La loxodrómica se enrolla como una enorme serpiente alrededor de la Tierra y traza espirales alrededor de los polos sin llegar a tocarlos.

Una forma de surcar la Tierra es trazar el camino más corto entre dos puntos, que sigue el arco de una gran circunferencia que rodea el planeta. Sin embargo, aunque éste es sin duda el camino más corto, un navegante debe hacer ajustes continuos en la trayectoria en función de las lecturas de la brújula, una tarea que resultaba casi imposible para los primeros navegantes.

Sin embargo, la trayectoria loxodrómica permite dirigir el buque siempre al mismo punto de la brújula, aunque la distancia a recorrer hasta el destino sea más largo. Por ejemplo, si se utiliza este método para viajar de Nueva York a Londres, un navegante podría seguir un rumbo constante: 73º al noreste. La loxodrómica se representa como una línea recta en un mapa de proyección de Mercator.

La loxodrómica fue invención del matemático y geógrafo portugués Pedro Nunes. Nunes vivió en una época en la que la Inquisición había instalado el temor en el corazón de Europa. Muchos judíos de España se vieron obligados a convertirse al catolicismo. Nunes se convirtió cuando todavía era un niño. El principal objetivo de la Inquisición española tardía fueron los descendientes de estos conversos, como los nietos de Nunes a comienzos del siglo XVII. Gerardus Mercator (1512–1594), cartógrafo flamenco, fue encarcelado por la Inquisición debido a su fe protestante y a sus muchos viajes y escapó por poco de la ejecución.

Algunos colectivos musulmanes de Norteamérica hacen uso de una loxodrómica como *qibla* para rezar en dirección a la Meca, en vez de utilizar la trayectoria tradicional, más corta. En 2006, la Agencia Espacial Malasia (MYNASA) patrocinó una conferencia para determinar el qibla apropiado para los musulmanes en órbita.

VÉASE TAMBIÉN La espiral de Arquímedes (225 a. C.), La proyección de Mercator (1569), La espiral de Fermat (1636), La espiral logarítmica (1638) y Las teselaciones de Voderberg (1936).

El artista Paul Nylander creó esta atractiva espiral doble aplicando una proyección estereográfica a una curva loxodrómica. (Una proyección estereográfica representa una esfera sobre un plano.)



1545

El *Ars Magna* de Cardano

Gerolamo Cardano (1501–1576), **Niccolo Tartaglia** (1500–1557), **Lodovico Ferrari** (1522–1565)

La fama del matemático, médico, astrólogo y jugador italiano del Renacimiento Gerolamo Cardano se debe sobre todo a un trabajo sobre álgebra titulado *Artis magnae, sive de regulis algebraicis* (Sobre el gran arte, o las reglas del álgebra)—también conocido, de forma más sucinta, como *Ars Magna*. El libro se vendió bien, pero Jan Gullberg señala que «ninguna otra publicación ha promovido tanto interés por el álgebra como el *Ars Magna* de Cardano, que resulta, sin embargo, muy aburrido para un lector actual, ya que dedica muchas páginas de retórica insufrible a cada solución. Con una laboriosidad incansable, Cardano reitera monótonamente la misma solución en una docena de problemas casi idénticos, cuando uno sería suficiente».

No obstante, el impresionante trabajo de Cardano dio soluciones a diversos tipos de ecuaciones cúbicas y de cuarto grado, es decir, a ecuaciones con variables elevadas a la tercera y cuarta potencia respectivamente. Con anterioridad, el matemático italiano Niccolo Tartaglia había revelado a Cardano la solución de la ecuación cúbica, $x^3 + ax = b$. Para asegurarse de que Cardano nunca publicaría la solución, le hizo jurarlo ante Dios. Cardano, a pesar de todo, publicó la solución tras descubrir que Tartaglia no había sido el primero en resolver una ecuación cúbica mediante radicales. La ecuación general de cuarto grado fue resuelta por un discípulo de Cardano, Lodovico Ferrari.

En *Ars magna*, Cardano exploró la existencia de lo que ahora llamamos **números imaginarios**, basados en la raíz cuadrada de -1; sin embargo, no fue capaz de apreciar todas sus propiedades. De hecho, fue el primero en presentar un cálculo con números complejos al escribir: «Sin considerar tormentos mentales, y multiplicando $5 + \sqrt{-15}$ por $5 - \sqrt{-15}$, obtenemos $25 - (-15)$. Por lo tanto, el producto es 40».

En 1570 la Inquisición encerró a Cardano en la cárcel durante varios meses acusado de herejía por elaborar el horóscopo de Jesucristo. Según la leyenda, Cardano predijo la fecha exacta de su propia muerte; se dice que logró que la profecía se cumpliera suicidándose en esa fecha.

VÉASE TAMBIÉN El Tratado de Omar Khayyam (1070), Los números imaginarios (1572) y La teoría de grupos (1832).

El matemático italiano Gerolamo Cardano debe su fama al trabajo de álgebra titulado Artis magnae, sive de regulis algebraicis, *también conocido como* Ars Magna (El gran arte).

HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,

ARTIS MAGNÆ,

SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,

Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod

OPVS PERFECTVM

inſcripſit, eſt in ordine Decimus.



HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neque ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſsimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

1556

Sumario Compendioso

Juan Díez (1480–1549)

El *Sumario compendioso*, publicado en México D.F. en 1556, es el primer trabajo sobre matemáticas impreso en las Américas. La publicación de *Sumario compendioso* en el nuevo mundo es muy anterior a la emigración de los puritanos a Norteamérica y al asentamiento de Jamestown en Virginia. El autor, el hermano Juan Díez, había acompañado a Hernán Cortés en la conquista del imperio azteca.

Díez escribió el libro principalmente para los compradores del oro y la plata de las minas de Perú y México. Además de proporcionar tablas para facilitar a los comerciantes la obtención de valores numéricos sin demasiados cálculos, dedicó parte del trabajo al álgebra relacionada con la ecuación cuadrática, es decir, ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$. Por ejemplo, uno de los problemas puede expresarse así: «Encuentre un cuadrado tal que si se le resta 63/4 el resultado es su propia raíz». Equivale a resolver $x^2 - 63/4 = x$.

El título completo de la obra de Díez es *Sumario compendioso de las quentas de plata y oro que en los reynos del Piru son necessarias a los mercaderes y todo genero de tratantes. Con algunas reglas tocantes al* Arithmetica. La imprenta y el papel fueron trasladado en barco desde España y llevados a México. Sólo se conservan cuatro copias del libro.

Según Shirley Gris y C. Eduardo Sandifer, «En inglés, el primer libro de matemáticas del nuevo mundo no se publicó hasta 1703... De todos los libros coloniales de matemáticas, los escritos en español son los más interesantes, porque en su mayor parte se redactaron en América para que fueran utilizados por quienes allí vivían».

VÉASE TAMBIÉN La *Arithmetica* de Diofanto (250), El *Álgebra* de Al-Khwarizmi (830) y *La aritmética de Treviso* (1478).

El Sumario compendioso *es la primera obra sobre matemáticas impresa en las Américas.*

Sumario cõpẽdioſo delas quẽtas

de plata y oro q̃ en los reynos del Piru ſon neceſſarias a los mercãderes: y todo genero de tratantes. Cõ algunas reglas tocantes al Arithmetica.

Fecho por Juan Diez freyle.



1569

La proyección de Mercator

Gerardus Mercator (1512–1594), **Edward Wright** (c. 1558–1615)

Muchas de las ideas de los antiguos griegos sobre el modo de representar la Tierra esférica sobre un mapa plano se perdieron durante la Edad Media. John Short explica que, en el siglo XV, «el valor de las cartas marinas rivalizó con el del oro como objetivo principal de los bucaneros. Más tarde, los mapas se convirtieron en símbolos de prestigio entre los comerciantes ricos que levantaron vastas fortunas gracias a las prósperas rutas de comercio, posibles gracias a una navegación más segura».

Una de las proyecciones cartográficas más famosas es el mapa de Mercator (1569), que se utilizó habitualmente para los viajes náuticos y que recibe su nombre del cartógrafo flamenco Gerardus Mercator. En palabras de Norman Thrower, «como muchas otras proyecciones, la de Mercator es conforme (reproduce correctamente las formas en torno a un punto), pero posee además una propiedad extraordinaria: las líneas rectas se convierten en **loxodrómicas** (líneas que siguen un rumbo fijo)». Esta última cualidad fue de valor inestimable para los navegantes, que escogían las rutas utilizando brújulas y otros mecanismos para orientarse y dirigir los buques. El uso del mapa de Mercator se extendió en el siglo XVIII tras la invención del cronómetro marino de precisión, un dispositivo para medir el tiempo que permite determinar la longitud geográfica mediante la navegación celeste.

Mercator fue el primer cartógrafo en crear una proyección en la que las líneas de la brújula se cruzan con los meridianos en un ángulo constante, y lo más probable es que se sirviera de métodos gráficos pero de pocas matemáticas. El matemático inglés Edward Right proporcionó un análisis de las fascinantes propiedades del mapa en su obra *Certaine Errors in Navigation* (1599). Para el lector aficionado a las matemáticas, la proyección del mapa de Mercator con coordenadas x e y, puede crearse a partir de los valores φ (latitud) y λ (longitud) del siguiente modo: $x = \lambda - \lambda_0$ y $y = \operatorname{senh}^{-1}(\operatorname{tg}(\varphi)$, donde λ_0 es la longitud del centro del mapa. La proyección de Mercator tiene sus imperfecciones; por ejemplo, exagera el tamaño de las áreas lejos del ecuador.

VÉASE TAMBIÉN La loxódromica (1537), La geometría proyectiva (1639), y El transportador de tres brazos (1801).

El mapa de Mercator se utilizaba comúnmente en la navegación marítima. Sin embargo, el mapa crea distorsiones. Por ejemplo, Groenlandia aparece con un tamaño parecido al de África, aunque África es catorce veces más grande que Groenlandia.



1572

Los números imaginarios

Rafael Bombelli (1526–1572)

Un número imaginario es aquel cuyo cuadrado tiene un valor negativo. El gran matemático Gottfried Leibniz dijo que los números imaginarios eran «un maravilloso vuelo del Espíritu de Dios, casi un anfibio entre el ser y el no ser». Dado que el cuadrado de cualquier número real es positivo, muchos matemáticos afirmaron durante siglos que un número negativo no podía tener raíz cuadrada. Aunque varios matemáticos tuvieran sospechas de la existencia de los números imaginarios, la historia de éstos no comenzó a desarrollarse hasta la Europa de mediados del siglo XVI. El ingeniero italiano Rafael Bombelli, muy conocido en su época por el drenaje de pantanos, debe su fama actual a su *Algebra*, publicada en 1572, que introdujo una notación para $\sqrt{-1}$, que sería una solución válida de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Escribió: «Fue, para muchos, una idea absurda». Muchos matemáticos vacilaron antes de «creer» en los números imaginarios, entre ellos Descartes, que introdujo el término *imaginario* con intención despectiva.

En el siglo XVIII, Leonhard Euler introdujo el símbolo i para $\sqrt{-1}$ —por la primera letra de la palabra latina *imaginarius*, que todavía se utiliza. Los avances clave en la física moderna no habrían sido posibles sin el uso de números imaginarios, que han servido a los físicos en una gran variedad de campos, como por ejemplo la corriente alterna, la teoría de relatividad, el procesamiento de señales, la dinámica de fluidos o la mecánica cuántica. Los números imaginarios desempeñan un papel importante incluso en las obras de arte **fractales**, que muestran la riqueza de un pequeño detalle mediante ampliaciones sucesivas.

De la teoría de cuerdas a la teoría cuántica, cuanto más profundamente se estudia la física, más cerca se está de las matemáticas puras. Hay quien ha llegado a afirmar que las matemáticas «gestionan» la realidad del mismo modo en que el sistema operativo de Microsoft gestiona un ordenador. La ecuación de onda de Schrödinger —que describe la realidad y los acontecimientos básicos a partir de funciones de onda y probabilidades— puede considerarse el sustrato evanescente sobre el que todos existimos, y depende de números imaginarios.

VÉASE TAMBIÉN El *Ars Magna* de Cardano(1545), El Nnúmero de Euler, *e* (1727), Los cuaterniones (1843), La hipótesis de Riemann (1859), *Filosofía y diversión del álgebra*, de Boole (1909) y Los fractales (1975).

Los números imaginarios desempeñan un papel importante incluso en las obras de arte fractales, que muestran la riqueza de un pequeño detalle mediante ampliaciones sucesivas. Los primeros matemáticos sentían tanta desconfianza hacia la utilidad de los números imaginarios que llegaron a insultar a los que propusieron su existencia.



1611

La conjetura de Kepler

Johannes Kepler (1571–1630), **Thomas Callister Hales** (nacido en 1958)

Imagine que su objetivo es llenar una caja con tantas pelotas de golf como sea posible. Cuando termine, cierre bien la tapa. La densidad de pelotas se determina calculando el porcentaje del volumen de la caja ocupado por las pelotas de golf. Si quiere introducir más pelotas en la caja, tendrá que descubrir un modo de aumentar la densidad. Si se limita a echar las pelotas en la caja al azar, sólo logrará una densidad del 65% más o menos. Si forma una primera capa de pelotas en el fondo dispuestas hexagonalmente, y coloca encima otra capa sobre los espacios creados por la capa inferior, y así sucesivamente, podrá lograr una densidad de almacenamiento de $\pi/\sqrt{18}$, que es aproximadamente el 74%.

En 1611 el matemático y astrónomo alemán Johannes Kepler escribió que con ninguna otra disposición se podía lograr una densidad media mayor. En su monografía *The Six-Cornered Snowflake*, conjeturó que es imposible agrupar esferas idénticas en tres dimensiones de un modo más eficiente que el que se consigue en una «red cúbica centrada» (ése es el nombre técnico). En el siglo XIX Karl Friedrich Gauss demostró que la disposición hexagonal tradicional era la más eficiente para una cuadrícula regular en tres dimensiones. No obstante, la conjetura de Kepler seguía allí, y nadie estaba seguro de si podría lograrse más densidad con una disposición *irregular*.

Por fin, en 1998, el matemático norteamericano Thomas Hales asombró al mundo cuando demostró que Kepler estaba en lo cierto. La ecuación de Hales y sus ciento cincuenta variables expresaban cada disposición concebible de cincuenta esferas. Los ordenadores confirmaron que ninguna combinación de variables podía lograr una eficacia de almacenamiento superior al 74%.

La revista *Annals of Mathematics* accedió a publicar la demostración siempre que fuera aceptada por un comité de doce expertos. En 2003, el comité informó que estaban «seguros al 99%» de que la demostración era correcta. Hales estima que harán falta veinte años de trabajo para conseguir una demostración formal completa.

VÉASE TAMBIÉN La geometría de los *sangaku* (c. 1789), El teorema de los cuatro colores (1853) y Los veintitrés problemas de Hilbert (1900).

Fascinados por la famosa conjetura de Kepler, los científicos Paul Chaikin, Salvatore Torquato y otros colegas de la Universidad de Princeton estudiaron el almacenamiento de chocolatinas M&M. Descubrieron que los dulces tenían una densidad de almacenamiento del 68%, apenas un 4% más que las esferas empaquetadas aleatoriamente.



1614

Logaritmos

John Napier (1550–1617)

El matemático escocés John Napier (o Neper) debe su fama a la invención y promoción de los logaritmos en su libro A *Description of the Marvelous Rule of Logarithms* de 1614. Este método ha contribuido desde entonces a innumerables avances científicos y de ingeniería, ya que posibilita la realización de cálculos muy difíciles. Antes de que se generalizaran las calculadoras electrónicas, los logaritmos y las tablas de logaritmos se utilizaban habitualmente en topografía y navegación. Napier inventó también los huesos o barras de Napier, barras talladas con tablas de multiplicar que podían disponerse de distintas maneras para ayudar a realizar determinados cálculos.

El logaritmo en base b de un número x expresado como $\log_b(x)$ es el número y que satisface $x = b^y$. Por ejemplo, dado que $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$, decimos que el logaritmo de 243 en base 3 es 5, o, en la notación correspondiente, $\log_3(243) = 5$. Otro ejemplo: $\log_{10}(100) = 2$. A efectos prácticos, considere que una multiplicación como $8 \times 16 = 128$ pueden rescribirse como $2^3 \times 2^4 = 2^7$, con lo cual los cálculos se reducen a unas simples sumas de los exponentes $(3 + 4 = 7)$. Para multiplicar dos números, antes de que existieran las calculadoras, los ingenieros consultaban los logaritmos de los dos números en una tabla, los sumaban y a continuación buscaban el resultado en la tabla para hallar el producto. Esta operación solía ser más rápida que multiplicar a mano y es el principio en el que se basan las llamadas **reglas de cálculo**.

En la actualidad, hay distintas magnitudes y escalas científicas que se expresan como logaritmos de otras magnitudes. Por ejemplo, la escala química del pH, la unidad de medida acústica (el belio) y la escala de Richter (que se usa para medir la intensidad de un terremoto) utilizan escalas logarítmicas en base 10. El descubrimiento de los logaritmos, justo antes de la era de Isaac Newton, tuvo un impacto científico comparable a la invención del ordenador en el siglo XX.

VÉASE TAMBIÉN La regla de cálculo (1621), La espiral logarítmica (1638) y La fórmula de Stirling (1730).

John Napier, el descubridor de los logaritmos, creó una herramienta de cálculo que conocemos como huesos o barras de Napier. Las barras rotatorias de Napier redujeron la multiplicación a una sucesión de sumas sencillas.



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14
5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17
8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

1621

La regla de cálculo

William Oughtred (1574–1660)

Es posible que algún lector que fuera al colegio antes de los años setenta recuerde que hubo una época en que la regla de cálculo era tan común como la máquina de escribir. En unos pocos segundos, los ingenieros podían multiplicar, dividir, calcular raíces cuadradas y realizar muchas otras operaciones. La versión más antigua, con piezas deslizantes, la inventó en 1621 el matemático y pastor anglicano William Oughtred, basándose en los **logaritmos** del matemático escocés John Napier. Es posible que Oughtred no se diera cuenta en un principio del valor de su trabajo, porque tardó en publicar sus conclusiones. Según algunas fuentes, uno de sus estudiantes robó la idea y publicó un panfleto sobre la regla de cálculo, que ponía énfasis en el hecho de que era tan manejable que «se puede usar tanto a caballo como a pie». A Oughtred le indignó el comportamiento de su alumno.

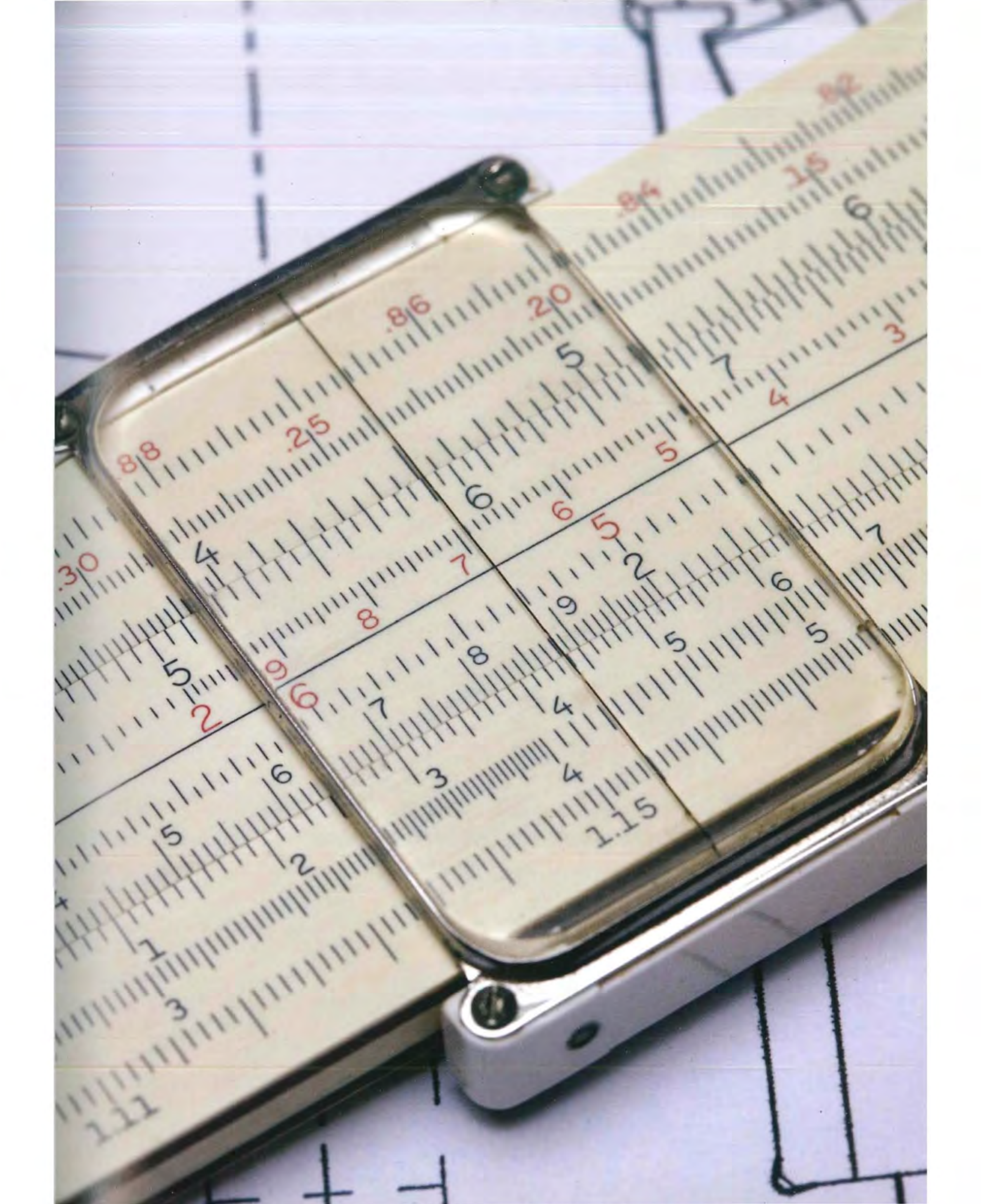
En 1850 un teniente de artillería francés de 19 años modificó el diseño original de la regla de cálculo, y el ejército francés la utilizó para calcular las trayectorias de los proyectiles en su lucha contra los prusianos. Durante la Segunda Guerra Mundial, los bombarderos norteamericanos solían servirse de reglas de cálculo específicas.

Cliff Stoll, el gurú de la regla de cálculo, escribe: «Consideremos los avances que deben su existencia a la simple acción de hacer deslizar dos regletas: el Empire State; la presa Hoover; el Golden Gate; la transmisión hidrodinámica de los automóviles; los transistores; el Boeing 707». Wernher Von Braun, el diseñador del misil alemán V-2, confiaba en las reglas de cálculo que fabricaba la compañía alemana Nestler; lo mismo puede decirse de Albert Einstein. En las misiones espaciales del Apolo había siempre reglas de cálculo Pickett por si fallaban los ordenadores.

En el siglo XX se fabricaron cuarenta millones de reglas de cálculo en todo el mundo. Dado el papel crucial que desempeñó desde la Revolución Industrial hasta tiempos modernos, el invento merece un lugar en este libro. La Oughtred Society afirma que «durante tres siglos y medio se utilizó para realizar cálculos en el diseño de todas las grandes estructuras que se construyeron en el planeta».

VÉASE TAMBIÉN El ábaco (c. 1200), Logaritmos (1614), La calculadora Curta (1948), HP-35: La primera calculadora científica de bolsillo (1972) y Mathematica (1988).

La regla de cálculo desempeñó un papel crucial desde la Revolución Industrial hasta la época moderna. En el siglo XX se fabricaron cuarenta millones de reglas de cálculo, que ayudaron a los ingenieros en incontables aplicaciones.



1636

La espiral de Fermat

Pierre de Fermat (1601–1665), **René Descartes** (1596–1650)

A comienzos del siglo XVII, Pierre de Fermat, un abogado y matemático francés, realizó brillantes descubrimientos en teoría de números y en otras áreas de las matemáticas. Su manuscrito de 1636 *Ad locos planos et solidos Isagoge* (Introducción a los lugares planos y sólidos) superó el trabajo de René Descartes en geometría analítica y permitió a Fermat definir y estudiar muchas curvas importantes, como la cicloide y la espiral de Fermat.

La espiral de Fermat, o espiral parabólica, puede generarse por medio de la ecuación polar $r^2 = a^2\theta$. Aquí, r es la distancia de la curva al origen, a es una constante que determina lo "comprimida" que está la espiral y θ es el ángulo polar. Para cualquier valor positivo de θ, existen valores negativos y positivos de r de modo que nos hallamos ante una curva que es simétrica respecto del origen. Fermat estudió la relación entre el área encerrada por una rama de la espiral y el eje x a medida que la espiral rota.

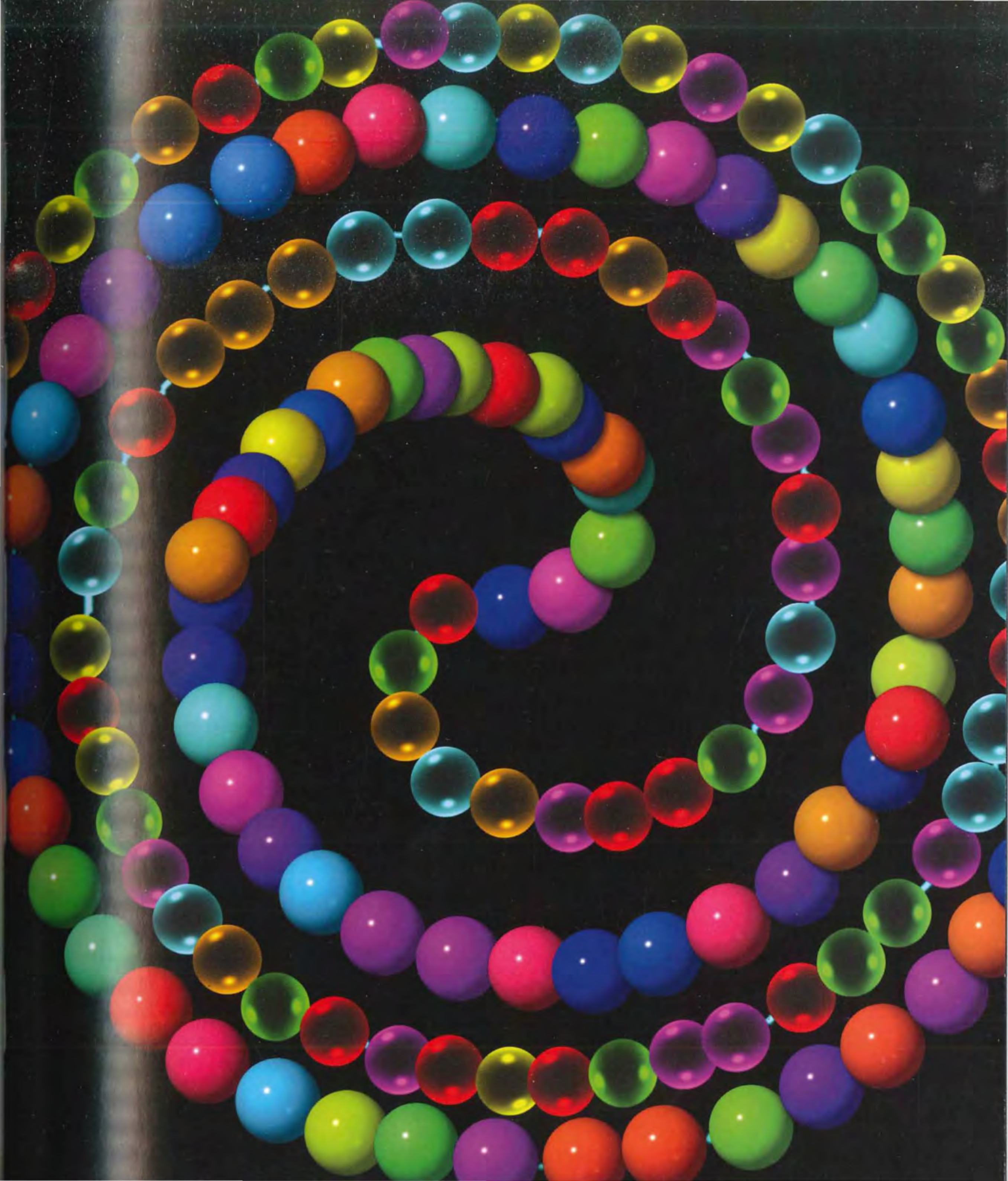
En la actualidad, expertos en gráficos por ordenador utilizan a veces esta curva para simular la disposición de las semillas en las flores. Por ejemplo, podemos dibujar puntos cuyas posiciones estén determinadas por las coordenadas $r(i) = ki^{1/2}$ y $\theta(i) = 2i\pi/\phi$. donde ϕ es el número áureo $(1+\sqrt{5})/2$, e i es simplemente un contador que va avanzando: 1, 2, 3, 4,...

Esta aproximación gráfica produce muchas ramas distintas que giran en una u otra dirección. Es posible trazar varios conjuntos de espirales simétricas, partiendo del centro del modelo, por ejemplo un conjunto de 8, 13 o 21 ramas: estos números son siempre números de Fibonacci (véase el capítulo **El *Liber Abaci* de Fibonacci**).

Según Michael Mahoney, «Fermat llevaba tiempo trabajando con espirales cuando encontró una en el *Dialogue* de Galileo. En una carta del 3 de junio de 1636 le describió a Mersenne la espiral $r^2 = a^2\theta$...».

VÉASE TAMBIÉN La espiral de Arquímedes (225 a. C.), El *Liber Abaci* de Fibonacci (1202), La proporción áurea (1509), La loxodrómica (1537), El último teorema de Fermat (1637), La espiral logarítmica (1638), Las teselaciones de Voderberg (1936), La espiral de Ulam (1963) y Spidrones (1979).

La espiral de Fermat, o espiral parabólica, puede generarse por medio de la ecuación polar $r^2 = a^2\theta$. Para cualquier valor positivo de θ, existen dos valores posibles de r, de modo que nos encontramos con una espiral simétrica respecto del origen (situado en el centro de la versión artística que vemos aquí).



1637

El último teorema de Fermat

Pierre de Fermat (1601–1665), **Andrew John Wiles** (nacido en 1953), **Johann Dirichlet** (1805– 1859), **Gabriel Lamé** (1795–1870)

A comienzos del siglo XVII, Pierre de Fermat, un abogado francés, realizó brillantes descubrimientos en teoría de números. Aunque era un matemático *amateur*, creó desafíos matemáticos como el conocido Último teorema de Fermat (que no fue resuelto hasta 1994 por el matemático anglonorteamericano Andrew Wiles). Wiles dedicó siete años de su vida a tratar de demostrar este famoso teorema que ha engendrado, casi con toda certeza, más intentos de resolución que ningún otro.

El teorema afirma que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras no nulas para x, y y z cuando $n > 2$. Fermat planteó su teorema en 1637. Escribió lo siguiente en su ejemplar de la *Arithmetica* de Diofanto: «Tengo una demostración verdaderamente maravillosa para esta proposición, pero no cabe en este margen tan estrecho». En la actualidad se cree que Fermat nos disponía de tal demostración.

Fermat no era un abogado normal. Se le considera, junto a Blaise Pascal (1623 –1662), el fundador de la teoría de probabilidad. Co-inventor de la geometría analítica junto a René Descartes (1596–1650), y es contemplado como uno de los primeros matemáticos modernos. En cierta ocasión reflexionó sobre si era posible encontrar un triángulo rectángulo cuya hipotenusa y suma de catetos fueran cuadrados perfectos. Hoy sabemos que los tres números más pequeños que satisfacen esas condiciones son bastante grandes: 4.565.486.027.761, 1.061.652.293.520 y 4.687.298.610.289.

Desde el tiempo de Fermat, su teorema ha dado lugar a numerosas investigaciones matemáticas significativas y procedimientos completamente nuevos. En 1832 Johann Dirichlet publicó una demostración del último teorema de Fermat para $n = 14$. Gabriel Lamé lo demostró para $n = 7$ en 1839. Amir Aczel afirma que el teorema «se convirtió en el misterio matemático más desconcertante. Sencillo, elegante, imposible de demostrar (al menos en apariencia), el último teorema de Fermat cautivó la imaginación de matemáticos aficionados y profesionales durante más de tres siglos. Se convirtió, para algunos, en una maravillosa pasión. Para otros, en una obsesión que los llevó al engaño, a la intriga o a la locura».

VÉASE TAMBIÉN El teorema de Pitágoras y los triángulos (c. 600 a. C.), La *Arithmetica* de Diofanto (250), La espiral de Fermat (1636), La geometría de Descartes (1637), El triángulo de Pascal (1654) y La conjetura de Catalan (1844).

Pierre de Fermat según el pintor francés Robert Lefèvre (1756–1831).



1637

La geometría de Descartes

René Descartes (1596–1650)

En 1637 el filósofo y matemático francés René Descartes publicó *La Géométrie*, que muestra el modo de analizar formas y figuras geométricas por medio del álgebra. La obra de Descartes influyó en la evolución de la geometría analítica, un campo de las matemáticas que implica la representación de posiciones en un sistema de coordenadas y en el que los matemáticos analizan algebraicamente tales posiciones. *La Géométrie* muestra, además, cómo resolver problemas matemáticos, y estudia la representación de puntos de un plano mediante el uso de números reales, así como la representación y clasificación de curvas por medio de ecuaciones.

La Géométrie, por raro que pueda parecer, no utiliza coordenadas «cartesianas», ni ningún otro sistema de coordenadas. El libro presta tanta atención a representar el álgebra con formas geométricas como al contrario. Descartes creía que, en general, los pasos algebraicos de una demostración debían corresponderse con una representación geométrica.

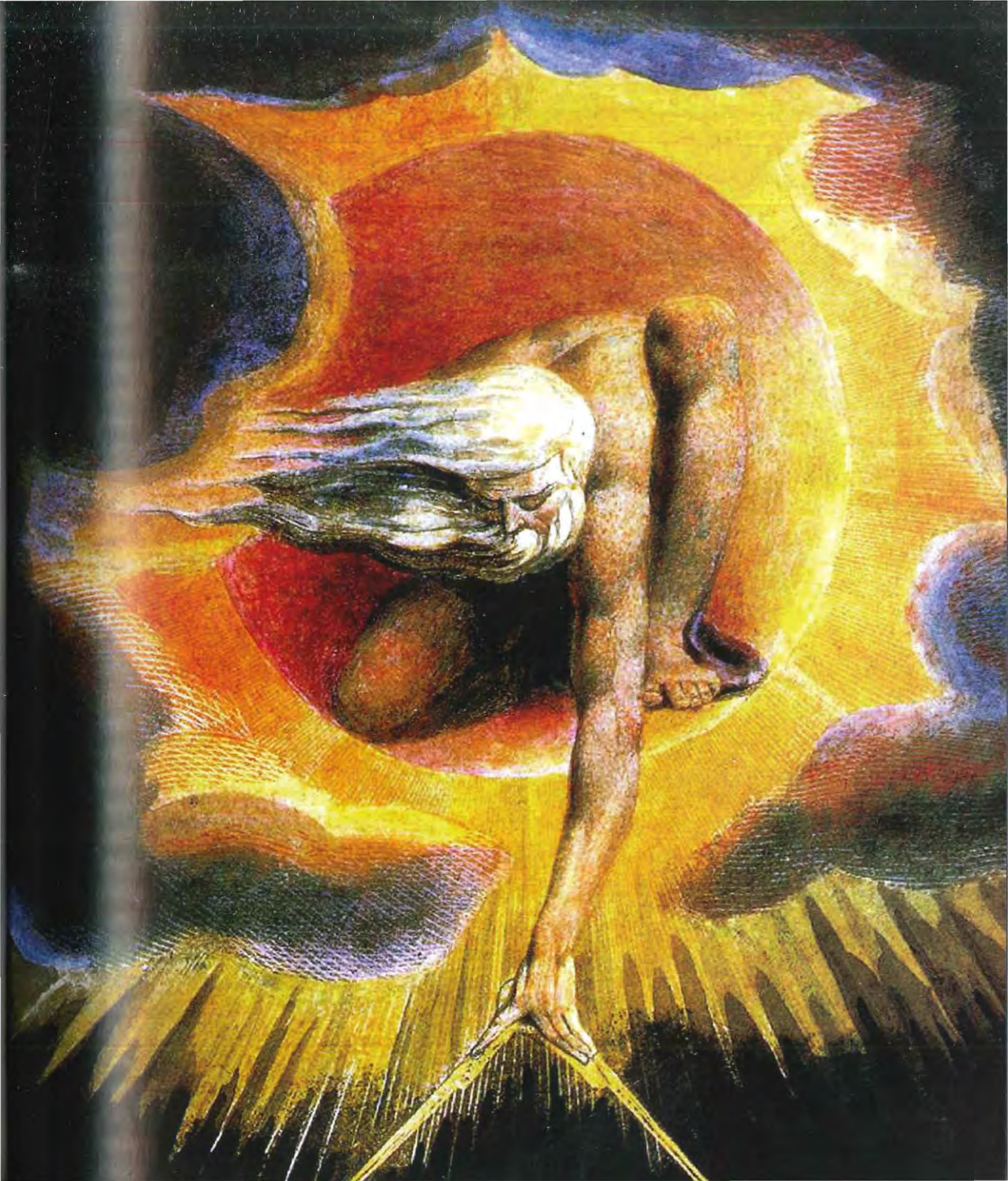
Según Jan Gullberg, «*La Géométrie* es el primer texto matemático que un estudiante actual de matemáticas podría leer sin tropezar con un montón de notaciones obsoletas... Es, junto a los *Principia* de Newton, uno de los textos científicos más influyentes del siglo XVII». Según Carl Boyer, Descartes quería «liberar a la geometría» del uso de diagramas a través de procedimientos algebraicos y dar sentido a las operaciones del álgebra por medio de una interpretación geométrica.

La propuesta de Descartes de unificar álgebra y geometría puede considerarse revolucionaria. Judith Grabiner afirma que, «así como la historia de la filosofía occidental se ha interpretado como una serie de notas a pie de página referentes a Platón, los últimos 350 años de la historia de las matemáticas pueden verse como una serie de notas a pie de página referentes a *La Géométrie* de Descartes... y como el triunfo de los métodos de resolución de problemas de Descartes».

Boyer concluye: «Si hablamos de capacidad matemática, Descartes fue probablemente el pensador más hábil de su época, pero en su fuero interno no era realmente un matemático». Su geometría fue sólo una faceta más de una vida plena que giró alrededor de la ciencia, la filosofía y la religión.

VÉASE TAMBIÉN El teorema de Pitágoras y los triángulos (c. 600 a. C.), La cuadratura de la lúnula (c. 440 a. C.), Los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), El teorema del hexágono de Pappus (c. 340), La geometría proyectiva (1639) y Los fractales (1975).

El anciano de los días *(1794), aguafuerte y acuarela de William Blake. Los eruditos medievales europeos solían relacionar la geometría y las leyes de la naturaleza con lo divino. A lo largo de los siglos, el foco de la geometría se desplazó de las construcciones con regla y compás a una aproximación más abstracta y analítica.*



1637

La cardioide

Albrecht Dürer (1471–1528), **Étienne Pascal** (1588–1640), **Ole Rømer** (1644–1710), **Philippe de La Hire** (1640–1718), **Johann Castillon** (1704–1791)

La cardioide, con su forma de corazón, ha fascinado durante siglos a los matemáticos debido a sus propiedades matemáticas, a su belleza gráfica y a sus aplicaciones prácticas. La curva puede generarse de forma muy simple, sin más que seguir un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar en torno a otra circunferencia fija y del mismo radio. El nombre deriva de la palabra griega que significa corazón, y su ecuación polar puede escribirse como $r = a(1 - \cos\theta)$. El área de la cardioide es $(3/2)\pi a^2$, y su perímetro, $8a$.

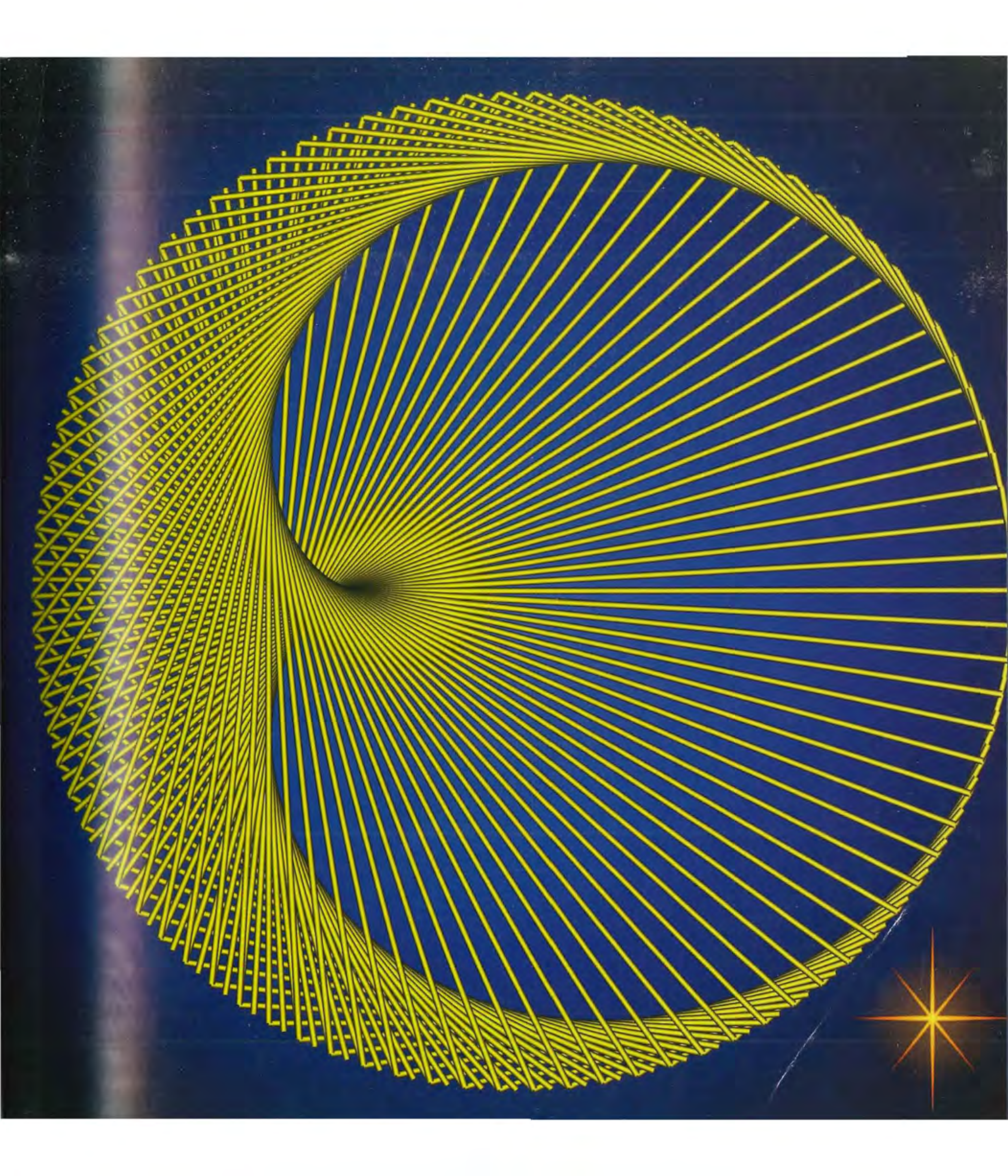
La cardioide también puede generarse dibujando una circunferencia C y fijando sobre ella un punto P. A continuación se dibuja una serie de circunferencias con centro en la circunferencia C y que pasen por P. Estas circunferencias trazan la forma de una cardioide. La cardioide aparece en una gran variedad de áreas de las matemáticas que en apariencia no tienen mucho en común, desde las curvas cáusticas de la óptica hasta la forma central del **conjunto de Mandelbrot** en la geometría *fractal*.

Muchas fechas pueden asociarse con la cardioide. Hacia 1637, el abogado (y matemático *amateur*) francés Etienne Pascal, padre de Blaise Pascal, estudió formalmente el caso más general de la curva, conocido también como «Limaçon de Pascal». Antes, el pintor y matemático alemán Albrecht Dürer (conocido en español como Alberto Durero) había proporcionado un método para dibujar la Limaçon en su obra *Underweysung der Messung* (Enseñanzas sobre la medida), publicada en 1525. En 1674, el astrónomo danés Ole Rømer prestó atención a la cardioide como parte de su búsqueda de formas eficientes para ruedas dentadas. El matemático francés Philippe de la Hire halló su longitud en 1708. La cardioide no recibió su evocador nombre hasta 1741, cuando Johann Castillon la llamó así en su tratado sobre las *Philosophical Transactions of the Royal Society* de Londres.

Glen Vecchione explica el lado práctico de las cardioides cuando escribe que pueden mostrar «las pautas de interferencia y congruencia de ondas que irradian concéntricamente de una fuente puntual. Gracias a esta propiedad podemos identificar las áreas de mayor sensibilidad de micrófonos y antenas. Un micrófono cardioide es sensible al sonido frontal y minimiza los sonidos procedentes de la zona posterior».

VÉASE TAMBIÉN La cisoide de Diocles (c. 180 a. C.), La longitud de la parábola semicúbica de Neile (1657), La astroide (1674), Los fractales (1975) y El conjunto de Mandelbrot (1980).

La cardioide trazada con un segmento que conecta dos puntos de una circunferencia; el extremo frontal del segmento duplica la velocidad del extremo posterior al dar la vuelta a la circunferencia. (Interpretación de Jos Leys.)



1638

La espiral logarítmica

René Descartes (1596–1650), **Jacob Bernoulli** (1654–1705)

En la naturaleza, las espirales logarítmicas aparecen por todas partes, en un amplio abanico de manifestaciones botánicas y zoológicas. Los ejemplos más comunes son las espirales logarítmicas de las conchas de los nautilos y otros animales marinos, los cuernos de distintos mamíferos, la disposición de las semillas de muchas plantas (como el girasol y la margarita) y las escamas de las piñas. Martin Gardner señaló que la epeira, una variedad común de araña, forma una telaraña en la que el hilo se enrolla alrededor del centro formando una espiral logarítmica

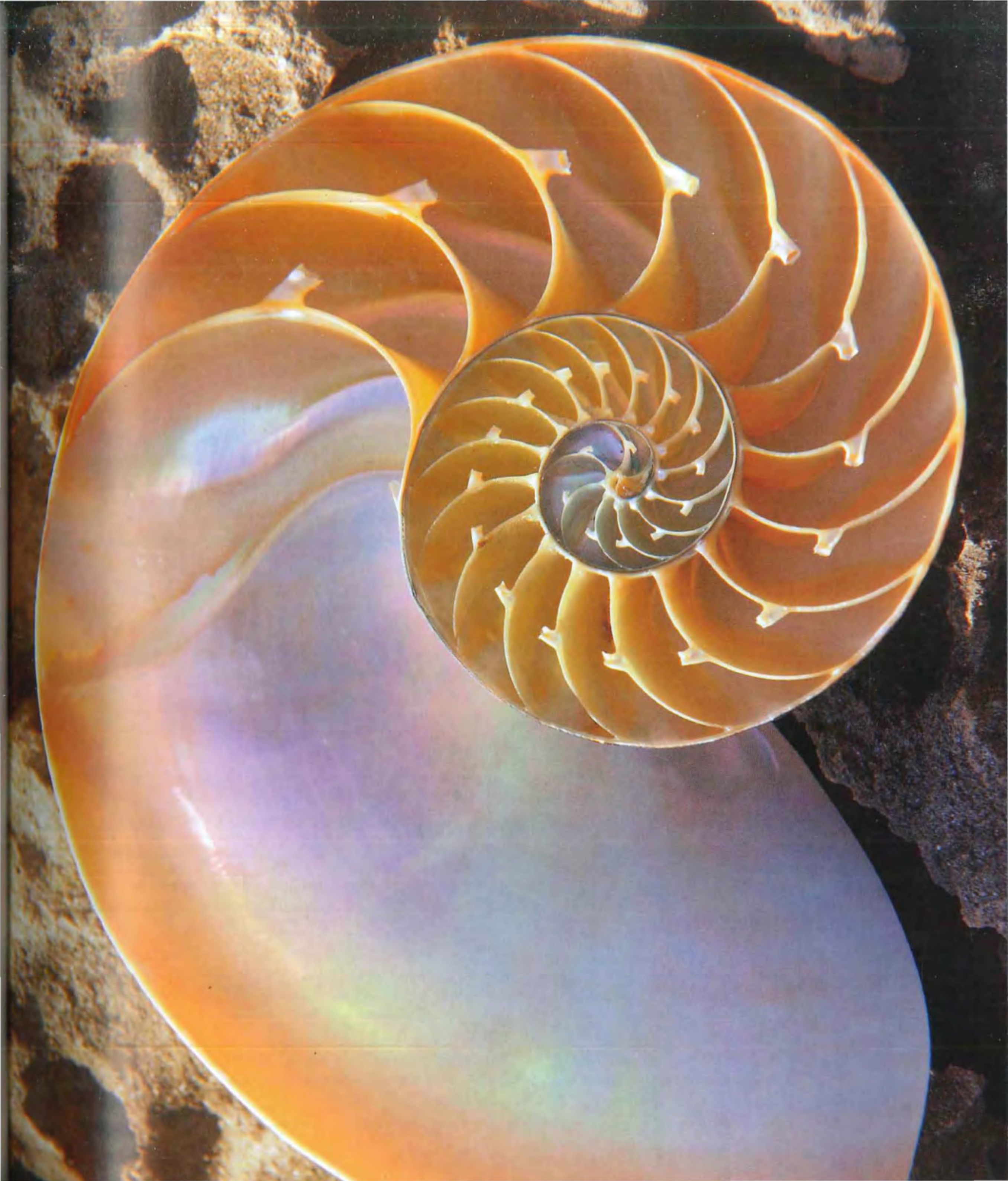
La espiral logarítmica (también conocida como espiral equiangular o espiral de Bernoulli) puede expresarse como $r = ke^{a\theta}$, donde r es la distancia al origen. El ángulo formado por una recta tangente a la curva y una recta radial trazada al punto de tangencia es constante. El primero que escribió acerca de esta espiral fue el matemático y filósofo francés René Descartes, en las cartas que envió al teólogo y matemático francés Marin Mersenne en 1638. Más tarde, la espiral fue examinada con más detalle por el matemático suizo Jacob Bernoulli.

La versión más impresionante de la espiral logarítmica puede verse en las inmensas ramas espirales de muchas galaxias; la interpretación tradicional dice que se necesita una interacción de largo alcance, como la fuerza gravitatoria, para crear una ordenación tan extensa. En las galaxias espirales, las ramas en forma de espiral son lugares de gran actividad de formación de estrellas.

Las espirales aparecen a menudo de forma espontánea en la materia sometida a transformaciones simétricas: cambio de tamaño (crecimiento) y rotación. La forma depende de la función, y la forma espiral permite que se compacten longitudes relativamente largas. Los tubos largos y compactos al mismo tiempo resultan útiles a moluscos y cócleas por razones obvias, entre ellas la solidez y el incremento de la superficie. Cuando un miembro de una especie se desarrolla hasta alcanzar la madurez, suele transformarse de modo que sus partes mantengan entre ellas la misma proporción aproximada; ésta es, probablemente, una de las razones por las que la naturaleza elige con tanta frecuencia los crecimientos en espiral.

VÉASE TAMBIÉN La espiral de Arquímedes (225 a. C.), La proporción áurea (1614), La loxodrómica (1537), Logaritmos (1614), La espiral de Fermat (1637), La longitud de la parábola semicúbica de Neile (1657), Las teselaciones de Voderberg (1936), La espiral de Ulam (1963) y Spidrones (1979).

La concha del nautilo tiene la forma de una espiral logarítmica. La concha está dividida internamente en cámaras cuyo número puede superar la treintena en criaturas adultas.



1639

La geometría proyectiva

Leon Battista Alberti (1404–1472), **Gérard Desargues** (1591–1661), **Jean-Victor Poncelet** (1788–1867)

La geometría proyectiva suele ocuparse de las relaciones entre las formas y las representaciones o «imágenes» que resultan de proyectar dichas formas sobre una superficie. Las proyecciones pueden interpretarse como las sombras de los objetos.

El arquitecto italiano Leon Battista Alberti fue uno de los primeros que experimentó con la geometría proyectiva, debido a su interés por la perspectiva en el arte. Los artistas y arquitectos del Renacimiento se preocuparon en general por los métodos de representación bidimensional de objetos tridimensionales. Alberti colocaba una pantalla de vidrio entre él y el paisaje, cerraba un ojo y marcaba sobre el vidrio algunos puntos que iban formando la imagen. El dibujo bidimensional resultante lograba una impresión fiel de la escena en tres dimensiones.

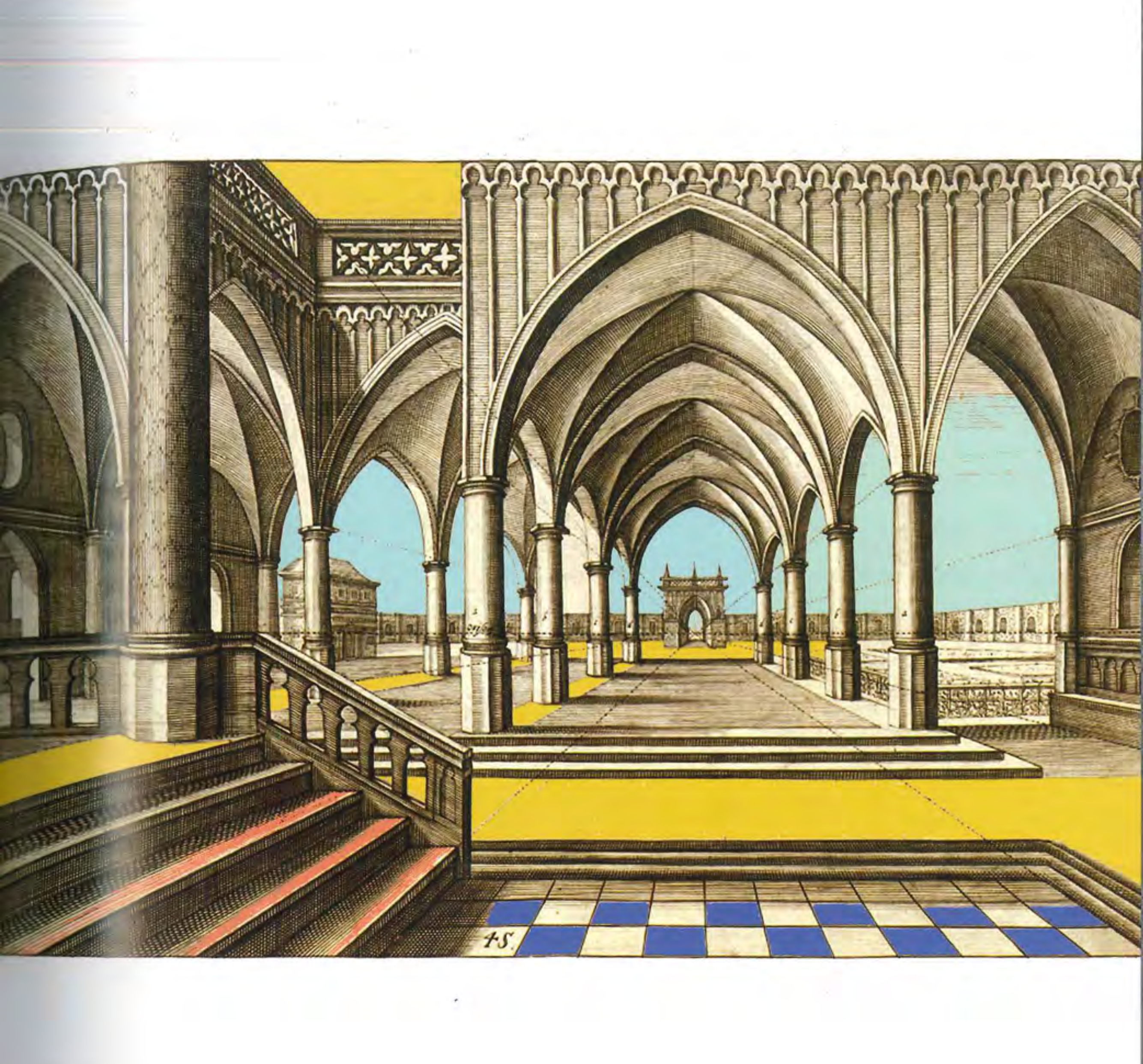
El matemático francés Gérard Desargues fue el primer matemático profesional que formalizó la geometría proyectiva mientras buscaba modos de extender la geometría euclídea. En 1636 Desargues publicó *Exemple de l'une des manières universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective* (Ejemplo de un método universal de Sieur Girard Desargues Lyonnais respecto a la práctica de la perspectiva), donde presentaba un método geométrico para construir imágenes de objetos en perspectiva. Desargues examinó además las propiedades de las figuras que conservaban su forma tras establecer la perspectiva. Pintores y grabadores se sirvieron de estos hallazgos.

La obra más importante de Desargues, *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cône avec un plan* (Borrador de un intento de hallar el resultado de la intersección de un cono y un plano), publicado en 1639, aborda la teoría de las secciones cónicas por medio de la geometría proyectiva. En 1882 el ingeniero y matemático francés Jean-Victor Poncelet (1788–1867) publicó un tratado que revitalizó el interés por la geometría proyectiva.

En la geometría proyectiva, los elementos (por ejemplo, los puntos, las rectas y los planos) suelen conservar su categoría de puntos, rectas o planos. Sin embargo, las longitudes, las relaciones entre longitudes y los ángulos pueden cambiar bajo la proyección. En geometría proyectiva, las rectas paralelas de la geometría euclídea se cruzan en el infinito al proyectarse.

VÉASE TAMBIÉN El teorema del hexágono de Pappus (c. 340), La proyección de Mercator (1569) y La geometría de Descartes (1637).

Dibujo de Jan Vredeman de Vries (1527–c. 1607), ingeniero y arquitecto holandés del Renacimiento que experimentó en su obra con los principios de la perspectiva. La geometría proyectiva se desarrolló a partir de los principios de la perspectiva artística establecidos durante el Renacimiento europeo.


45.

1641

La trompeta de Torricelli

Evangelista Torricelli (1608–1647)

Un amigo le entrega un bote de pintura roja y le pregunta si sería capaz de pintar por completo una superficie infinita con este único bote. ¿Qué superficie debería escoger? Existen muchas respuestas posibles a esta pregunta, pero la trompeta de Torricelli es una conocida forma geométrica a tener en cuenta; se trata de un objeto con aspecto de trompeta que se genera girando la función $f(x) = 1/x$ con $x \in [1, \infty)$ alrededor del eje x. Los métodos tradicionales de cálculo pueden demostrar que la trompeta de Torricelli tiene un volumen finito y un área infinita.

John dePillis explica que, desde un punto de vista matemático, si se introduce pintura roja en la trompeta de Torricelli se puede llenar el embudo, de modo que la infinita superficie interior se pintaría por completo a pesar de disponer de un número finito de moléculas de pintura. Esta aparente paradoja puede resolverse, al menos en parte, si se recuerda que la trompeta de Torricelli es en realidad una construcción matemática; ese número finito de moléculas de pintura que «llena» la trompeta es una aproximación a su auténtico volumen finito.

¿Para qué valores de a se cumple que $f(x) = 1/x^a$ genera una trompeta de volumen finito y área infinita? Es algo que el lector puede discutir con sus amigos matemáticos.

La trompeta de Torricelli, que en ocasiones se conoce como cuerno de Gabriel, debe su nombre al físico y matemático italiano Evangelista Torricelli, que la descubrió en 1641. Este sólido infinitamente largo de superficie infinita y volumen finito le dejó perplejo. Torricelli y sus colegas pensaron que se trataba de una profunda paradoja; por desgracia, no disponían de los instrumentos de cálculo necesarios para apreciar y comprender el objeto completamente. En la actualidad se recuerda a Torricelli por la astronomía telescópica que hizo con Galileo y por la invención del barómetro. El nombre de «cuerno de Gabriel» sugiere la imagen del Arcángel Gabriel haciendo sonar su cuerno para anunciar el día del Juicio Final, asociando así el infinito con los poderes de Dios.

VÉASE TAMBIÉN El descubrimiento del cálculo (c. 1665), Superficie mínima (1774), La pseudoesfera de Beltrami (1868) y Los números transfinitos de Cantor (1874).

La trompeta de Torricelli encierra un volumen finito, pero tiene un área infinita. Esta forma recibe en ocasiones el nombre de cuerno de Gabriel, que remite al Arcángel Gabriel haciendo sonar su cuerno para anunciar el día del Juicio Final. (Interpretación de Jos Leys rotada 180°.)



1654

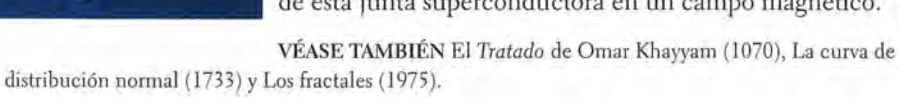
El triángulo de Pascal

Blaise Pascal (1623–1662), **Omar Khayyam** (1048–1131)

Una de las disposiciones de números enteros más famosas es el triángulo de Pascal. Blaise Pascal fue el primero en escribir un tratado acerca de esta progresión, en 1654, aunque el poeta y matemático persa Omar Khayyam ya la conocía en el año 1100, e incluso antes los matemáticos de la India y de la antigua China. En el ángulo superior derecho podemos ver las primeras siete filas del triángulo de Pascal.

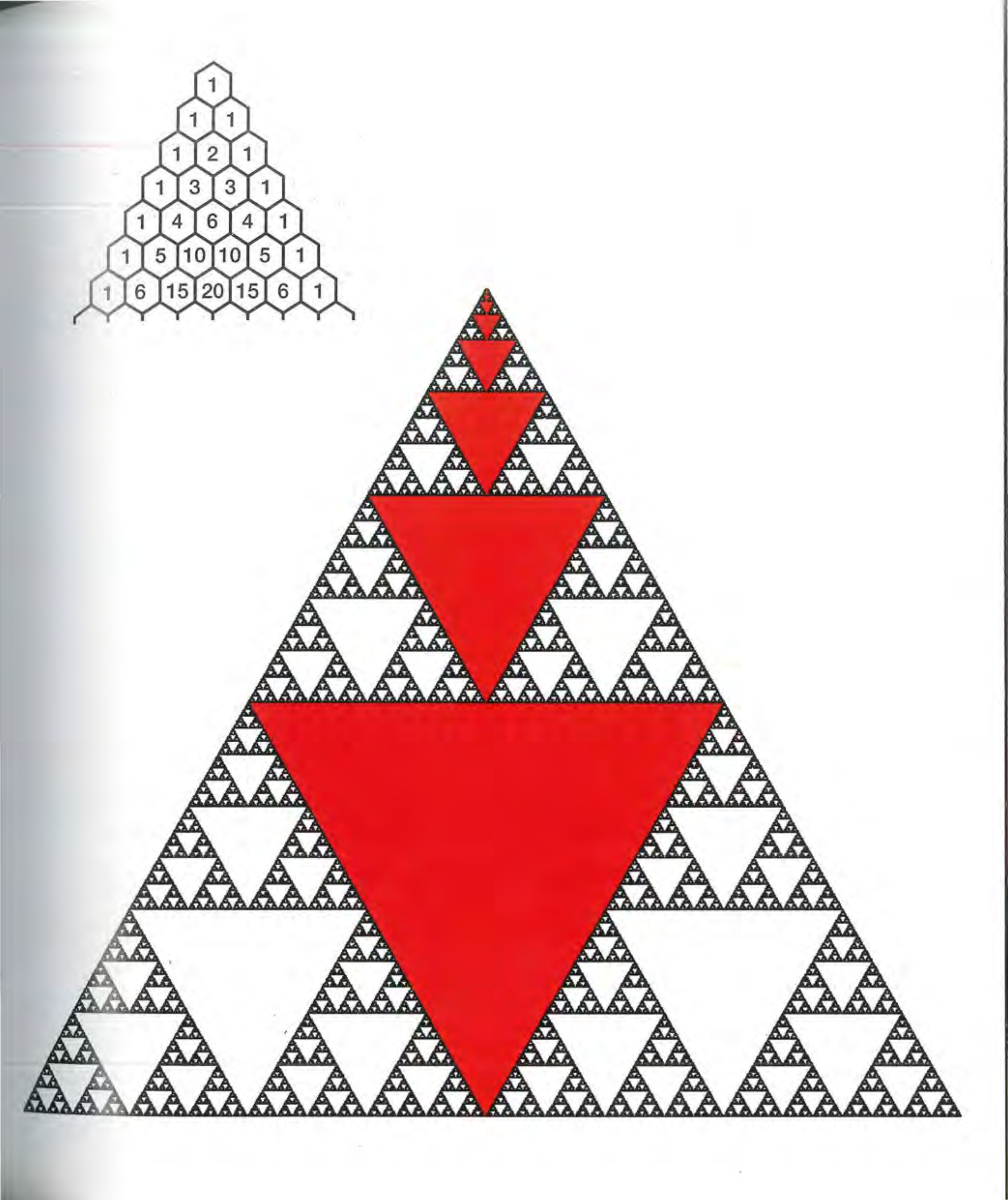
Cada número del triángulo es la suma de los dos que tiene encima. Durante años, los matemáticos han estudiado el papel del triángulo de Pascal en la teoría de la probabilidad, en el desarrollo de binomios de la forma $(x + y)^n$, y en varias aplicaciones de la teoría de números. El matemático Donald Knuth (nacido en 1938) señaló en cierta ocasión que existen tantas relaciones y pautas en el triángulo de Pascal que, cuando alguien encuentra una nueva, ya nadie, salvo el propio descubridor, se emociona por el hallazgo. Sin embargo, algunos estudios fascinantes han revelado innumerables maravillas, entre las que podemos citar pautas geométricas especiales en las diagonales, la existencia de pautas de cuadrados perfectos con diversas propiedades hexagonales y una extensión del triángulo y sus reglas a los números enteros negativos y a dimensiones superiores.

Cuando los números pares del triángulo se sustituyen por puntos y los números impares por espacios vacíos, el dibujo resultante es un **fractal**, con intrincados patrones de repetición en las diferentes escalas de tamaño. Estas figuras fractales pueden tener una gran importancia práctica, porque proporcionan modelos que facilitan a los científicos de materiales el descubrimiento de nuevas estructuras con propiedades insospechadas. En 1986, por ejemplo, los investigadores crearon juntas de alambre de un tamaño microscópico que son casi idénticas al triángulo del Pascal, con espacios vacíos en el lugar de los números impares. El área del triángulo más pequeño era de unas 1,38 micras cuadradas. Se investigaron muchas propiedades excepcionales de esta junta superconductora en un campo magnético.



VÉASE TAMBIÉN El *Tratado* de Omar Khayyam (1070), La curva de distribución normal (1733) y Los fractales (1975).

IZQUIERDA: *George W. Hart creó este modelo en nylon de la pirámide de Pascal mediante un proceso físico conocido como sintetización selectiva por láser.* DERECHA: *El triángulo de Pascal fractal mencionado en el texto. El número de celdas en los triángulos rojos centrales es siempre par.*



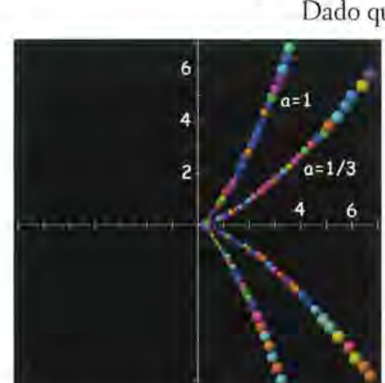
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

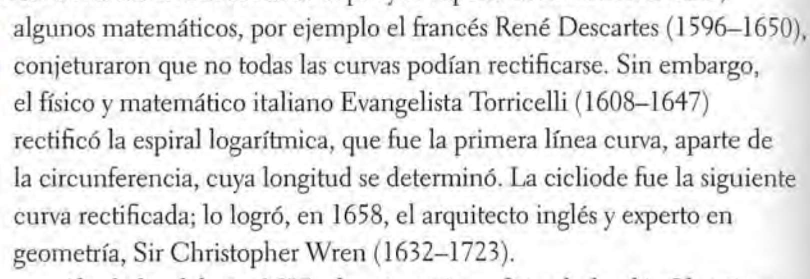
1657

La longitud de la parábola semicúbica de Neile

William Neile (1637–1670), **John Wallis** (1616–1703)

En 1657 el matemático inglés William Neile se convirtió en la primera persona que «rectificó» una curva algebraica no trivial (es decir, encontró su longitud de arco). Esta curva especial se denomina *parábola semicúbica* y está definida por $x^3 = ay^2$. Si se escribe como $y = \pm ax^{3/2}$, resulta más fácil ver el motivo de la denominación de «semicúbica». El trabajo de Neile apareció mencionado por primera vez en la obra *De Cycloide* (1659), del matemático inglés John Wallis. Debemos destacar que antes de 1659 sólo se habían calculado las longitudes de arco de curvas trascendentes como la espiral logarítmica y la cicloide.





Dado que las tentativas de rectificar la elipse y la hipérbola no tuvieron éxito, algunos matemáticos, por ejemplo el francés René Descartes (1596–1650), conjeturaron que no todas las curvas podían rectificarse. Sin embargo, el físico y matemático italiano Evangelista Torricelli (1608–1647) rectificó la espiral logarítmica, que fue la primera línea curva, aparte de la circunferencia, cuya longitud se determinó. La cicliode fue la siguiente curva rectificada; lo logró, en 1658, el arquitecto inglés y experto en geometría, Sir Christopher Wren (1632–1723).

Alrededor del año 1687, el matemático y físico holandés Christiaan Huygens (1629 –1695) demostró que la parábola semicúbica es una curva tal que una partícula que se desplaza por ella impulsada por la fuerza de la gravedad cubre distancias verticales iguales en tiempos iguales. La parábola semicúbica puede expresarse también por medio de dos ecuaciones: $x = t^2$ y $y = at^3$. Con esta notación, la longitud de la curva en función de t es $(1/27) \times (4 + 9t^2)^{3/2} - 8/27$. Es decir, la curva tiene esta longitud en el intervalo de 0 a t. En la literatura existente, encontramos la parábola de Neile expresada como $y^3 = ax^2$, lo que hace que el vértice de la curva apunte hacia abajo en el eje y en lugar de apuntar a la izquierda en el eje x.

VÉASE TAMBIÉN La cisoide de Diocles (c.180 a. C.), La geometría de Descartes (1637), La espiral logarítmica (1638), La trompeta de Torricelli (1641), El problema de la tautocrona (1673) y Los números trascendentes (1844).

IZQUIERDA: *La parábola semicúbica definida por* $x^3 = ay^2$ *para dos valores diferentes de* a. DERECHA: *Christiaan Huygens, el matemático y físico holandés que estudió el comportamiento de las partículas que descienden por la parábola semicúbica bajo la fuerza de la gravedad.*



El teorema de Viviani

Vincenzo Viviani (1622–1703)

Coloque un punto en el interior de un triángulo equilátero. A partir de este punto trace tres rectas, cada una perpendicular a uno de los lados. Con independencia de la ubicación del punto inicial, la suma de las distancias perpendiculares desde ese punto a los lados es igual a la altura del triángulo. El teorema debe su nombre al matemático y científico italiano Vincenzo Viviani. Galileo quedó tan impresionado por el talento de Viviani que lo contrató como colaborador en su casa de Arcetri, en Italia.

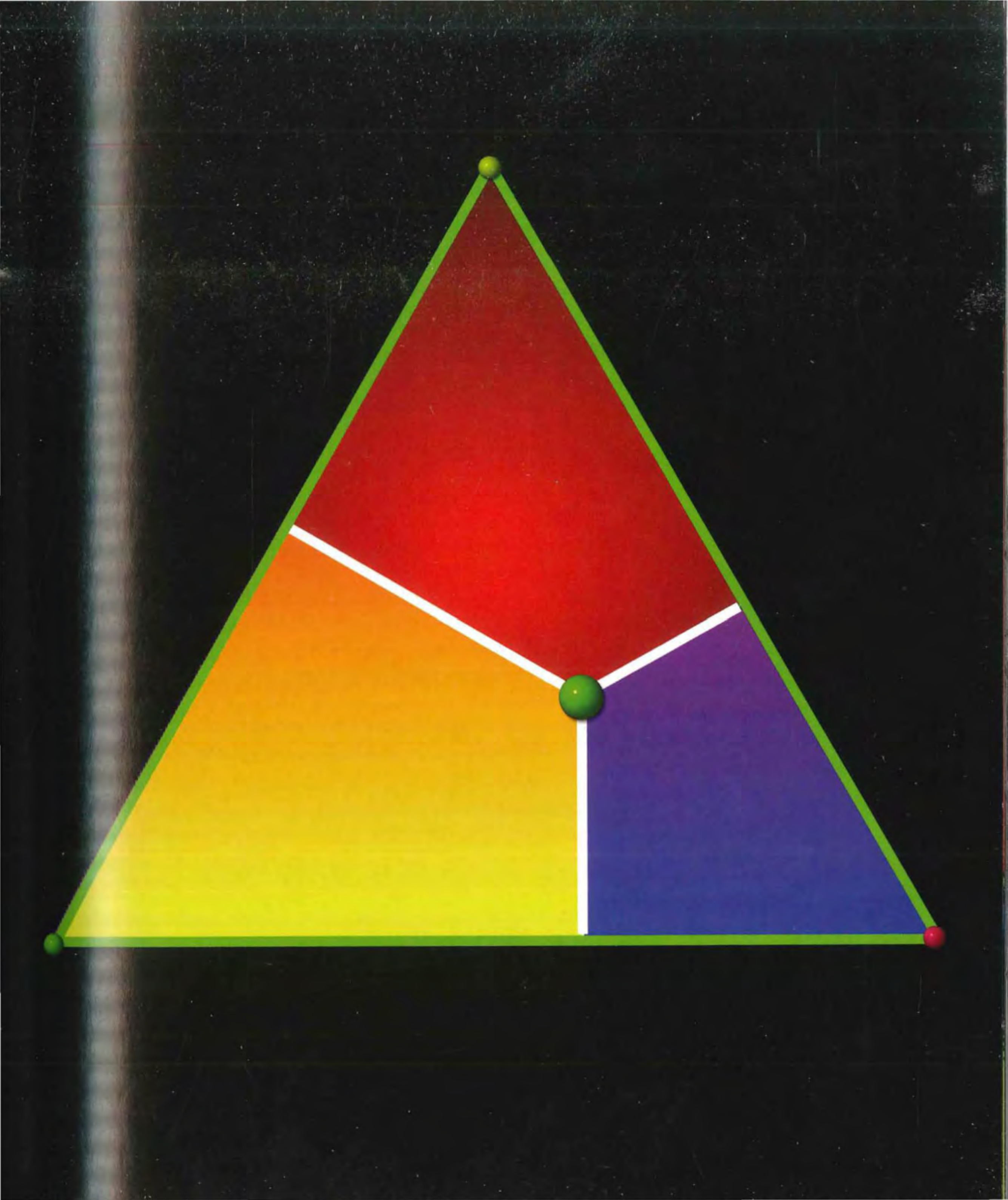
Algunos investigadores han hallado formas de extender el teorema de Viviani a problemas en los que el punto se coloca fuera del triángulo; además, se ha investigado la aplicación del teorema a cualquier polígono regular. En este caso, la suma de las distancias perpendiculares de un punto interior a los lados es n veces la apotema del polígono. (La apotema es la distancia del centro a cada uno de los lados). El teorema también puede estudiarse en dimensiones superiores.

Tras la muerte de Galileo, Viviani escribió su biografía y trató de publicar una edición completa de sus obras. Por desgracia, la iglesia lo prohibió; un hecho que dañó la reputación de Viviani y que supuso un duro golpe para la ciencia. En 1690, Viviani publicó la versión italiana de los *Elementos* de Euclides.

Desde el punto de vista matemático, el interés del teorema no sólo reside en las numerosas demostraciones existentes, sino en su utilidad pedagógica a la hora de enseñar a los niños distintos aspectos de la geometría. Algunos profesores sitúan el problema en el mundo real, en el contexto de un surfista que se encuentra en una isla con forma de triángulo equilátero. El surfista quiere construir una cabaña de modo que la suma de las distancias a los lados sea mínima, ya que le gusta hacer surf en las tres playas por igual. Los alumnos se asombran al descubrir que la ubicación de la cabaña resulta indiferente.

VÉASE TAMBIÉN El teorema de Pitágoras y los triángulos (c. 600 a. C.), Los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), Teorema del coseno (c. 1427), El teorema de las trisectrices de Morley (1899) y Selección de triángulos en una esfera (1982).

Coloque un punto en el interior de un triángulo equilátero. Trace tres rectas, como se muestra en la figura. La suma de las distancias perpendiculares del punto interior a los lados es igual a la altura del triángulo



1665

El descubrimiento del cálculo

Isaac Newton (1642–1727), **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716)

El matemático inglés Isaac Newton y el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz suelen ser considerados como los inventores del cálculo, pero varios matemáticos anteriores exploraron ya el concepto de tasa de variación y límite; comenzando por los antiguos egipcios, que desarrollaron reglas para calcular el volumen de una pirámide y para aproximar el área de un círculo.

En el siglo XVII, tanto Newton como Leibniz trataron de desentrañar problemas de tangentes, derivadas, mínimos, máximos e infinitésimos (cantidades infinitamente pequeñas que se aproximan a cero). Ambos comprendieron que la derivación (encontrar la pendiente de la tangente a una curva en un punto, es decir, de la recta que «toca» la curva justo en ese punto) y la integración (hallar el área bajo una curva) eran procesos inversos. La investigación de Newton (1665–1666) comenzó con su interés por las sumas infinitas; sin embargo, tardó en publicar sus conclusiones. Leibniz sí publicó su descubrimiento del cálculo diferencial en 1684 y el del cálculo integral en 1686. Dijo: «Resulta impropio de hombres eminentes perder horas como esclavos en el trabajo de calcular. Mi nuevo cálculo ofrece la verdad por medio del análisis y sin necesidad de que la imaginación realice ningún esfuerzo». Newton se indignó. Durante muchos años menudearon los debates acerca del modo de repartir el mérito del descubrimiento del cálculo; como consecuencia, los avances al respecto se demoraron. Newton fue el primero en aplicar el cálculo a problemas de física, mientras que Leibniz desarrolló gran parte de la notación que encontramos todavía en los modernos libros de cálculo.

En la actualidad, el cálculo ha invadido todos los campos científicos y desempeña un papel esencial en biología, física, química, economía, sociología e ingeniería, así como en cualquier área de estudio en la que exista una magnitud variable (como la velocidad o la temperatura, por ejemplo). El cálculo puede utilizarse como herramienta para explicar la estructura del arco iris, nos enseña cómo ganar más dinero en la bolsa, ayuda a guiar una nave espacial, realiza pronósticos meteorológicos, predice el crecimiento demográfico, diseña edificios y analiza la propagación de enfermedades. El cálculo ha provocado una revolución. Ha cambiado nuestra forma de ver el mundo.

VÉASE TAMBIÉN Las paradojas de Zenón (c. 445 a. C.), La trompeta de Torricelli (1641), El análisis de lo infinitamente pequeño de L'Hôpital (1696), Las *Instituzioni Analitiche* de Agnesi (1748), *La Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace (1812), y *Le Calcul Infinitésimal* de Cauchy (1823).

Newton, *William Blake (1795). El poeta y artista Blake representó a Isaac Newton como una especie de geómetra divino, observando diagramas técnicos trazados en el suelo mientras reflexiona sobre las matemáticas y el cosmos.*



1669

El método de Newton

Isaac Newton (1642–1727)

El origen de las técnicas computacionales basadas en relaciones de recurrencia (según las cuales cada término de una sucesión se define como una función del término anterior) puede buscarse en el origen mismo de las matemáticas. Los babilonios utilizaron técnicas similares para calcular la raíz cuadrada de un número positivo, y los griegos para hallar un valor aproximado de π. En la actualidad, muchas funciones especiales importantes de la física matemática pueden calcularse con fórmulas de recurrencia.

El análisis numérico suele vincularse con la búsqueda de soluciones aproximadas para problemas complejos. El método de Newton es uno de los métodos numéricos más famosos para resolver ecuaciones de la forma $f(x) = 0$, algunas de cuyas soluciones pueden ser difíciles de hallar mediante métodos algebraicos. El problema de encontrar los ceros de una función, también llamados raíces, por medio de este tipo de métodos aparece con frecuencia en ciencias e ingeniería.

Para aplicar el método de Newton, se comienza dando una primera aproximación numérica de la solución de la raíz; a continuación, la función es aproximada por su tangente en ese punto. Finalmente se determina el punto en que esta recta corta al eje x obteniéndose un valor que suele ser una mejor aproximación de la raíz. El método se reitera, se va repitiendo para producir aproximaciones sucesivas cada vez más exactas. La fórmula concreta para el método de Newton es $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$, donde el símbolo *prima* (′) indica la primera derivada de la función f.

Cuando el método se aplica a funciones con valores complejos, las interpretaciones gráficas generadas por ordenador suelen utilizarse para indicar dónde es fiable y dónde se comporta de modo extraño. No es raro que la gráfica resultante muestre una conducta caótica, así como hermosas pautas **fractales**.

Las bases matemáticas del método de Newton fueron descritas por Isaac Newton en su obra *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (Acerca del análisis por ecuaciones con un número infinito de términos), escrita en 1669 y publicada por William Jones en 1711. En 1740, el matemático inglés Thomas Simpson refinó esta propuesta y describió el método de Newton como un método iterativo para resolver ecuaciones generales no lineales por medio del cálculo.

VÉASE TAMBIÉN El descubrimiento del cálculo (c. 1665), El caos y el efecto mariposa (1963) y Los fractales (1975).

Los gráficos por ordenador pueden ser útiles a la hora de revelar el intrincado comportamiento del método de Newton cuando se aplica a la búsqueda de las raíces complejas de una ecuación. Paul Nylander generó esta imagen empleando el método de Newton para encontrar las soluciones de la ecuación $z^5 - 1 = 0$.



1673

El problema de la tautocrona

Christiaan Huygens (1629-1695)

En el siglo XVII, matemáticos y físicos trataron de hallar una curva que describiera la forma de un tipo específico de plano inclinado. Se trataba de colocar objetos en una rampa, uno cada vez, de modo que inviertieran el mismo tiempo en llegar deslizándose al final de la rampa con independencia del punto de partida de cada ensayo. Sobre los objetos actúa únicamente la fuerza de la gravedad y se considera que no existe fuerza de rozamiento.

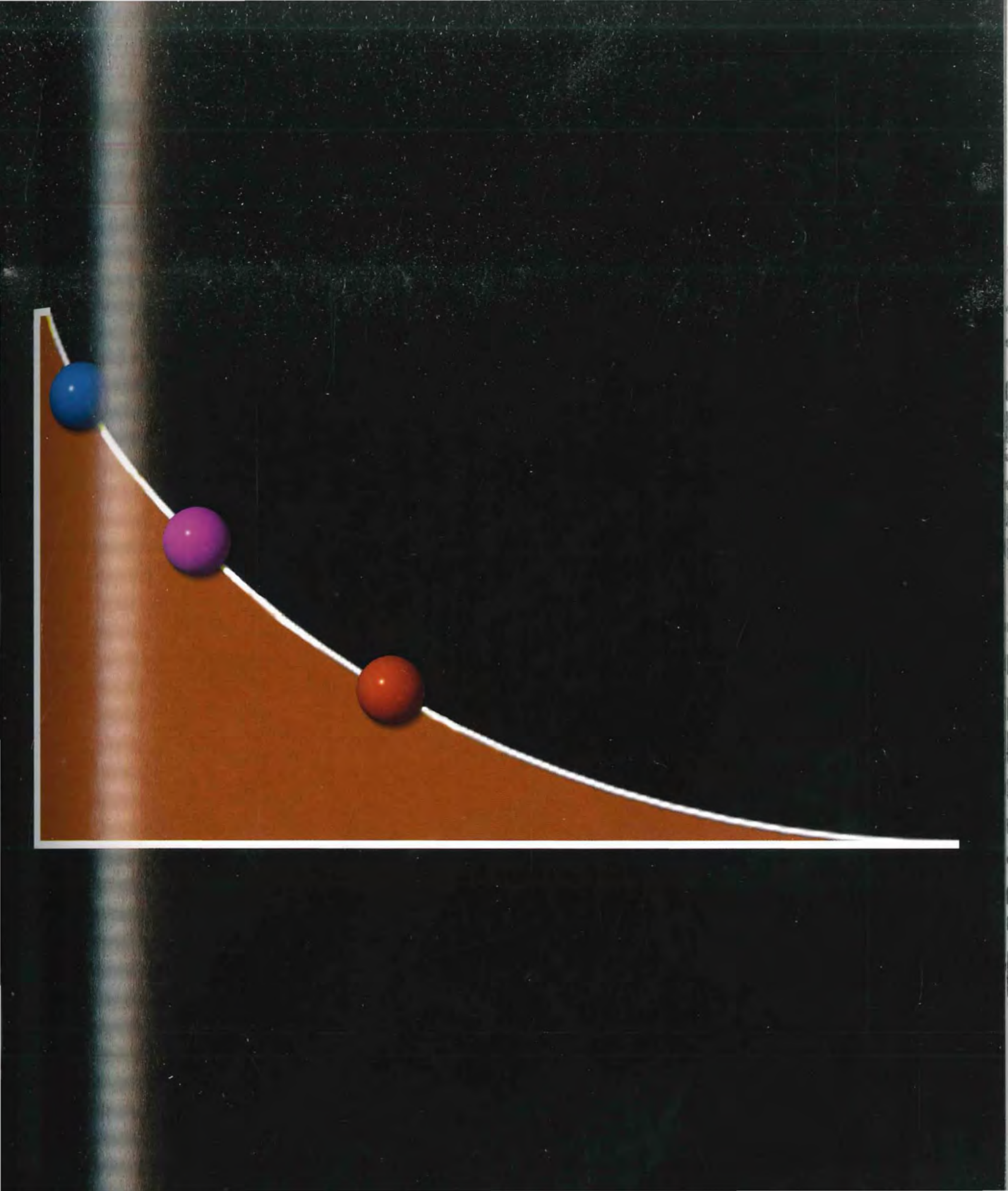
El matemático, astrónomo y físico holandés Christiaan Huygens encontró una solución en 1673 y la publicó en su obra *Horologium oscillatoriumi* (El reloj de péndulo). Desde un punto de vista técnico, la tautocrona es una cicloide, es decir, la curva definida por la trayectoria seguida por un punto fijo de una circunferencia a medida que ésta rueda sobre una línea recta. La tautocrona también se conoce como braquistocrona cuando se hace referencia a la curva que hace que un objeto sin rozamiento logre la mayor velocidad de descenso al deslizarse desde un punto a otro.

Huygens trató de utilizar su descubrimiento para diseñar un reloj de péndulo más preciso. El reloj contaba con porciones de superficies con forma de tautocrona en las cercanías del lugar donde oscila el péndulo, para asegurar que éste describiera una curva óptima con independencia del punto en que empezara a balancearse. (Por desgracia, la fricción de las superficies producía errores significativos.)

Las curiosas propiedades de la tautocrona aparecen mencionadas en la novela *Moby Dick*, en una discusión acerca de una olla para refinar aceite: «[La olla] puede servir también para profundas meditaciones matemáticas. Me hallaba en la olla de la parte izquierda del barco, con la esteatita dando vueltas a mi alrededor con diligencia, cuando, de forma indirecta, me di cuenta de pronto, del hecho notable de que en geometría todos los cuerpos que se deslizan por una cicloide, por ejemplo mi esteatita, caerán desde cualquier punto en exactamente la misma cantidad de tiempo».

VÉASE TAMBIÉN La longitud de la parábola semicúbica de Neile (1657).

Bajo la fuerza de la gravedad, tres pelotas se deslizan por la curva tautocrona partiendo de puntos diferentes; sin embargo, las tres invertirán el mismo tiempo en llegar al final. (Las pelotas se colocan de una en una sobre el plano inclinado.)



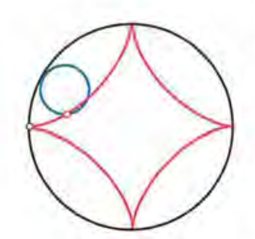
1674

La astroide

Ole Christensen Rømer (1644–1710)

La astroide es una curva con cuatro vértices trazada por un punto de una circunferencia que rueda (como un engranaje) por el interior de una circunferencia más grande. El diámetro de la circunferencia mayor es cuatro veces el diámetro de la menor. La astroide es notable por los muchos matemáticos célebres que investigaron sus intrigantes propiedades. El primero en estudiar esta curva fue el astrónomo danés Ole Rømer. Lo hizo en 1674, mientras buscaba formas eficientes para las ruedas dentadas. Tanto el matemático suizo Johann Bernoulli (1691) como el matemático alemán Gottfried Leibniz (1715) y el matemático francés Jean d'Alembert (1748) sintieron fascinación por ella.

La astroide tiene la ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$, donde R es el radio de la circunferencia exterior inmóvil y $R/4$ el de la circunferencia interior rotatoria. La longitud de la astroide es $6R$, su área, $3\pi R^2/8$. Hay que destacar que la longitud $6R$ es independiente de π, a pesar de que la astroide se genera mediante circunferencias.



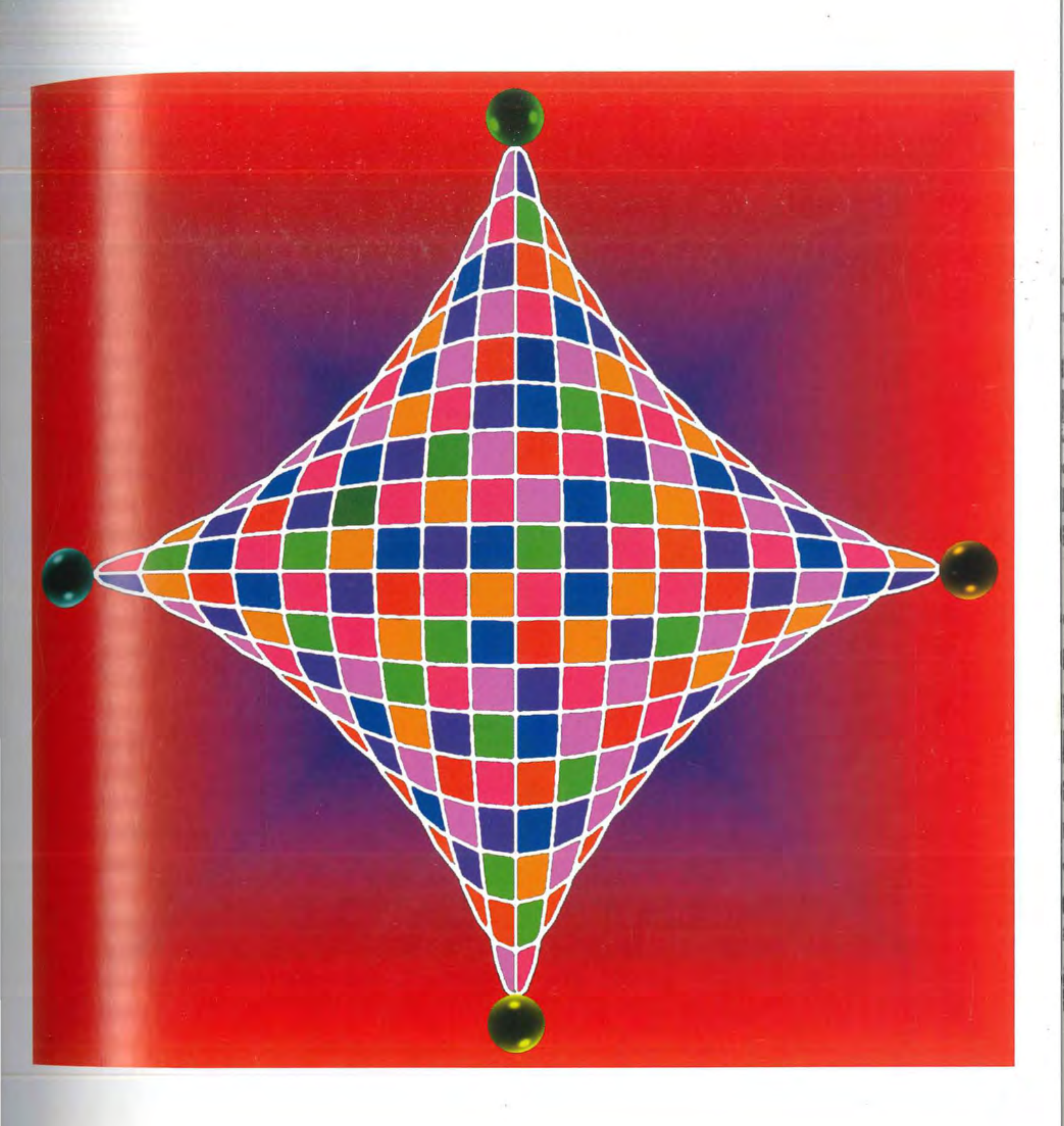
En 1725 el matemático Daniel Bernoulli descubrió que una astroide puede trazarse también con una circunferencia interior cuyo radio es ¾ el diámetro de la circunferencia fija. Es decir, la curva resultante es idéntica a la que se obtiene con una circunferencia cuyo diámetro es ¼ del diámetro del de la circunferencia fija.

En física, la astroide de Stoner-Wohlfarth se utiliza para caracterizar varias propiedades de la energía y el magnetismo. La patente 4.987.984 de Estados Unidos describe el uso de una astroide para un mecanismo de embrague: «La astroide proporciona la misma distribución de fatiga que el arco circular equivalente, pero resta menos material a la leva y proporciona por tanto una estructura más sólida».

Una propiedad interesante de esta curva es que todas las prolongaciones de las tangentes de la astroide hasta tocar los ejes x e y, y tienen la misma longitud. Podemos visualizar esta propiedad si imaginamos una escalera apoyada en una pared en todos los ángulos posibles: el resultado es un fragmento de la astroide.

VÉASE TAMBIÉN La cisoide de Diocles (c. 180 a. C.), La cardioide (1637), La longitud de la parábola semicúbica de Neile (1657), El triángulo de Reuleaux (1875) y Superhuevo (c. 1965).

Representación artística de una astroide como la «envolvente» de una familia de elipses. (En geometría, la envolvente de una familia de curvas es una curva tangente a cada miembro de la familia en algún punto.)



1696

El análisis de lo infinitamente pequeño de L'Hôpital

Guillaume François Antoine, Marqués de l'Hôpital (1661–1704)

En 1696 el Marqués de l'Hôpital publicó el primer libro de texto europeo sobre cálculo, *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* (Análisis de lo infinitamente pequeño, para la comprensión de las curvas). Quería que el libro fuera un vehículo para fomentar la comprensión de las técnicas del cálculo diferencial. El cálculo, inventado unos pocos años antes por Isaac Newton y Gottfried Leibniz, había sido refinado por los hermanos Jacob y Johann Bernoulli. Según Keith Devlin, «De hecho, hasta la aparición del libro de l'Hôpital, Newton, Leibniz y los Bernoulli eran las únicas personas sobre la faz de la tierra que conocían a fondo el cálculo».

A comienzos de la década de 1690, l'Hôpital contrató a Johann Bernoulli para que le enseñara cálculo. L'Hôpital aprendió rápido, porque le intrigaba mucho la materia, y consolidó su conocimiento rápidamente escribiendo un manual sistemático. Rouse Ball afirma, acerca del libro de l'Hôpital, que «el mérito de estructurar el primer tratado que explicó los principios y usos del método se debe al trabajo de l'Hôpital [...] Su obra circuló profusamente; hizo que el uso de la notación diferencial se generalizara en Francia y ayudó a lograr que se conociera en Europa».

Aparte de su libro de texto, l'Hôpital debe su fama a la regla, incluida en su libro, para calcular el límite de una fracción cuyos numerador y denominador tienden o bien a cero o bien a infinito. Su intención original era seguir la carrera militar, pero sus problemas de visión hicieron que se decantara por las matemáticas.

Se sabe que en 1694 l'Hôpital pagó a Bernoulli trescientos francos al año para que le transmitiera todos los descubrimientos que después trasladó a su libro. En 1704, tras la muerte de l'Hôpital, Bernoulli comenzó a hablar de este trato y aseguró que muchos de los resultados del *Analyse des infiniment petits* los había descubierto él.

VÉASE TAMBIÉN El descubrimiento del cálculo (c. 1665), Las *Instituzioni Analitiche* de Agnesi (1748) y *Le Calcul Infinitésimal* de Cauchy (1823).

Frontispicio del primer libro de texto europeo sobre cálculo: Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes *(Análisis de lo infinitamente pequeño, para la comprensión de las curvas).*

ANALYSE

DES

INFINIMENT PETITS,

POUR

L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.

Par Mr le Marquis DE L'HOSPITAL.

SECONDE EDITION.



A PARIS,

Chez FRANÇOIS MONTALANT à l'entrée du Quay des Auguſtins du côté du Pont S. Michel.

MDCCXVI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.



El acertijo de la cuerda que rodea la Tierra

William Whiston (1667–1752)

Aunque este acertijo no supuso ninguna revolución matemática como la desencadenada por la mayor parte de los descubrimientos descritos en este libro, esta pequeña joya de 1702 es digna de mención porque ha intrigado a niños y adultos durante más de dos siglos y es una metáfora de cómo las matemáticas más sencillas puede lograr que el razonamiento analítico supere los límites de la intuición.

Imagine una cuerda que ciñe un balón de baloncesto. ¿Cuánto debería alargar la longitud de la cuerda para lograr que la distancia entre ella y la superficie del balón fuera de un decímetro en todos sus puntos? ¿Cuánto cree?

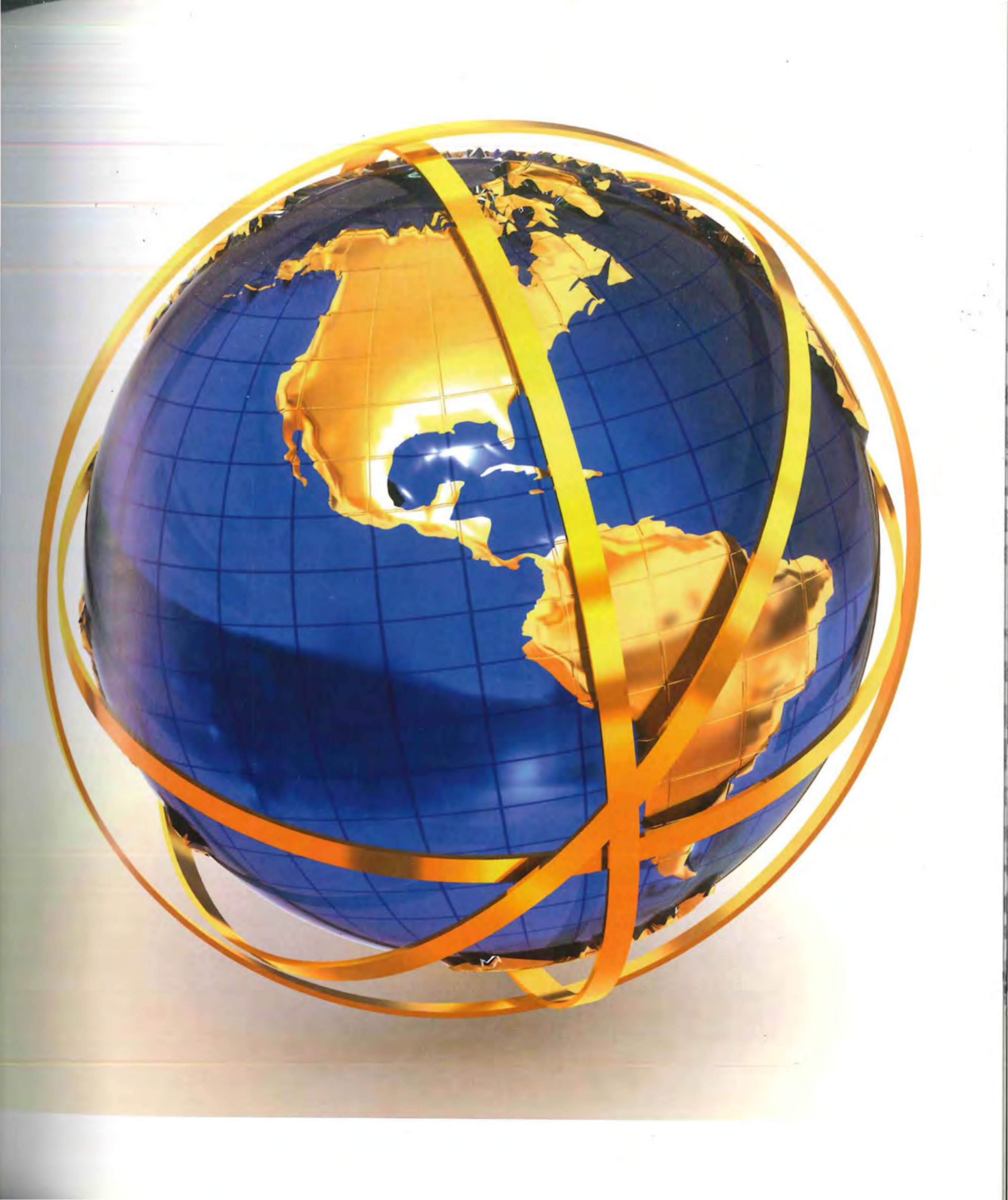
A continuación, imagine que la cuerda rodea una esfera del tamaño de la Tierra ciñéndose al ecuador (debería ser una cuerda de unos cuarenta mil kilómetros). ¿Cuánto debería alargar la longitud de la cuerda para lograr que la distancia entre ella y la superficie fuera de 1 decímetro a lo largo de todo el ecuador?

La respuesta, una sorpresa para la mayoría de las personas, es 2π; es decir, unos 6,28 decímetros, tanto para el balón de baloncesto como para la Tierra. Si R es el radio de la Tierra, y $1 + R$ es el radio, en decímetros, de la circunferencia ampliada, podemos comparar la longitud de la cuerda antes ($2\pi R$) y después $2\pi(1 + R)$, lo que demuestra que la diferencia es de 2π decímetros, con independencia del radio que estemos utilizando.

Un acertijo muy parecido a este aparece en el libro de William Whiston *The Elements of Euclid*, escrito en 1702 para estudiantes. Whiston —teólogo, historiador y matemático inglés— debe su fama seguramente a su *A New Theory of the Earth from its Original to the Consummation of All Things* (1696), donde sugiere que el diluvio universal de la Biblia fue provocado por un cometa.

VÉASE TAMBIÉN Los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), π (250 a. C.) y Trigo sobre un tablero de ajedrez (1256).

Una cuerda, o una banda metálica, rodea una esfera del tamaño de la Tierra ciñéndose al ecuador. ¿Cuánto habría que alargar la cuerda para lograr que la distancia a la superficie del planeta fuera de 1 decímetro a lo largo de todo el ecuador?



1713

La ley de los grandes números

Jacob Bernoulli (1654–1705)

En 1713 se publicó la demostración de la Ley de los grandes números del matemático suizo Jacob Bernoulli, como parte del libro póstumo *Ars Conjectandi* (El arte de hacer conjeturas). Se trata de un teorema de probabilidad que describe la estabilidad a largo plazo de una variable aleatoria. Cuando el número de observaciones de un experimento como tirar una moneda es suficientemente grande, la aparición porcentual de un resultado («caras», por ejemplo) será muy cercana a la probabilidad del resultado, en este caso 50%. O, desde un punto de vista formal, dada una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con varianza y media poblacional finitas, el promedio de las observaciones se acercará a la media teórica de la población.

Imagine que lanza un dado normal de seis caras. Esperamos que la media de los valores obtenidos sea el promedio, es decir 3,5. Imagine que los tres primeros resultados son 1, 2, y 6, cuyo promedio da 3. Tirando el dado más veces, el valor del promedio se acercará a la larga al valor esperado, 3,5. Los encargados de los casinos adoran este teorema porque pueden confiar en resultados estables a largo plazo y actuar en consecuencia. Las aseguradoras dependen de él para planear variaciones cuando hay pérdidas.

En *Ars Conjectandi*, Bernoulli estima la proporción de pelotas blancas en una urna que contiene un número desconocido de pelotas blancas y negras. Extrayendo pelotas de la urna y reemplazándolas aleatoriamente después de cada extracción, estima la proporción de pelotas blancas mediante la proporción de pelotas blancas extraídas. Si se realiza esta operación un número suficiente de veces, se puede obtener la precisión que se desee en la estimación. Bernoulli afirma que «si las observaciones de todos los acontecimientos continuaran hasta el infinito (de modo que la probabilidad se convirtiera en una certeza absoluta), todos los sucesos del mundo se darían en proporciones fijas [...] Incluso en los hechos más accidentales podríamos reconocer una especie de predestinación».

VÉASE TAMBIÉN Dados (c. 3000 a. C.), La curva de distribución normal (1733), La paradoja de San Petersburgo (1738), El teorema de Bayes (1761), La aguja de Buffon (1777), La *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace (1812), La ley de Benford (1881) y Chi-cuadrado (1900).

En 1994 Suiza emitió un sello en homenaje al matemático Jacob Bernoulli. El sello representa un gráfico y una fórmula relacionados con su Ley de los grandes números.


MATHEMATICA
$\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) \longrightarrow E(X)$
HELVETIA 80
n
BURKARD WALTENSPÜL
1994
COURVOISIER

1727

El número de Euler, *e*

Leonhard Paul Euler (1707–1783)

El divulgador científico inglés David Darlin afirma que *e* es «posiblemente, el número más importante en matemáticas. π es más familiar para los profanos, pero *e* es mucho más significativo y ubicuo en los niveles más altos de la materia».

El número *e* es aproximadamente igual a 2,71828. Puede calcularse de muchas formas. Es, por ejemplo, el límite de la expresión $(1 + 1/n)$ elevada a la enésima potencia cuando n aumenta indefinidamente. Aunque algunos matemáticos como Jacob Bernoulli y Gottfried Leibniz conocían la existencia de esta constante, el suizo Leonhard Euler fue el primero que la estudió en profundidad y el primero que utilizó el símbolo *e* en algunas cartas escritas el año 1727. En 1737 demostró que *e* es irracional, es decir, que no puede expresarse como una fracción. En 1748 calculó dieciocho de sus dígitos; en la actualidad se conocen más de cien mil millones.

El número *e* aparece en áreas muy diversas, desde la fórmula de la catenaria (la curva que forma un cable colgado de sus extremos) y el cálculo del interés compuesto hasta numerosas aplicaciones de probabilidad y estadística. También aparece en una de las relaciones matemáticas más asombrosas jamás descubiertas, $e^{i\pi} + 1 = 0$, que une los cinco símbolos matemáticas más importantes: 1, 0, π, e, *i* (la raíz cuadrada de menos uno). El matemático de Harvard Benjamin Pierce afirmó que «no comprendemos la fórmula y no sabemos lo que significa, pero la hemos demostrado, y por lo tanto sabemos que tiene que ser verdadera». Varios expertos la han elegido esta como la fórmula matemática más hermosa de todos los tiempos. Según Kasner y Newman, «lo único que podemos hacer es reproducir la ecuación y no dejar de preguntarnos por sus implicaciones. Atrae por igual a los místicos, a los científicos y a los matemáticos».

VÉASE TAMBIÉN π (c. 250 a. C.), Los números imaginarios (1572), La constante de Euler-Mascheroni (1735), Los números trascendentes (1844) y Números normales (1909).

El Gateaway Arch de San Louis es una catenaria invertida. La catenaria puede expresarse mediante la fórmula $y = (a/2)\cdot(e^{x/a} + e^{-x/a})$. *El Gateaway Arch es el monumento más alto de mundo, con una altura de 192 metros.*



1730

La fórmula de Stirling

James Stirling (1692–1770)

En la actualidad, los factoriales aparecen en cualquier campo de las matemáticas. Dado un entero no negativo n, "n factorial" (escrito $n!$), es el producto de todos los enteros positivos menores o iguales que n. Por ejemplo, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$. La notación n! fue introducida por el matemático francés Christian Kramp en 1808. Los factoriales son importantes en combinatoria, por ejemplo, para determinar el número de ordenaciones distintas de los elementos de una secuencia. También aparecen en teoría de números, en probabilidad y en cálculo.

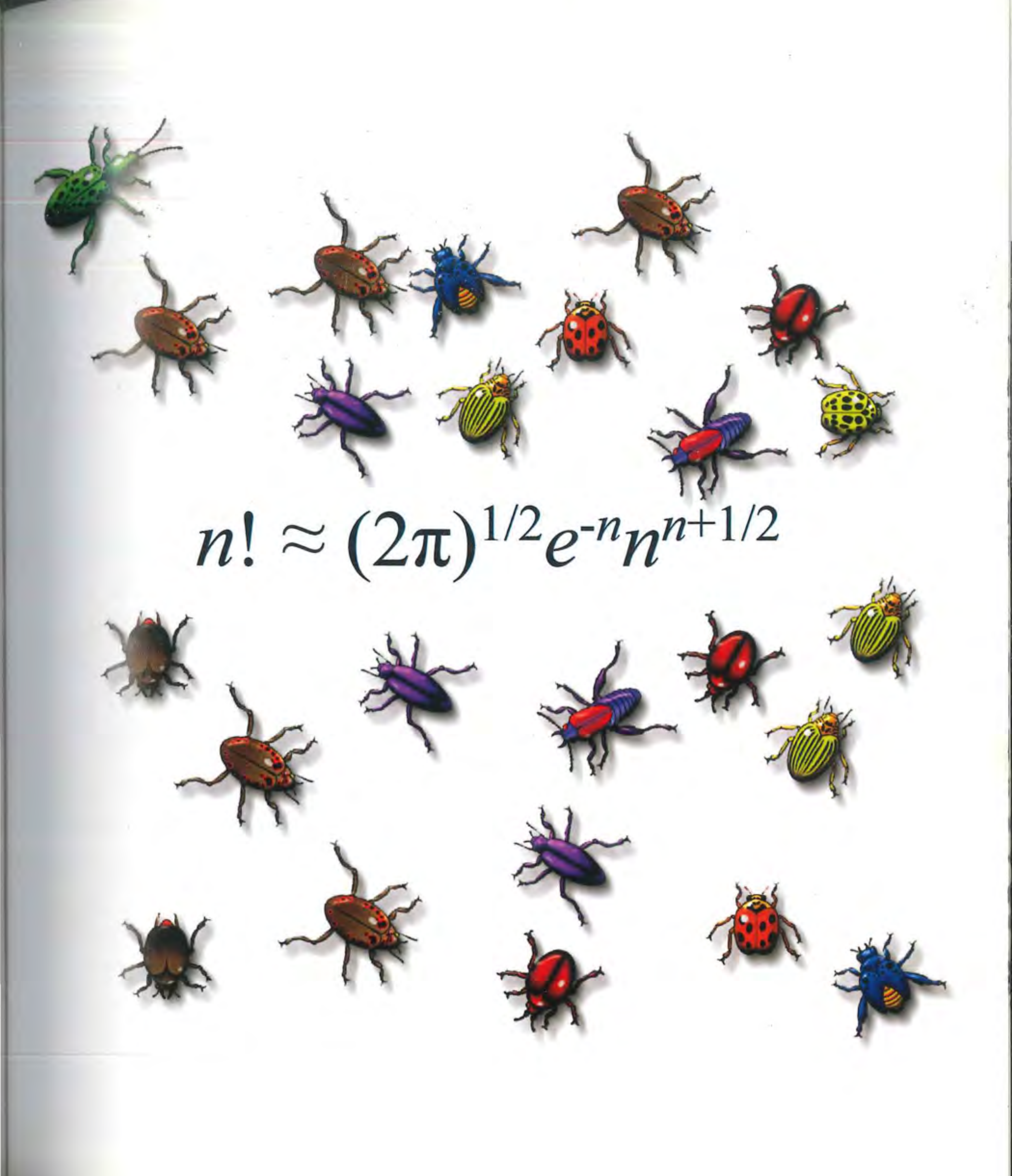
Dado que los valores factoriales crecen con velocidad (por ejemplo, 70! es un número mayor que 10^{100}, mientras que 25.206! es mayor que $10^{100.000}$), los métodos para hallar valores aproximados de factoriales grandes resultan muy útiles. La fórmula de Stirling, $n! \approx \sqrt{2\pi}\, e^{-n} n^{n+1/2}$, proporciona una buena estimación del factorial de n factorial. Aquí, el símbolo $\approx$ significa «aproximadamente igual a», mientras que e y π son dos constantes matemáticas, $e \approx 2.71828$ y $\pi \approx 3.14159$. Para valores grandes de n, esta expresión da como resultado una aproximación de aspecto aún más sencillo, $\ln(n!) \approx n\ln(n) - n$, que también puede escribirse como $n! \approx n^n e^{-n}$.

En 1730 el matemático escocés James Stirling presentó su aproximación del valor de $n!$ en su obra más importante, *Methodus Differentialis*. Stirling comenzó su carrera matemática en un momento de grandes conflictos políticos y religiosos. Fue amigo de Newton, pero desde 1735 dedicó la mayor parte de su vida a la gestión industrial.

Keith Ball cree «que se trata de uno de los descubrimientos matemáticos decisivos del siglo XVIII. Una fórmula así nos da una idea de la asombrosa transformación de las matemáticas que tuvo lugar en los siglos XVII y XVIII. Los logaritmos no se inventaron hasta comienzos del siglo XVII. Los *Principia* de Newton, que sentaron las bases del cálculo, aparecieron noventa años después. En los noventa años siguientes los matemáticos crearon fórmulas muy sutiles (la fórmula de Stirling, por ejemplo) que hubieran resultado inimaginables sin una formalización del cálculo. Las matemáticas dejaron de ser un juego de aficionados. Se convirtieron en un trabajo de profesionales».

VÉASE TAMBIÉN Logaritmos (1614), El principio del palomar de Dirichlet (1834), Los números trascendentes (1844) y La teoría de Ramsey (1928).

La fórmula de Stirling rodeada por exactamente 4!, o 24, escarabajos.


$n! \approx (2\pi)^{1/2}e^{-n}n^{n+1/2}$

1733

La curva de distribución normal

Abraham de Moivre (1667–1754), **Johann Carl Friedrich Gauss** (1777–1855), **Pierre-Simon Laplace** (1749–1827)

El matemático francés Abraham de Moivre fue el primero que describió, en 1733, la curva de distribución normal, o Ley de los errores. Lo hizo en su obra *Approximatio ad summam terminorum binomii* $(a+b)^n$ *in seriem expansi* (Aproximación a la suma de los términos del binomio $(a+b)^n$ desarrollado como una serie).

A lo largo de su vida, De Moivre, que no logró salir de la pobreza, se ganó la vida jugando al ajedrez en los cafés.

La distribución normal —también llamada distribución de Gauss, en honor a Carl Karl Friedrich Gauss, que la estudió algunos años después— representa a una familia importante de distribuciones continuas de probabilidad que se aplican en los innumerables campos en los que se llevan a cabo observaciones. Estos campos incluyen estudios demográficos, de estadística sanitaria, de medidas astronómicas, de genética, de inteligencia, de estadística para aseguradoras y de cualquier otro ámbito en el que exista variación en los datos experimentales y en las características observadas. De hecho, a comienzos del siglo XVIII los matemáticos comenzaron a darse cuenta de que un gran número de medidas diferentes tendían a mostrar una forma semejante de dispersión o distribución.

La distribución normal viene definida por dos parámetros clave: la media (o promedio) y la desviación típica, que cuantifica la dispersión o variabilidad de los datos. La representación gráfica de la distribución normal se suele llamar «campana» a causa de su forma simétrica característica, que muestra muchos más valores concentrados en la zona central de la curva que en los extremos.

De Moivre investigó la distribución normal cuando trataba de hallar aproximaciones para la distribución binomial que surge, por ejemplo, en experimentos de «cara o cruz» con monedas. En 1782 Pierre-Simon Laplace utilizó la distribución para estudiar errores de medida. Gauss la aplicó en 1809 para estudiar datos astronómicos.

El antropólogo Sir Francis Galton escribió lo siguiente acerca de la distribución normal: «No conozco nada que cautive de tal modo la imaginación como la maravillosa expresión del orden cósmico que expresa la "Ley de frecuencia de error". Los griegos, de haberla conocido, la hubieran personificado y deificado. Reina con serenidad y completa modestia en medio de la más salvaje confusión».

VÉASE TAMBIÉN El *Tratado* de Omar Khayyam (1070), El triángulo de Pascal (1654), La ley de los grandes números (1713), La aguja de Buffon (1777), La *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace (1812) y Chi-cuadrado (1900).

Billete alemán con Carl Friedrich Gauss junto a la gráfica y la fórmula de la función normal de probabilidad.


DEUTSCHE BUNDESBANK
10
1777–1855 Carl Friedr. Gauß
10
AY7831976K1

1735



La constante de Euler-Mascheroni

Leonhard Paul Euler (1707–1783), **Lorenzo Mascheroni** (1750–1800)

La constante de Euler-Mascheroni, representada por la letra griega γ, tiene un valor numérico de 0,5772157... Este número relaciona las potencias y los logaritmos con la teoría de números y se define como el límite de la expresión $(1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n - \ln n)$ cuando n tiende a infinito. Esta constante juega un papel importante en áreas tan diversas como las series infinitas, los productos, la probabilidad y la representación de integrales definidas. Por ejemplo, el número medio de divisores de todos los números entre 1 y n está muy cerca de $\ln(n) + 2\gamma - 1$.

El cálculo de γ no ha generado el mismo interés público que el de π, pero γ ha tenido muchos seguidores apasionados. En la actualidad conocemos 1.241.100.000.000 decimales de π mientras que en 2008 sólo se habían calculado unos 10.000.000.000 decimales de γ. La evaluación de γ es considerablemente más difícil que la de π. Veamos unos cuantos dígitos: 0,57721566490153286060651209008240243104215933593992...

Esta constante matemática tiene una historia larga y fascinante, igual que otras constantes famosas como π y e. El matemático suizo Leonhard Euler la estudió en su artículo "De Progressionibus harmonicis observationes" (Observaciones acerca de las progresiones armónicas), publicado en 1735, pero en aquel momento sólo fue capaz de calcular seis decimales. En 1790, el matemático y sacerdote italiano Lorenzo Mascheroni halló algunos dígitos más. En la actualidad no sabemos si el número puede expresarse como una fracción (igual que el número 0,142857142857... puede expresarse como 1/7). Julian Havil, que dedicó un libro entero a esta constante, cuenta que el matemático inglés G. H. Hardy ofreció ceder su cátedra en Oxford a aquel que demostrara que γ no podía expresarse como una fracción.

VÉASE TAMBIÉN π (c. 250 a. C.), Descubrimiento del desarrollo en serie de π (c. 1500) y El número de Euler, e (1727).

Retrato de Leonhard Euler en 1737, de Johann Georg Brucker.



1736

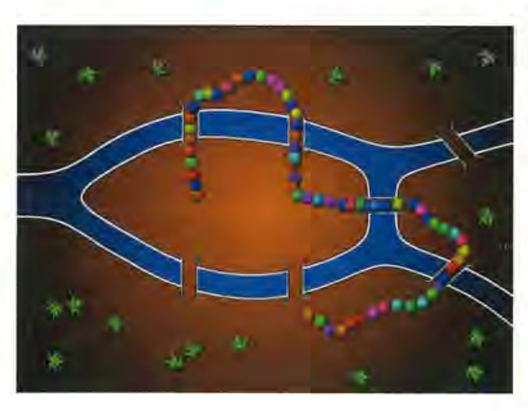
Los puentes de Königsberg

Leonhard Paul Euler (1707–1783)

La teoría de grafos es un área de las matemáticas que se interesa por el modo en que se conectan los objetos. A menudo suele simplificar ciertos tipos de problemas mediante representaciones de puntos unidos por líneas. Uno de los problemas más antiguos de la teoría de grafos tiene que ver con los siete puentes de la ciudad de Königsberg, en Alemania (ahora parte de Rusia). A los habitantes de la antigua Königsberg les encantaba pasear a lo largo del río, recorriendo los puentes y las islas. A comienzos del siglo XVIII, la gente todavía se preguntaba si era posible atravesar los siete puentes y volver al punto de partida sin cruzar ninguno de ellos más de una vez. En 1736, el matemático suizo Leonhard Euler demostró que era imposible encontrar un camino que cumpliera estos requisitos.

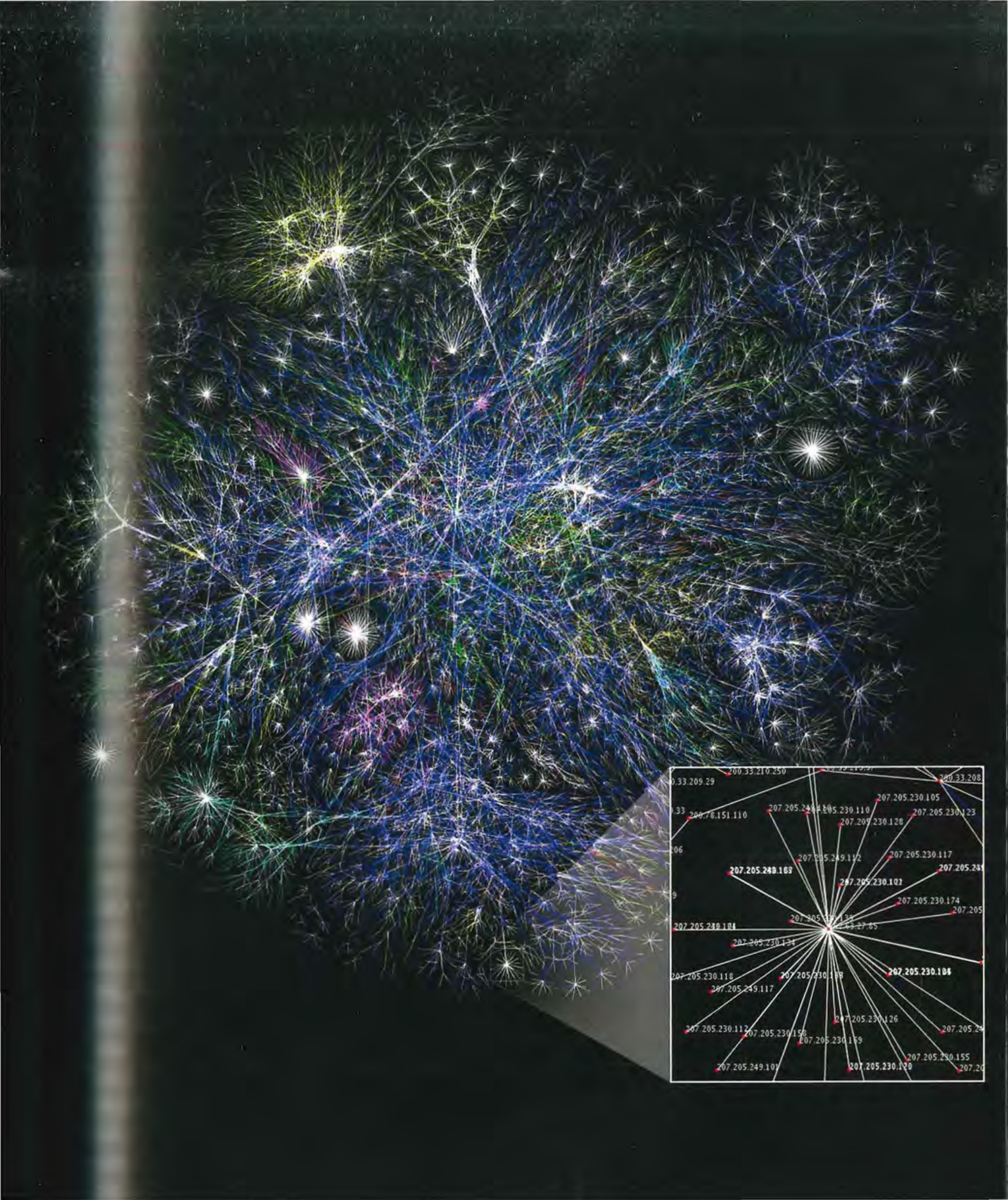
Euler representó el problema con un grafo: los puntos representaban las zonas de tierra y las líneas, los puentes. Demostró que un grafo así sólo se podía recorrer pasando por cada segmento una sóla vez si el grafo tenía menos de tres vértices de valencia impar (la valencia de un vértice es el número de líneas que comienzan o finalizan en él). El grafo de los puentes de Königsberg no presentaba las características apropiadas, de modo que no es posible recorrer el grafo sin cruzar al menos una línea más de una vez. Euler generalizó sus conclusiones a recorridos por cualquier red de puentes.

La importancia del problema de los puentes de Königsberg en la historia de las matemáticas se debe a que la solución de Euler se corresponde con el primer teorema de la teoría de grafos. En la actualidad, la teoría de grafos se utiliza en campos muy diversos, desde el estudio de las estructuras químicas y la fluidez del tráfico hasta las redes sociales de los usuarios de Internet. Puede llegar a explicar el modo en que se propagan las enfermedades de transmisión sexual. Las sencilla representación de Euler, sin tener en cuenta elementos específicos como la longitud de los mismos, se convirtió en precursora de la topología, el campo matemático que estudia las formas y sus relaciones.



VÉASE TAMBIÉN La fórmula de Euler para los poliedros (1751), El juego icosiano (1857), La cinta de Möbius (1858), La conjetura de Poincaré (1904), El teorema de la curva de Jordan (1905) y El juego del drago (1967).

IZQUIERDA: *Una ruta posible para cuatro de los siete puentes de Königsberg.* DERECHA: *Mapa parcial de Internet, de Matt Britt. Las longitudes de las líneas señalan la demora entre dos nodos. Los colores indican el tipo de nodo; por ejemplo, comercial, gubernamental, militar o educativo.*


200.33.210.250
0.33.209.29
200.78.151.110
207.205.230.105
207.205.230.110
207.205.230.123
207.205.230.128
207.205.249.112
207.205.230.117
207.205.230.174
207.205.230.134
207.205.230.118
207.205.249.117
207.205.230.126
207.205.230.112
207.205.230.155

1738

La paradoja de San Petersburgo

Daniel Bernoulli (1700–1782)

Daniel Bernoulli, matemático, físico y médico nacido en Holanda y de origen suizo, escribió un artículo fascinante sobre probabilidad que se publicó en 1738 en la revista de la Academia Imperial de Ciencias de San Petersburgo. El artículo planteaba la paradoja que en la actualidad se conoce como paradoja de San Petersburgo, que puede plantearse de forma sencilla en términos de un juego de «cara o cruz» en el que se gana dinero en función de los resultados obtenidos y en el que se paga una cantidad por entrar en el juego. Filósofos y matemáticos han debatido durante años sobre cuál debería ser el precio justo por incorporarse al juego. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por participar?

Veamos una forma de interpretar el asunto. Se lanza una moneda hasta obtener una cruz. El número total de lanzamientos realizados, n, determina el premio, que será 2^n dólares. Así, si sale «cruz» en la primera tirada, el premio será de dos dólares $2^1 = 2$, y el juego concluye. Si el primer resultado es «cara», se lanza la moneda de nuevo. Si en este segundo lanzamiento el resultado es «cruz», el premio será de cuatro dólares 2^2, $= 4$, y el juego concluye. Y así sucesivamente. Una discusión detallada de la paradoja de este juego está más allá del alcance de este libro, pero, según la teoría de juegos, un «jugador racional» debería aceptar participar en el juego si y sólo si el precio a pagar por participar fuera menor que el valor esperado de las ganancias. En algunos análisis del juego de San Petersburgo, cualquier precio finito por participar es menor que el valor esperado de las ganancias, y es posible que un jugador racional desee jugar por grande que sea el precio que se exige por participar.

Peter Bernstein señala, acerca de la profundidad de la paradoja de Bernoulli: «Su artículo es uno de los documentos más profundos jamás escritos, no sólo acerca de la noción de riesgo sino acerca de la conducta humana. El énfasis que pone Bernoulli en las complejas relaciones entre matemáticas y conducta puede aplicarse a casi cualquier aspecto de la vida».

VÉASE TAMBIÉN Las paradojas de Zenón (c. 445 a. C.), La paradoja de la rueda de Aristóteles (c. 320 a. C.), La ley de los grandes números (1713), La paradoja del barbero (1901), La paradoja de Banach-Tarski (1924), El hotel infinito de Hilbert (1925), La paradoja del cumpleaños (1939), La paradoja de la línea de costa (c. 1950), La paradoja de Newcomb (1960) y La paradoja de Parrondo (1999)

Desde la década de 1730, filósofos y matemáticos han reflexionado acerca de la paradoja de San Petersburgo. Según algunos análisis, un jugador puede tener expectativas de ganar una cantidad ilimitada de dinero. ¿Cuánto estaría usted dispuesto a pagar por participar en este juego?


THE UNITED STATES OF AMERICA
ONE
ONE DOLLAR

1742

La conjetura de Goldbach

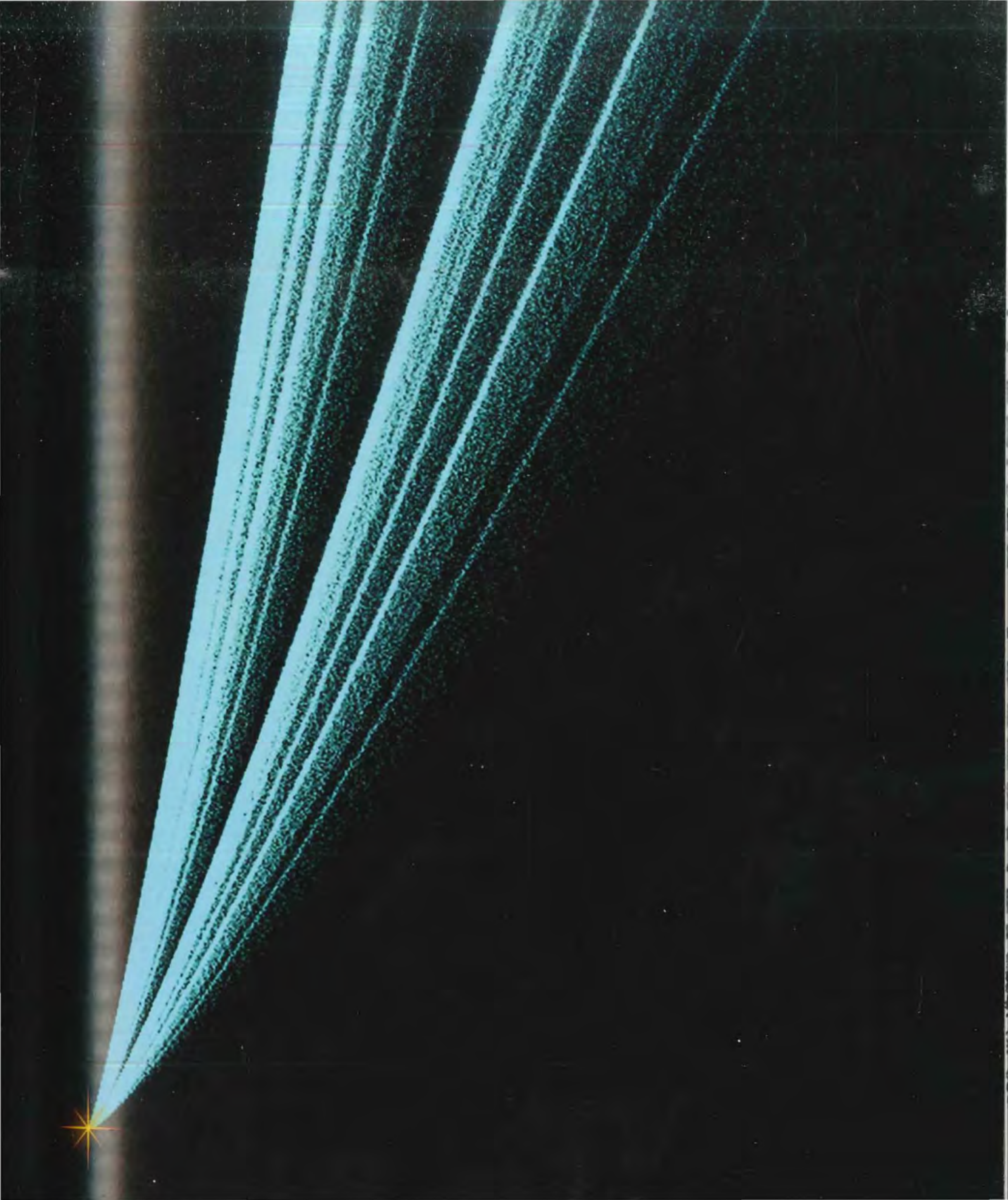
Christian Goldbach (1690–1764), **Leonhard Paul Euler** (1707–1783)

A veces, los problemas matemáticos más estimulantes son aquellos de planteamiento más sencillo. En 1742 el historiador y matemático prusiano Christian Goldbach conjeturó que cualquier número entero mayor que 5 puede escribirse como la suma de tres números primos, como por ejemplo 21 = 11 + 7 + 3. (Un número primo es un número mayor que 1 que sólo es divisible por sí mismo y por el 1, como el 5 y el 13.) Leonhard Euler replanteó la conjetura de forma equivalente (en lo que se conoce como conjetura «fuerte» de Goldbach) del siguiente modo: todo número par mayor que 2 puede expresarse como suma de dos números primos. Para promocionar la novela *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture*, la editorial Faber and Faber ofreció un premio de un millón de dólares a cualquiera que fuera capaz de demostrar la conjetura de Goldbach entre el 20 de marzo de 2000 y el 20 de marzo de 2002: el premio quedó sin entregar y la conjetura sigue sin demostrarse. En 2008, Tomás Oliveira e Silva, un investigador de la universidad de Aveiro, en Portugal, se sirvió de un ordenador para verificar la conjetura hasta $12 \cdot 10^{17}$.

Pero no hay ningún ordenador, por potente que sea, capaz de confirmar la conjetura para cualquier número, así que los matemáticos siguen esperando una demostración auténtica de que Goldbach estaba en lo cierto. En 1966, Chen Jing-Run, un matemático chino, logró algún avance al demostrar que cualquier número par suficientemente grande es la suma de un número primo y de otro número que es el producto de, a lo sumo, dos primos. Así, por ejemplo, 18 es igual a 3 + (3 × 5). En 1995, el matemático francés Olivier Ramaré demostró que cualquier número par a partir de 4 es la suma de un máximo de seis números primos.

VÉASE TAMBIÉN Números primos generados por cigarras (c. 1 millón a. C.), La criba de Eratóstenes (c. 240 a. C.), La construcción de un heptadecágono regular (1796), Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801), La hipótesis de Riemann (1859), La demostración del teorema de los números primos (1896), La constante de Brun (1919), La conjetura de Gilbreath (1958), La espiral de Ulam (1963), Erdös y la colaboración extrema (1971), Criptografía de clave pública (1977) y La conjetura de Andrica (1985).

La nube de puntos conocida como «cometa de Goldbach» ilustra el número de maneras diferentes (eje x) de escribir un número par n *(eje y) como la suma de dos números primos (4 ≤ n ≤ 1.000.000). La estrella de la parte inferior izquierda se encuentra en el 0.0. El eje x va desde 0 hasta 15.000, aproximadamente.*



1748

Las *Instituzioni Analitiche* de Agnesi

Maria Gaetana Agnesi (1718–1799)

La matemática italiana Maria Agnesi es la autora de *Instituzioni analitiche* (Instituciones analíticas), que es el primer manual sistemático sobre cálculo diferencial y cálculo integral y la obra matemática más antigua que se conserva de entre las escritas por mujeres. El matemático holandés Dirk Jan Struik se refirió a Agnesi como «la primera matemática importante tras la muerte de Hypatia en el siglo V».

Agnesi fue una niña prodigio: se sabe que a los trece años hablaba al menos siete idiomas. Durante gran parte de su vida evitó las relaciones sociales y se dedicó por entero al estudio de las matemáticas y la religión. Según Clifford Truesdell, «le pidió permiso a su padre para meterse monja. Horrorizado ante la posibilidad de que su hija adorada quisiera abandonarlo, su padre le suplicó que cambiara de opinión». Aceptó seguir viviendo con su padre con la condición de mantenerse aislada del mundo.

La publicación de *Instituzioni analitiche* causó sensación en el mundo académico. El comité de la Academia de Ciencias de París dejó escrito que «fue necesaria una gran dosis de habilidad y sagacidad para reducir a métodos casi uniformes todos estos descubrimientos dispersos en los trabajos de tantos matemáticos modernos, muchos de los cuales estaban presentados mediante métodos muy diferentes. El orden, la claridad y la precisión reinan en todas las partes de este trabajo. Lo consideramos el mejor tratado que se ha escrito, el más completo». El libro incluye además una discusión acerca de la curva cúbica que hoy conocemos como «bruja de Agnesi», y cuya expresión es: $y = 8a^3/(x^2 + 4a^2)$.

El presidente de la Academia de Bolonia invitó a Agnesi a aceptar la cátedra de matemáticas de la Universidad de Bolonia. Según algunas fuentes, no llegó a presentarse: en aquella época, Agnesi estaba completamente dedicada a la religión y a las obras de caridad. A pesar de todo, este hecho la convierte en la segunda mujer propuesta para un puesto de profesora universitaria; la primera fue Laura Bassi (1711–1778). Agnesi dedicó todo su dinero a ayudar a los más necesitados; murió en un asilo, en la más absoluta pobreza.

VÉASE TAMBIÉN La muerte de Hypatia (415), El descubrimiento del cálculo (c. 1665), El análisis de lo infinitamente pequeño de L'Hôpital (1696) y El doctorado de Kovalevskaya (1874).

Frontispicio de Instituzioni analitiche (Instituciones analíticas), *el primer manual sistemático sobre cálculo diferencial y cálculo integral y la obra matemática más antigua que se conserva de entre las escritas por mujeres.*

INSTITUZIONI ANALITICHE

AD USO

DELLA GIOVENTU' ITALIANA

DI D.NA MARIA GAETANA AGNESI

MILANESE

Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.

TOMO I.



IN MILANO, MDCCXLVIII.

NELLA REGIA-DUCAL CORTE.

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

1751

La fórmula de Euler para los poliedros

Leonhard Paul Euler (1707–1783), **René Descartes** (1596–1650), **Paul Erdös** (1913–1996)

La fórmula de Euler para los poliedros se considera una de las fórmulas más hermosas de la historia de las matemáticas y una de las primeras grandes fórmulas de la topología (el estudio de las formas y sus relaciones). Una encuesta entre los lectores de la revista *Mathematical Intelligencer* la situó en el segundo lugar en el listado de las fórmulas más bellas de la historia, después de la fórmula de Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$, de la que hablamos en el capítulo **El número de Euler, *e*** (1727).

En 1751 el matemático y físico suizo Leonhard Euler descubrió que todo poliedro (objeto con caras planas y aristas rectas) convexo de C caras, V vértices y A aristas satisface la ecuación C + V - A = 2. Un poliedro es convexo si no tiene ni «agujeros» ni «abolladuras», o más formalmente, si cada segmento que conecta puntos interiores está contenido por completo en el interior del objeto.

Por ejemplo, la superficie de un cubo tiene seis caras, ocho vértices y doce aristas. Si introducimos estos valores en la fórmula de Euler, obtenemos 6 + 8 - 12 = 2. En el caso de un dodecaedro obtenemos 12 + 20 - 30 = 2. Curiosamente, en torno al año 1639, René Descartes descubrió una fórmula relacionada que puede convertirse en la fórmula de Euler si se siguen los pasos matemáticos adecuados.

La fórmula del poliedro se generalizó más tarde al estudio de redes y grafos, y ayudó a que los matemáticos comprendieran una gran variedad de formas geométricas con «agujeros» y en dimensiones superiores. La fórmula, además, facilita muchas aplicaciones prácticas de las que se sirven, por ejemplo, especialistas informáticos (para hallar formas de estructurar circuitos eléctricos) o cosmólogos (para estudiar modelos que reproducen la forma del universo).

En la historia de las matemáticas, sólo el húngaro Paul Erdös fue más prolífico que Euler si tomamos como referencia el número de publicaciones. Por desgracia, Euler perdió la vista al final de su vida. En cualquier caso, el divulgador científico inglés David Darling señala que «la cuantía de su producción parecía inversamente proporcional a la calidad de su vista, porque su tasa de publicación aumentó después de que quedara casi totalmente ciego en 1766».

VÉASE TAMBIÉN Los sólidos platónicos (c. 350 a. C.), Los poliedros arquimedianos (c. 240 a. C.), El número de Euler, e (1727), Los puentes de Königsberg (1736), El juego icosiano (1857), El teorema de Pick (1899), La cúpula geodésica (1922), El poliedro de Császár (1949), Erdös y la colaboración extrema (1971), El poliedro de Szilassi (1977), Spidrones (1979) y La solución al holihedro (1999).

Los poliedros no convexos, como este pequeño dodecaedro estrellado de Teja Krašek, pueden tener características de Euler (es decir, el valor de C + V - A) distintas de 2. Aquí, C = 12, V = 12 y A = 30, de modo que la característica es -6.



1751

El problema de la división del polígono de Euler

Leonhard Paul Euler (1707–1783)

En 1751 el matemático suizo Leonhard Paul Euler planteó el siguiente problema a su colega prusiano Christian Goldbach (1690–1764): Dado un polígono convexo de n lados, ¿de cuántas maneras puede dividirse en triángulos siguiendo sus diagonales? O, con una expresión más informal: ¿de cuántas maneras puede cortarse una tarta poligonal en triángulos si los cortes, rectos, van siempre de una esquina a otra? La condición es que los cortes no pueden cruzarse. Si llamamos E_n al número buscado, la fórmula hallada por Euler es la siguiente:

$$E_n = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \ldots (4n-10)}{(n-1)!}$$

Un polígono es convexo si para todo par de puntos del polígono, el segmento que los conecta está contenido por completo en el polígono. El autor y matemático Heinrich Dörrie afirma que «el enorme interés de este problema estriba en que, a pesar de su apariencia inocua, implica muchas dificultades, como muchos lectores descubrirán con sorpresa. El mismo Euler dijo: «El proceso de inducción que utilicé para resolverlo resultó bastante laborioso».

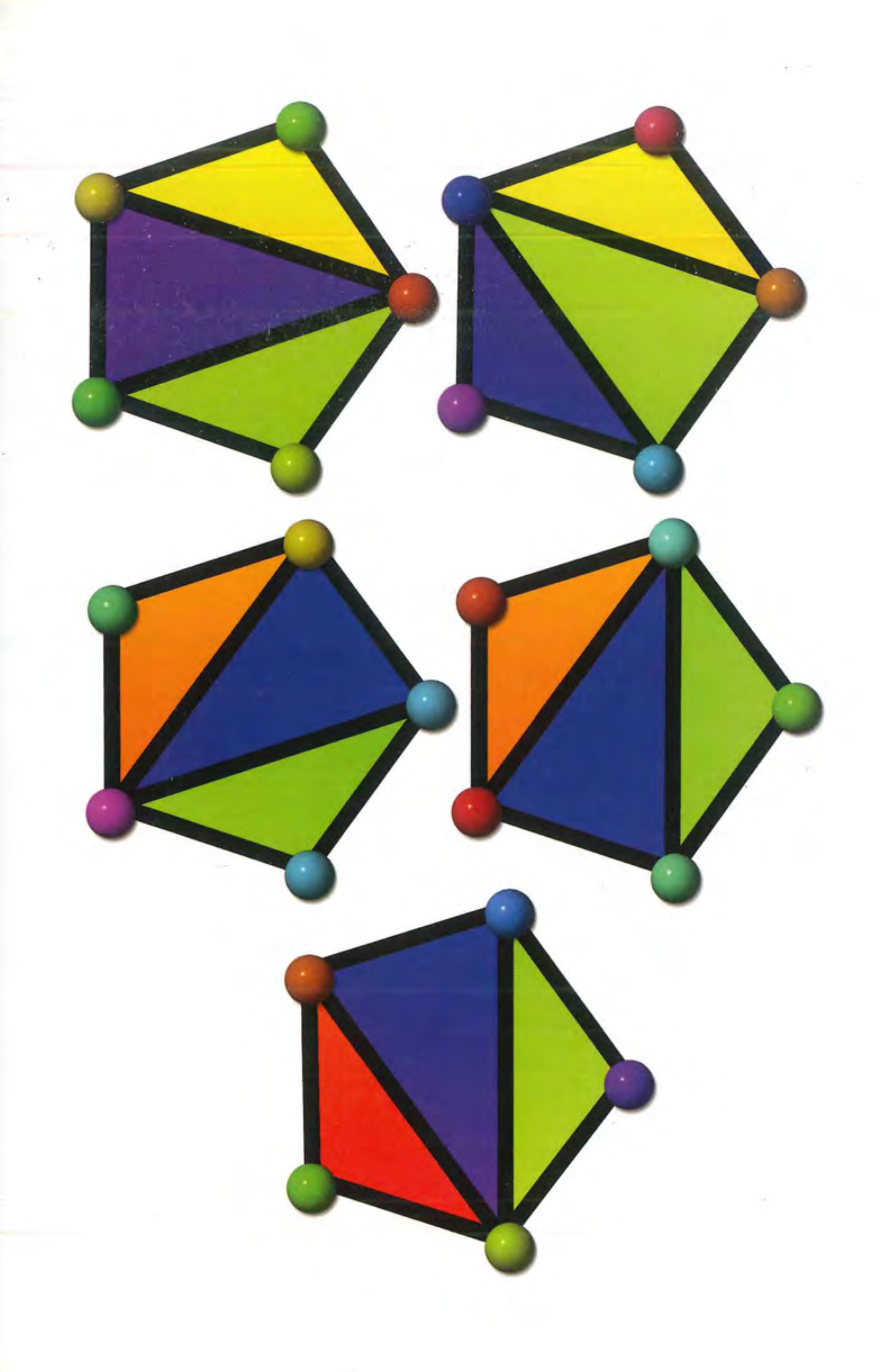
Para un cuadrado, por ejemplo, tenemos $E_4 = 2$, que se corresponde con las dos diagonales. En el caso de un pentágono encontramos que $E_5 = 5$. De hecho, los primeros matemáticos que intentaron demostrarlo se mostraron proclives a utilizar representaciones gráficas para acercarse a una solución intuitiva, pero la aproximación visual se hace inviable enseguida, a medida que crece el número de lados del polígono. Cuando llegamos a un polígono de nueve lados, nos encontramos con 429 maneras de dividir el polígono de la forma indicada.

El problema de la división del polígono ha atraído mucha atención. En 1758, el matemático alemán Johann Andreas Segner (1704–1777), nacido en la actual Bratislava, desarrolló una fórmula de recurrencia para determinar los valores: $E_n = E_2E_{n-1} + E_3E_{n-2} + \ldots + E_{n-1}E_2$. Una fórmula de recurrencia es aquella en la que cada término de la sucesión se define en función de los términos anteriores.

Debemos señalar que los valores de E_n están íntimamente ligados a otra clase de números denominados números de Catalan ($E_n = C_{n-1}$). Los números de Catalan surgen en combinatoria, el campo de las matemáticas que se dedica a los problemas de selección, disposición y operación dentro de un sistema finito o discreto.

VÉASE TAMBIÉN Arquímedes: arena, ganado y el *stomachion* (c. 250 a. C.), La conjetura de Goldbach (1742), El teorema de las trisectrices de Morley (1899) y La teoría de Ramsey (1928).

Un pentágono regular puede dividirse en triángulos, mediante diagonales, de cinco formas diferentes.



1759

El problema del caballo

Abraham de Moivre (1667–1754), **Leonhard Paul Euler** (1707–1783), **Adrien-Marie Legendre** (1752–1833)

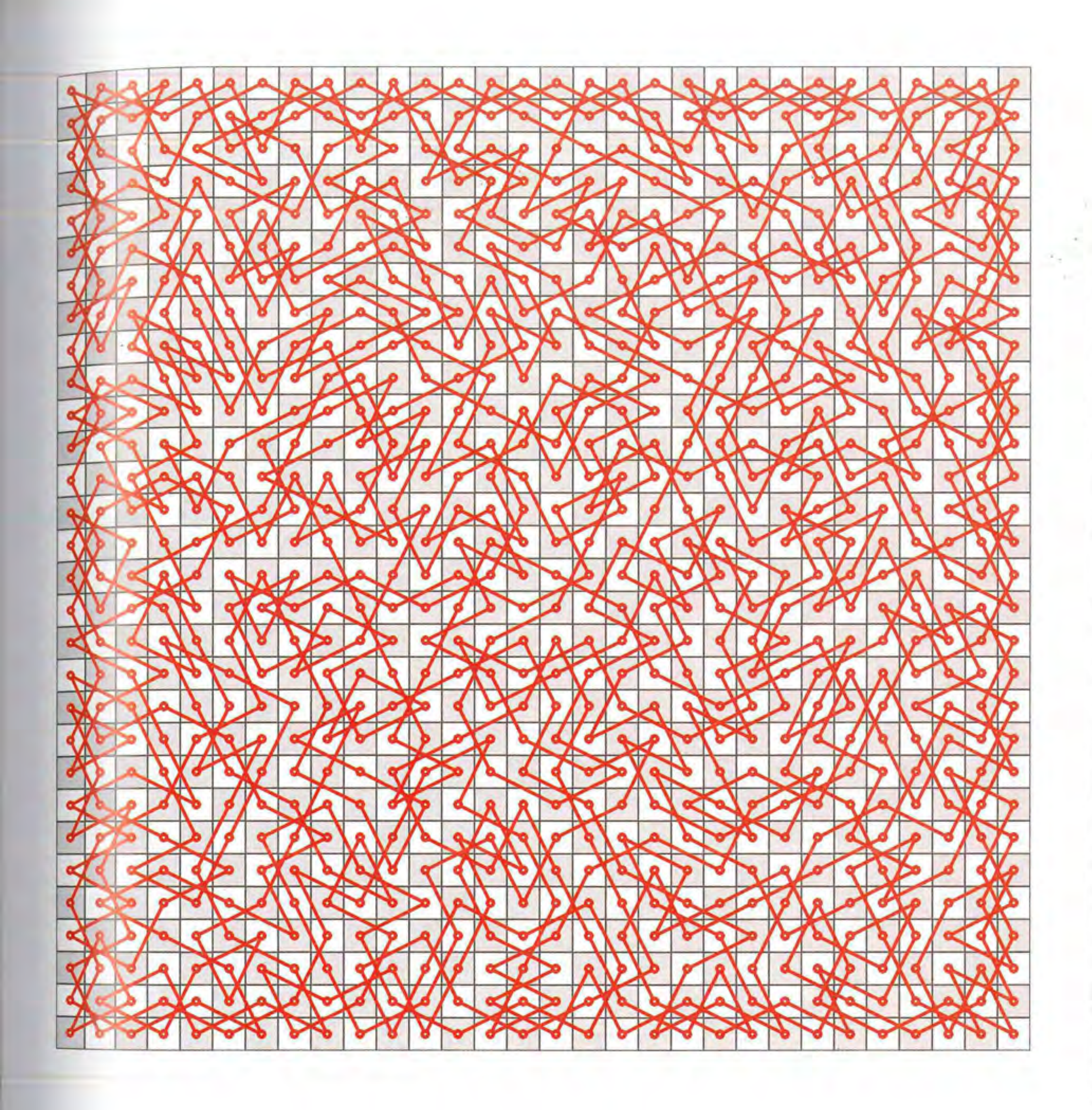
El problema del caballo consiste en lograr que un caballo de ajedrez, con su movimiento en forma de «L», pase por cada uno de los sesenta y cuatro escaques (casillas) de un tablero de ajedrez sin repetir ninguno. Este tipo de problema ha fascinado a los matemáticos durante siglos. El primero en dar una solución fue Abraham de Moivre, un matemático francés que debe su fama a **la curva de distribución normal** y a sus teoremas relacionados con los números complejos. En su solución, el caballo termina su «paseo» en un escaque muy alejado de la posición de partida. El matemático francés Adrien-Marie Legendre «mejoró» esta solución con otra en la que el primer y último escaque se encuentran a un sólo movimiento de distancia, de modo que el paseo del caballo se cierra en una especie de bucle formado por sesenta y cuatro movimientos. Se dice que una solución así es cíclica. El matemático suizo Leonhard Euler encontró un paseo cíclico tal que cubre por completo una de las mitades del tablero antes de pasar a la otra.

Euler fue el primero en escribir un artículo acerca del problema del caballo. Presentó el artículo a la Academia de Ciencias de Berlín en 1759, pero este influyente trabajo no se publicó hasta 1766. Debemos destacar que, en 1759, la Academia propuso un premio de cuatro mil francos para la mejor monografía acerca de este problema, pero el premio nunca fue concedido, quizás porque Euler era el Director de Matemáticas de la Academia de Berlín, y por tanto no podía recibirlo.

Mi solución favorita para el problema es una que utiliza un cubo cuyas caras representan seis tableros de ajedrez. Henry E. Dudeney ofreció una solución en su libro *Amusement in Mathematics*. Creo que basó su solución (en la que las seis caras se recorren de manera sucesiva) en un trabajo anterior del matemático francés Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796). Se han estudiado soluciones al problema del caballo en tableros de ajedrez representados sobre un cilindro, sobre una **cinta de Möbius**, sobre un toro y sobre una **botella de Klein**, e incluso dimensiones superiores.

VÉASE TAMBIÉN La cinta de Möbius (1858), La botella de Klein (1882) y La curva de Peano (1890).

El informático Dmitry Brant descubrió una solución al problema del caballo para un tablero de ajedrez de 30 x 30 escaques utilizando una red neuronal, es decir, un grupo interconectado de neuronas artificiales que trabajan de forma coordinada para obtener la solución.



1761

El teorema de Bayes

Thomas Bayes (c. 1702–1761)

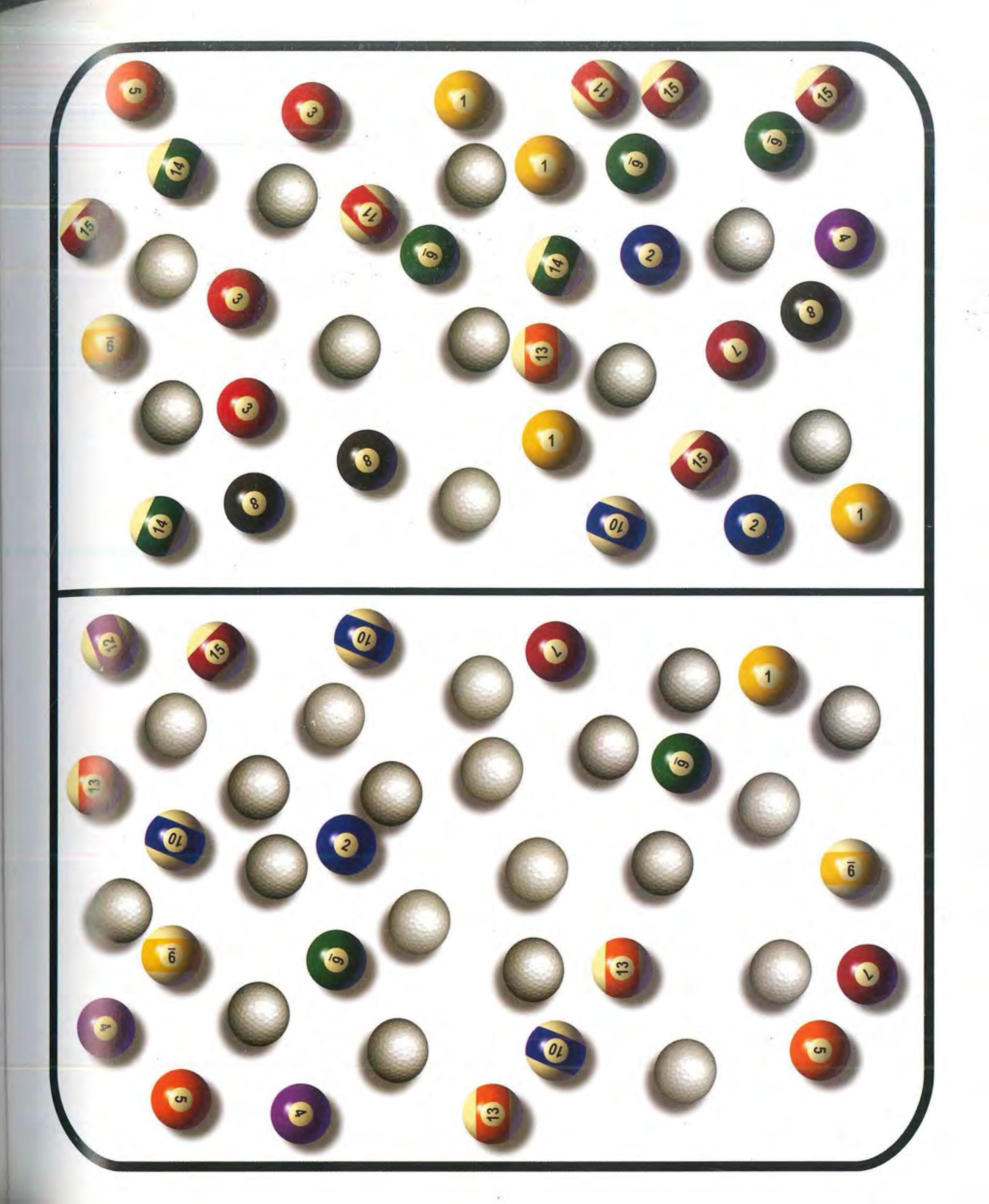
El teorema de Bayes, que debe su nombre al matemático y pastor presbiteriano inglés Thomas Bayes, desempeña un papel fundamental en la ciencia y puede formularse mediante una expresión matemática muy sencilla que se utiliza para calcular probabilidades condicionadas. El término «probabilidad condicionada» hace referencia a la probabilidad de que ocurra un suceso A habiendo ocurrido otro suceso B, y se expresa formalmente como $P(\mathrm{A}|\mathrm{B})$. El teorema de Bayes afirma lo siguiente: $P(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = [P(\mathrm{B}|\mathrm{A}) \times P(\mathrm{A})]/P(\mathrm{B})$. Aquí, $P(\mathrm{A})$ es la probabilidad a *priori* de A es decir, la probabilidad de que suceda A con independencia de lo que sepamos acerca de B. $P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$ es la probabilidad de B condicionada a la ocurrencia de A. $P(\mathrm{B})$, la probabilidad a *priori* de B.

Imaginemos que tenemos dos cajas. La caja 1 contiene diez pelotas blancas y treinta negras. La caja 2 contiene veinte de cada color. Seleccione una caja al azar y extraiga una bola. Asumimos que las pelotas son indistinguibles, salvo por su color. La pelota extraída resulta ser negra. ¿Cuál es la probabilidad de que se haya elegido la caja 1? ¿Es decir, cuál es la probabilidad de haber escogido la caja 1, si tenemos en cuenta que la pelota que tiene en la mano es negra?

El acontecimiento A corresponde a «haber elegido la caja 1». El acontecimiento B corresponde a «extraer una pelota negra». Queremos calcular $P(\mathrm{A}|\mathrm{B})$. $P(\mathrm{A})$ es 0,5, es decir, el 50%. $P(\mathrm{B})$ es la probabilidad de escoger una pelota negra con independencia de cualquier información acerca de las cajas. Se calcula como la suma de la probabilidad de extraer una pelota negra de una de las cajas multiplicada por la probabilidad de seleccionar esa caja. La probabilidad de extraer una pelota negra de la caja 1 es 0,75. La probabilidad de extraer una pelota negra de la caja 2 es 0,5. La probabilidad total de extraer una pelota negra es $0{,}75 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}625$. $P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$, o la probabilidad de extraer una pelota negra dado que se ha elegido la caja 1, es 0,75. Podemos utilizar la fórmula de Bayes para descubrir que la probabilidad de haber escogido la caja 1 es $P(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = 0{,}6$.

VÉASE TAMBIÉN La ley de los grandes números (1713) y La *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace (1812).

Ejemplo del texto con bolas de billar y pelotas de golf. Seleccionamos una caja al azar y extraemos una bola de billar. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de la caja 1?



1769

El cuadrado mágico de Franklin

Benjamin Franklin (1706–1790)

Benjamin Franklin fue científico, inventor, hombre de estado, impresor, filósofo, músico y economista. En 1769, en una carta a un colega, describe un **cuadrado mágico** que había creado en un momento anterior de su vida.

Su cuadrado mágico de 8 x 8 casillas está repleto de simetrías asombrosas de las que seguramente él mismo no se dio cuenta. La suma de cada fila y de cada columna es 260. La suma de la mitad de cada fila o columna es la mitad de 260. Además, cada una de las filas dobladas suma 260. Los cuadrados marcados en gris constituyen dos ejemplos de filas dobladas. Los cuadrados con un borde negro son un ejemplo de *fila doblada discontinua* (14 + 61 + 64 + 15 + 18 + 33 + 36 + 19), que también suma 260. Pueden hallarse muchas otras simetrías. Por ejemplo, los números de las cuatro esquinas sumados a los cuatro números centrales dan como resultado 260; la suma de cualquier subcuadrado de 2 x 2 es 130; y la suma de cuatro números cualesquiera equidistantes del centro del cuadrado también da como resultado 130. Si se transforman en números binarios, los resultados resultan aún más sorprendentes. Y sin embargo, a pesar de todas estas maravillosas simetrías, las diagonales mayores no suman 260, de modo que este cuadrado no cumple las condiciones estrictas de un cuadrado mágico, al menos si nos guiamos por las definiciones habituales.

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

No sabemos de qué método se sirvió Franklin para construir sus cuadrados. Muchos han tratado de desvelar el secreto, pero no se encontró ninguna receta hasta la década de 1990, a pesar de que Franklin aseguraba que podía generar cuadrados así «con la misma velocidad con la que escribía». En 1991, el autor Lalbhai Patel inventó un método para construir los cuadrados de Franklin. El método parece bastante largo, pero Patel lo ha practicado hasta poder llevarlo a cabo con velocidad. El cuadrado mágico de Franklin ofrece tantos patrones extraordinarios que ha terminado convirtiéndose en una metáfora de los objetos matemáticos para los que se siguen hallando simetrías y otras propiedades mucho después de la muerte de su descubridor.

VÉASE TAMBIÉN Cuadrados mágicos (c. 2200 a. C.) y El hipercubo mágico perfecto (1999).

Retrato de Benjamin Franklin *(1767), obra de David Martin (1737-1797).*



Superficie mínima

Leonhard Paul Euler (1707–1783), **Jean Meusnier** (1754–1793), **Heinrich Ferdinand Scherk** (1798–1885)

Imagine que extrae un anillo plano hecho de alambre, de un cubo de agua con jabón. Dado que sobre el anillo se forma una película de jabón con forma de disco, cuya área es menor que la de otras formas hipotéticas que pudieran haber aparecido, los matemáticos dicen que se trata de una superficie mínima. Más formalmente, una superficie mínima finita suele caracterizarse como la de menor área posible de entre todas las delimitadas por una o varias curvas cerradas. La curvatura media de la superficie es cero. Durante más de dos siglos los matemáticos han buscado superficies mínimas y las pruebas de que realmente lo son. Las superficies mínimas cuyas curvas delimitadoras serpentean en tres dimensiones pueden resultar tan hermosas como complejas.

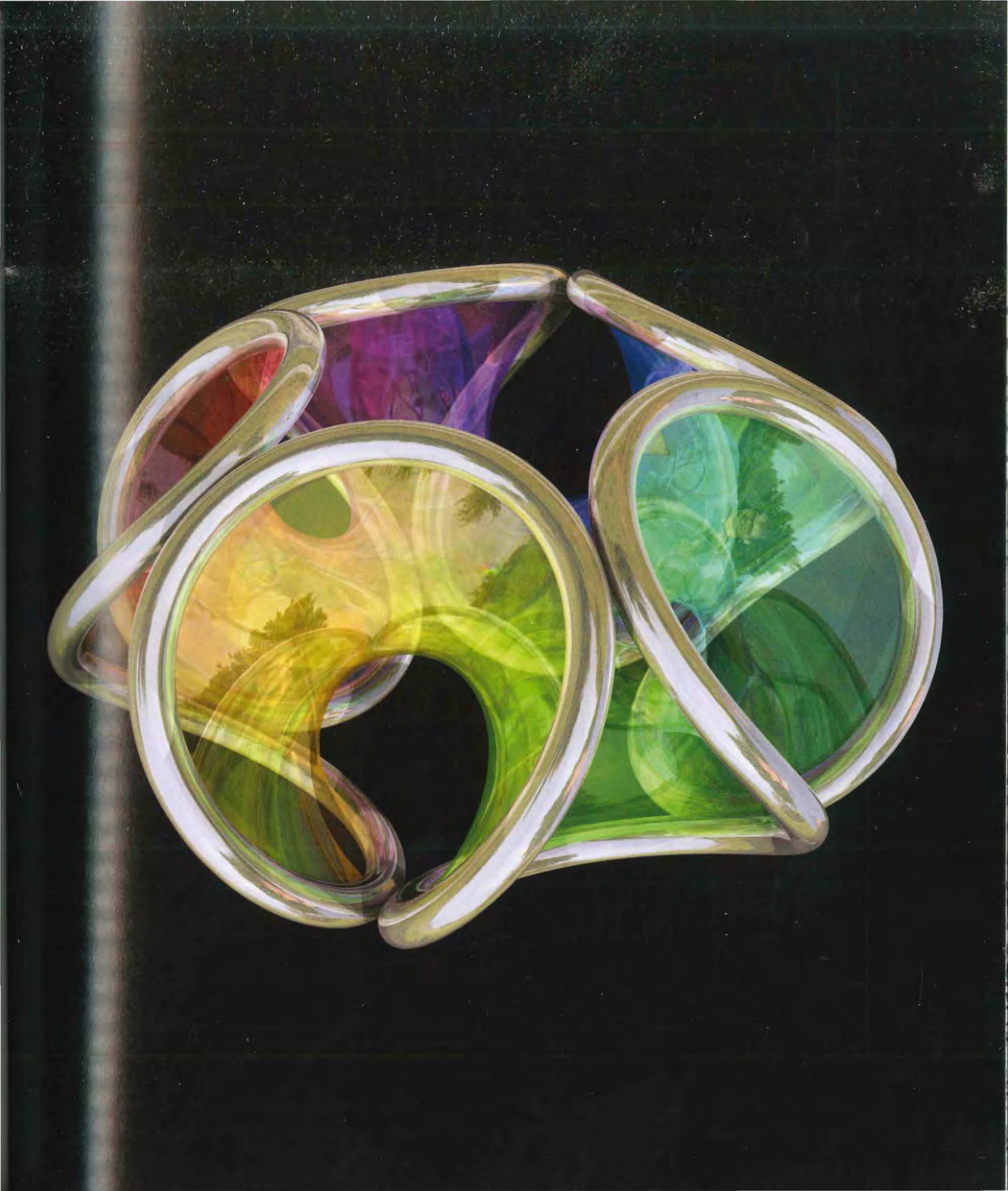
En 1744, el matemático suizo Leonhard Euler descubrió la catenoide, el primer ejemplo no trivial de superficie mínima. En 1776, Jean Meusnier descubrió otra superficie mínima, la helicoide. (Meusnier, experto en geometría, fue además general del ejército y el diseñador del primer globo de forma elíptica propulsado por una hélice para transporte de seres humanos).

Hasta 1873 no se descubrió otra superficie mínima: lo logró el matemático alemán Heinrich Scherk. Aquel mismo año, el físico belga Joseph Plateau llevó a cabo los experimentos que lo llevaron a conjeturar que las películas de jabón forman siempre superficies mínimas. El conocido como «problema de Plateau» lidia con las matemáticas necesarias para demostrar que esta conjetura es cierta. (Plateau perdió la vista después de mirar al sol durante veinticinco segundos como parte de un experimento sobre fisiología de la vista). Entre los ejemplos más recientes se incluye la superficie mínima de Costa, descrita por el matemático brasileño Celso Costa en 1982.

Los ordenadores y los gráficos por ordenador desempeñan hoy un papel de gran ayuda para que los matemáticos construyan superficies mínimas, algunas de las cuales pueden resultar bastante complicadas de visualizar. Es posible que las superficies mínimas lleguen a tener algún día numerosas aplicaciones en ciencia de materiales y nanotecnología. Ciertos polímeros, por ejemplo, interactúan formando superficies mínimas. El conocimiento de la forma de estas superficies puede ser muy útil para determinar sus propiedades químicas.

VÉASE TAMBIÉN La trompeta de Torricelli (1641), La pseudoesfera de Beltrami (1868) y La superficie de Boy (1901).

La superficie de Enneper en versión de Paul Nylander. Esta superficie mínima la descubrió, alrededor del año 1863, el matemático alemán Alfred Enneper (1830–1885).



La aguja de Buffon

Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon (1707–1788)

Los métodos de Montecarlo, llamados así por la villa monegasca y su famoso casino, desempeñan un papel esencial tanto en las matemáticas como en la ciencia en general. Utilizan el azar para resolver problemas diversos, desde la estadística de las reacciones nucleares en cadena hasta la regulación del tráfico.

Uno de los primeros usos de estos métodos, y también uno de los más célebres, se dio a conocer en el siglo XVIII, cuando el conde de Buffon, naturalista y matemático francés, demostró que si se dejaba caer una aguja repetidas veces sobre una hoja de papel pautado y se contaba el número de veces que la aguja tocaba una de las rayas, se podía obtener una buena estimación del valor de la constante matemática π (π = 3,1415…). En el caso más simple, imaginemos que se deja caer un palillo sobre un suelo de parqué cuya separación entre líneas es idéntica al tamaño del palillo. Para hallar un valor aproximado de π por este método, basta con tener en cuenta el número de lanzamientos del palillo, mulltiplicarlo por dos y a continuación dividirlo por el número de veces que el palillo toca una de las líneas.

Buffon fue un hombre de muchos talentos. Su *Histoire naturelle, générale et particulière* (Historia natural, general y particular) consta de treinta y seis volúmenes que abarcan todo el conocimiento de la época acerca del mundo natural, y tanto Charles Darwin como su teoría de la evolución recibieron su influencia.

En la actualidad, los ordenadores son capaces de generar enormes cantidades de números pseudoaleatorios por segundo, lo que permite que los científicos extraigan un rendimiento máximo de los métodos de Montecarlo a la hora de comprender problemas relacionados con economía, física, química, predicciones sobre la estructura de las proteínas, formación de galaxias, inteligencia artificial, terapia para el cáncer, predicciones bursátiles, exploración petrolífera y diseño de formas aerodinámicas, así como diversos problemas matemáticos para los que no funciona ningún otro método.

En tiempos recientes, estos métodos han recibido gran atención por parte de matemáticos y físicos tan eminentes como Stanislaw Ulam, John von Neumann, Nicholas Metropolis y Enrico Fermi. Fermi se sirvió de ellos para estudiar las propiedades del neutrón. Los métodos de Montecarlo resultaron cruciales en las simulaciones necesarias para el proyecto Manhattan, el programa estadounidense de la Segunda Guerra Mundial que tenía como objetivo construir una bomba atómica.

VÉASE TAMBIÉN Dados (c. 3000 a. C.), π (c. 250 a. C.), La ley de los grandes números (1713), La curva de distribución normal (1733), La *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace (1812), El desarrollo de las máquinas de aleatorización (1938), El método del cuadrado medio de Von Neumann (1946) y Selección de triángulos en una esfera (1982).

Retrato de Georges-Louis Leclerc, conde de Buffon, obra de François-Hubert Drouais (1727–1775).



1779

El problema de los treinta y seis oficiales

Leonhard Paul Euler (1707–1783), **Gaston Tarry** (1843–1913)

Imaginemos seis regimientos militares, cada uno compuesto por seis oficiales de distinto rango. En 1779, Leonard Euler se preguntó si sería posible organizar a estas treinta y seis personas en un cuadrado 6 x 6 de modo que todos los rangos y todos los regimientos estuvieran representados una vez en todas las filas y en todas las columnas. En lenguaje matemático, el problema equivale a hallar dos cuadrados latinos de orden seis mutuamente ortogonales. Euler conjeturó que el problema no tenía solución, y estaba en lo cierto: el matemático francés Gaston Tarry lo demostró en 1901. A lo largo de los siglos, el problema ha dado lugar a una importante cantidad de trabajos de combinatoria, el área de las matemáticas que se ocupa de la selección y ordenación de elementos. Los cuadrados latinos desempeñan también un papel decisivo en las comunicaciones y en los códigos de corrección de errores.

Un cuadrado latino de orden n consiste en n secuencias de los números del 1 al n, dispuestos en un cuadrado de modo que en ninguna fila y en ninguna columna se repitan dos números. El número de cuadrados latinos, si comenzamos desde el orden $n = 1$ son 1, 2, 12, 576, 161.280, 812.851.200, 61.479.419.904.000, 108.776.032.459.082.956.800 y así sucesivamente.

Se dice que una pareja de cuadrados latinos es ortogonal si las n^2 parejas que se forman yuxtaponiendo ambos son todas distintas. (La yuxtaposición hace referencia a la combinación de dos números para formar un par ordenado.) Por ejemplo, los siguientes cuadrados latinos de orden 3 son ortogonales:

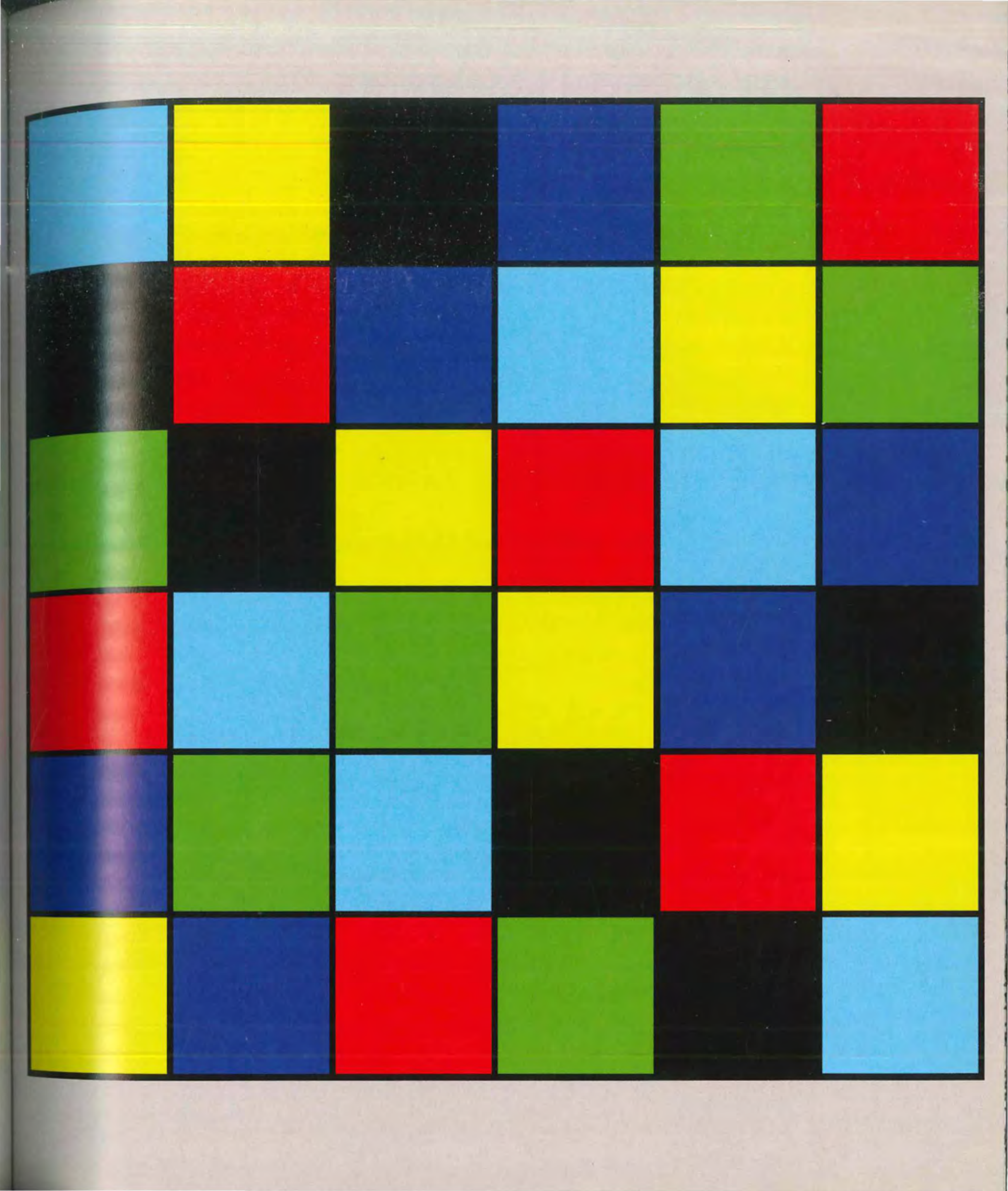
3	2	1
2	1	3
1	3	2

2	3	1
1	2	3
3	1	2

Euler conjeturó que si $n = 4k + 2$, donde k es un número natural, no existe ninguna pareja de cuadrados latinos n x n ortogonales. Esta conjetura no se refutó hasta 1959, más de un siglo después, cuando los matemáticos Bose, Shikhande y Parker construyeron dos cuadrados latinos ortogonales de orden 22. Hoy sabemos que existen parejas de cuadrados latinos ortogonales de orden n para cualquier entero positivo excepto $n = 2$ y $n = 6$.

VÉASE TAMBIÉN Cuadrados mágicos (c. 2200 a. C.), Arquímedes: arena, ganado y el *stomachion* (c. 250 a. C.), El problema de la división del polígono de Euler (1751) y La teoría de Ramsey (1928).

Un ejemplo de cuadrado latino formado por seis colores, dispuestos de modo que ninguna columna y ninguna fila contienen el mismo color dos veces. En la actualidad sabemos que existen 812.851.200 cuadrados latinos de orden seis.



1789

La geometría de los *sangaku*

Fujita Kagen (1765–1821)

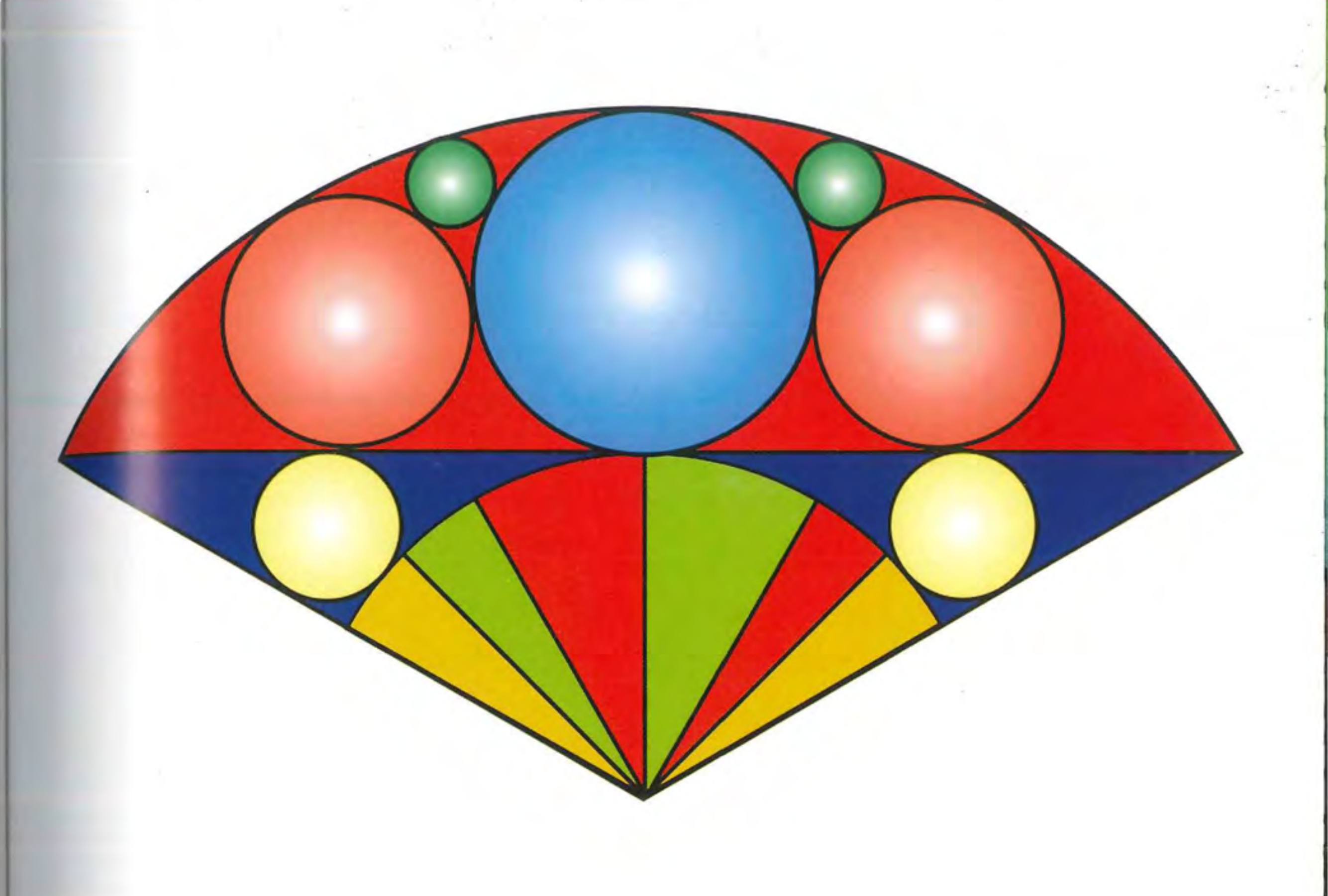
La tradición conocida como *sangaku* o «geometría de los templos japoneses» floreció entre 1639 y 1854, en el periodo en que Japón se mantuvo aislado de occidente. Matemáticos, agricultores, samurais, mujeres y niños resolvían difíciles problemas geométricos y representaban los resultados en tablillas. Estas tablillas llenas de color se colgaban bajo los tejados de los templos. Han sobrevivido más de ochocientas, y la mayoría de ellas tratan problemas relacionados con tangentes de circunferencias. Consideremos, por ejemplo, la figura de la siguiente página, una tablilla *sangaku* tardía, de 1873, obra de un niño de once años llamado Kinkiro Takasaka. La ilustración muestra un abanico, la tercera parte de un círculo completo. Dado el diámetro d_1 del círculo amarillo, ¿cuál es el diámetro, d_2, del círculo verde? La respuesta es $d_2 \approx d_1(\sqrt{3072} + 62)/193$.

En 1789, el matemático japonés Fujita Kagen publicó *Shimpeki Sampo* (Problemas matemáticos colgados en el templo), la primera colección de problemas *sangaku*. Las tablillas más antiguas que se conservan datan de 1683, aunque otros documentos históricos hacen referencia a ejemplos anteriores, desde 1668. Muchos de los *sangaku* son extraños, muy diferentes de los típicos problemas de geometría de los manuales. Esto se debe a que los aficionados estaban obsesionados, en su mayoría, con las circunferencias y las elipses. Una gran parte de los problemas *sangaku* son tan difíciles que el físico Tony Rothman y el educador Hidetoshi Fukagawa afirman que «los expertos contemporáneos los tienen que resolver con métodos avanzados de cálculo y transformaciones afines». Sin embargo, evitando el cálculo, los problemas *sangaku* eran, en principio, lo bastante sencillos como para que los niños pudieran resolverlos con un pequeño esfuerzo.

Según Chad Boutin, «tal vez no sea tan sorprendente que los sudoku, esos pasatiempos numéricos que todo el mundo resuelve hoy en día, se hicieran famosos en Japón antes de propagarse por todo el mundo. Se trata de una moda que recuerda a la pasión matemática que arrasó en las islas hace varios siglos, cuando los fanáticos llegaban a dejar constancia de las más hermosas soluciones geométricas en tablillas de madera ilustradas que recibían el nombre de *sangaku*...»

VÉASE TAMBIÉN Los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), La conjetura de Kepler (1611) y El teorema de Johnson (1916).

Un sangaku *tardío, de 1873, obra de un niño de once años.*



1795

Mínimos cuadrados

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

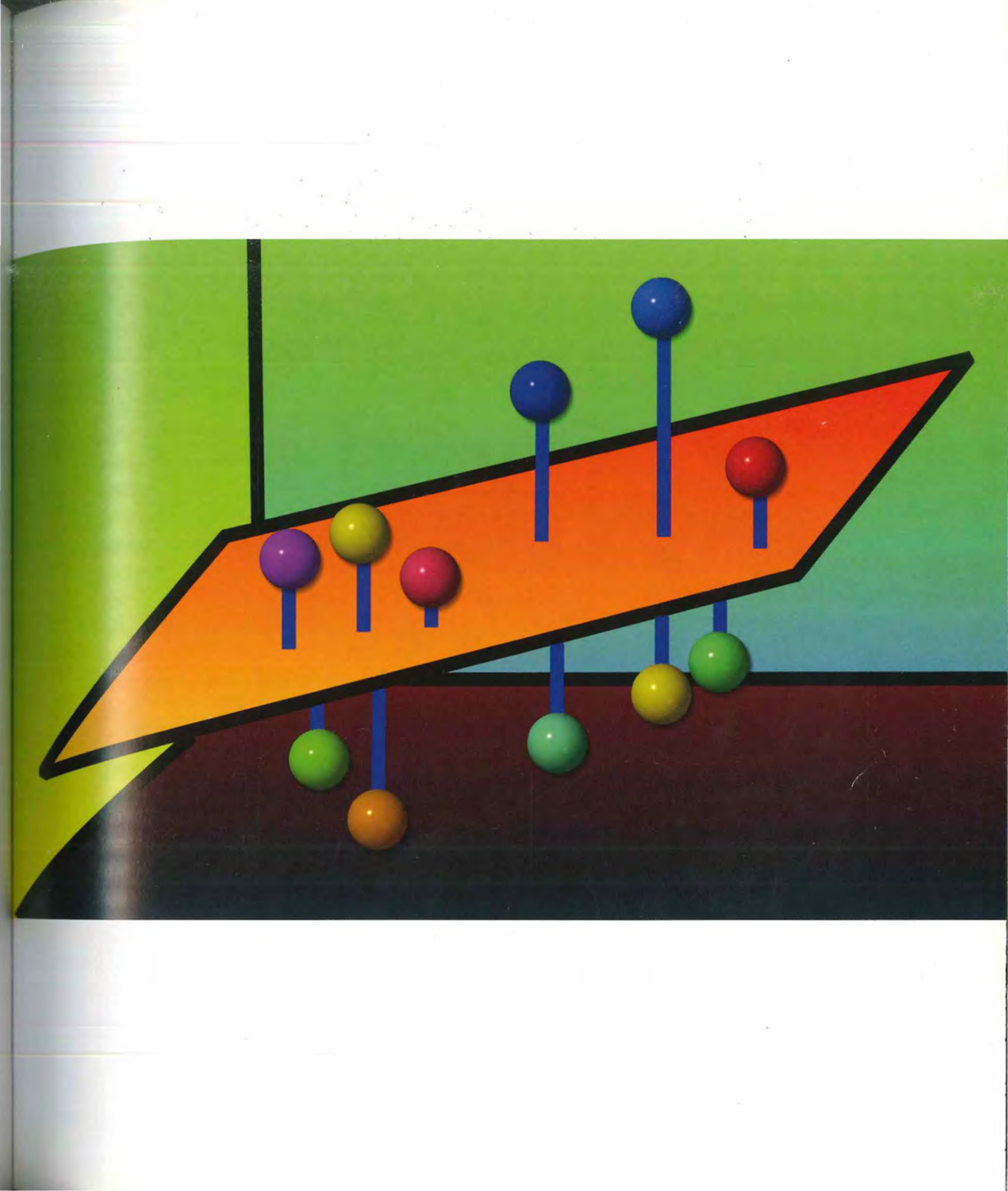
Imagine que entra en una cueva de cuyo techo cuelgan unas maravillosas estalactitas. Podemos suponer que existe una correlación entre la longitud de una estalactita y su edad, aunque es posible que no se dé una relación exacta entre las dos variables. Es probable que ciertas fluctuaciones impredecibles de temperatura y humedad hayan afectado a su proceso de crecimiento. En cualquier caso, si asumimos que existen métodos químicos o físicos para hacer una estimación de la edad de la estalactita, seguro que hay una relación entre edad y longitud que nos permite hacer aproximaciones más o menos aceptables.

El método de los mínimos cuadrados ha desempeñado un papel crucial en la ciencia a la hora de elucidar y visualizar tendencias como ésta; en la actualidad, el método forma parte de muchos programas informáticos básicos de estadística que representan rectas o curvas suaves en medio de nubes de datos experimentales. El procedimiento de los mínimos cuadrados permite hallar la curva que mejor se «ajusta» a una serie de puntos que representan datos experimentales: lo hace minimizando la suma de los cuadrados de los residuos de los puntos a la curva.

El matemático alemán Carl Friedrich Gauss empezó a desarrollar el análisis mediante mínimos cuadrados en 1795. Tenía dieciocho años. Demostró el valor de su descubrimiento en 1801, año en que fue capaz de predecir la trayectoria del asteroide Ceres. El astrónomo italiano Giuseppe Piazzi (1746–1826) había descubierto Ceres en 1800, pero el asteroide desapareció tras el Sol y nadie lograba volver a encontrarlo. El astrónomo autríaco Franz Xaver von Zach (1754–1832) señaló que «sin el inteligente trabajo y los cálculos del doctor Gauss no hubiésemos sido capaces de volver a encontrar a Ceres». Debemos destacar que Gauss mantuvo su método en secreto para disponer de ventaja sobre sus contemporáneos y para fortalecer su reputación. Más adelante publicó algunos resultados científicos en clave, para poder probar que había hecho ciertos descubrimientos antes que sus contemporáneos. Gauss publicó su método secreto en 1809, como parte de su *Theory of the Motion of the Heavenly Bodies* (Teoría sobre el movimiento de los cuerpos celestes).

VÉASE TAMBIÉN La *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace (1812) y Chi-cuadrado (1900).

Un plano de mínimos cuadrados. Aquí, el procedimiento de los mínimos cuadrados permite hallar el plano más «ajustado» a una serie de puntos minimizando la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos azules paralelos al eje y.



La construcción del heptadecágono regular

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

En 1796, cuando todavía era un adolescente, Gauss descubrió un modo de construir un polígono de diecisiete lados (conocido también como heptadecágono) sirviéndose tan sólo de regla y compás. Publicó el resultado en 1801, en las monumentales *Disquisitiones Arithmeticae*. La importancia de la construcción de Gauss reside en que desde tiempos de Euclides todos los intentos de lograrlo habían sido en vano.

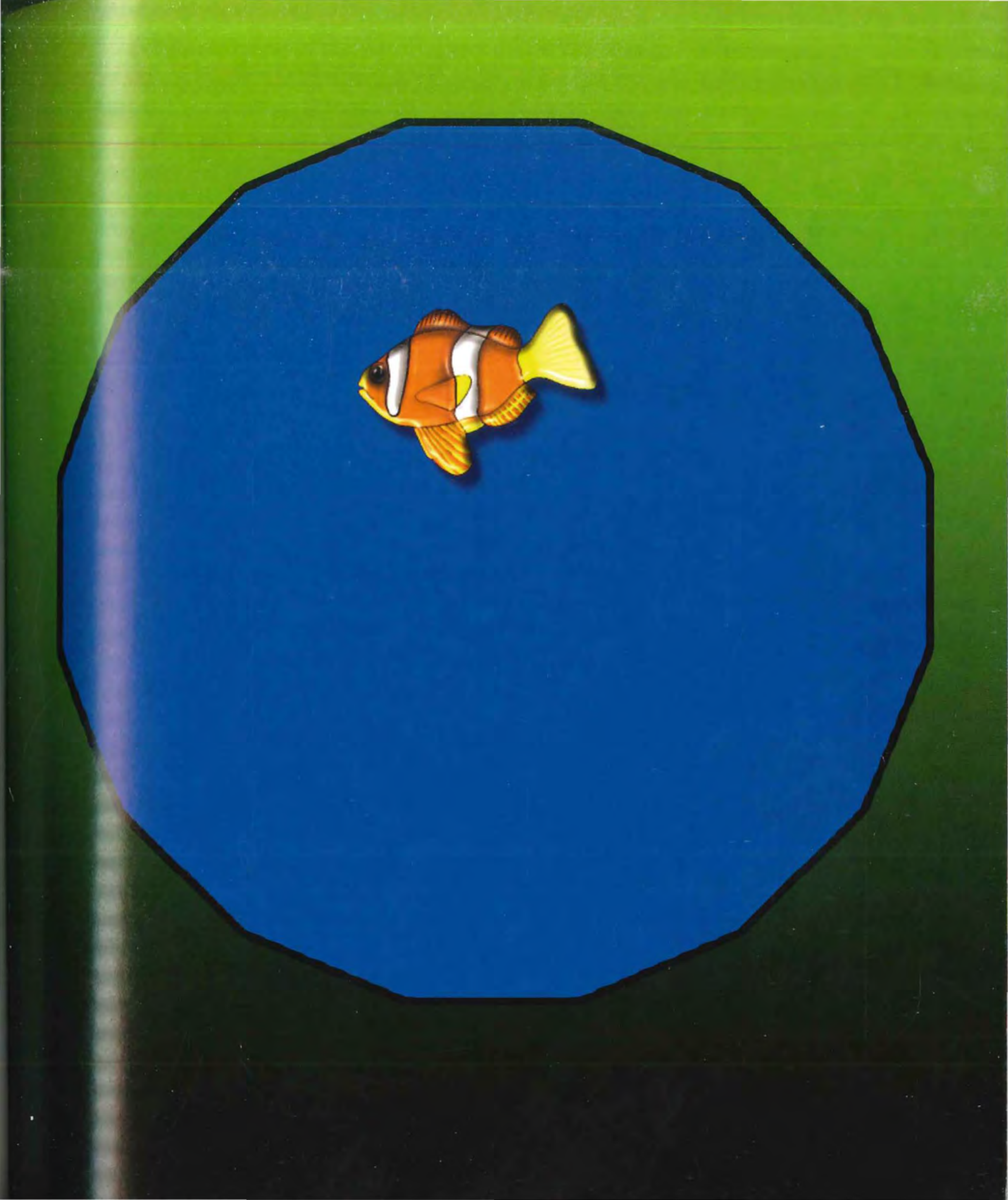
Durante más de mil años los matemáticos habían conocido el modo de construir, con regla y compás, polígonos regulares en los que el número de lados fuese múltiplo de 3, de 5 o de las potencias de 2. Gauss fue capaz de añadir más polígonos a esta lista incluyendo todos aquellos cuyo número de lados fuera un número primo de la forma $2^{(2^n)} + 1$, donde n es un número entero positivo. Veamos algunos: $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ y $F_4 = 65.537$. (Los números que cumplen estas condiciones se conocen como números de Fermat, y no todos ellos son primos.) El polígono regular de 257 caras se construyó en 1832.

Años después, Gauss seguía considerando que el heptadecágono era uno de sus más grandes logros: pidió que se colocara uno en su lápida. La leyenda asegura que el grabador se negó a hacerlo porque se trataba de una construcción muy difícil que acabaría pareciendo una circunferencia.

El año 1796 fue bueno para Gauss: sus ideas manaban como el agua de una fuente. Además de construir el heptadecágono (30 de marzo), inventó la aritmética modular y dio a conocer su ley de la reciprocidad cuadrática (8 de abril), y el teorema de los números primos (31 de mayo). Demostró que todo número natural puede representarse como la suma de un máximo de tres números triangulares (10 de julio). También descubrió las soluciones de los polinomios con coeficientes en cuerpos finitos (1 de octubre). En cuanto al heptadecágono, Gauss afirmó que le parecía «sorprendente» que se hubiera avanzado tan poco desde los tiempos de Euclides.

VÉASE TAMBIÉN Números primos generados por cigarras (c. 1 millón a. C.), La criba de Eratóstenes (c. 240 a. C.), La conjetura de Goldbach (1742), Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801), La hipótesis de Riemann (1859), La demostración del teorema de los números primos (1896), La constante de Brun (1919), La conjetura de Gilbreath (1958), La espiral de Ulam (1963) y La conjetura de Andrica(1985).

Un pez en una pecera heptadecagonal.



1797

El teorema fundamental del álgebra

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

El teorema fundamental del álgebra puede enunciarse de muchas formas. Por ejemplo: todo polinomio de grado $n \geq 1$, con coeficientes reales o complejos tiene n raíces reales o complejas. Es decir, un polinomio $P(x)$ de grado n tiene n valores x_i (que no tienen por qué ser diferentes) tales que $P(x_i) = 0$. Las ecuaciones polinómicas de grado n tienen la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ donde $a_n \neq 0$.

Consideremos, como ejemplo, el polinomio cuadrático $f(x) = x^2 - 4$. Si se representa gráficamente, se ve que se trata de una parábola cuyo vértice se encuentra en $f(x) = -4$. El polinomio tiene dos raíces reales distintas, ($x = 2$ y $x = -2$), que en la gráfica se ven como puntos de intersección entre la parábola y el eje x.

La importancia de este teorema se debe, en parte, a la cantidad de intentos de demostrarlo que se han dado a lo largo de la historia. La primera demostración suele atribuirse al matemático alemán Carl Friedrich Gauss. En su tesis doctoral, publicada en 1799, Gauss presentó una primera demostración centrada en los polinomios con coeficientes reales; también dio a conocer sus objeciones a las demostraciones anteriores. La demostración de Gauss no es completamente rigurosa según los criterios actuales, porque toma como punto de partida la continuidad de algunas curvas; en cualquier caso fue un avance significativo respecto a todos los intentos previos de demostración.

Gauss concedía gran importancia a este teorema; la prueba es que lo retomó en muchas ocasiones. Su cuarta demostración formaba parte del último artículo que escribió. Fue en 1849, exactamente cincuenta años después de su tesis doctoral. Debemos señalar que, en 1806, Robert Argand (1768–1822) publicó una demostración rigurosa del teorema fundamental del álgebra para polinomios con coeficientes complejos. El teorema aparece en muchas áreas de las matemáticas y las diversas demostraciones abarcan campos que van desde el álgebra abstracta y el análisis complejo hasta la topología.

VÉASE TAMBIÉN Lo asombroso, de al-Samawal (c. 1150), La construcción de un heptadecágono regular (1796), Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801) y El polinomio de Jones (1984).

Una representación de Greg Fowler de las tres soluciones del polinomio $z^3 - 1 = 0$. Sus raíces, o ceros 1, −0,5 + 0,86603i, y −0,5 − 0,86603i, están situadas en el centro de las tres «dianas» de esta representación de las soluciones según el método de Newton.



1801

Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855)

Según Stephen Hawkins, «cuando Gauss comenzó a trabajar en sus decisivas *Disquisitiones* Arithmeticae, la teoría de números no era más que una mera colección de resultados aislados. En sus *Disquisitiones*, introdujo la noción de congruencia y al hacerlo, unificó la teoría de números». Gauss publicó este trabajo monumental a los veinticuatro años.

Las *Disquisitiones* incluyen la aritmética modular, basada en relaciones de congruencia. Dos números enteros p y q son «congruentes módulo s» si y sólo si $(p - q)$ es divisible por s. Tal congruencia se expresa formalmente como $p \equiv q$ (mod s). Con esta notación compacta, Gauss volvió a enunciar el famoso teorema de la reciprocidad cuadrática y lo demostró de forma completa. Este teorema había sido demostrado de forma incompleta, muchos años antes, por Adrien-Marie Legendre (1752–1833). Consideremos dos números primos impares distintos p y q. Consideremos las siguientes afirmaciones: (1) p es congruente con un cuadrado módulo q; (2) q es congruente con un cuadrado módulo p. Según el teorema, si tanto p como q son congruentes a 3 (módulo 4) entonces una, y sólo una, de las dos afirmaciones es verdadera; en cualquier otro caso, o ambas son verdaderas o ambas son falsas. (Llamamos cuadrático a aquel número entero que puede escribirse como el cuadrado de otro número entero, por ejemplo el 25, que es 5^2.)

Por tanto, el teorema tiene que ver con la posibilidad de resolver, en aritmética modular, dos ecuaciones cuadráticas relacionadas. Gauss dedicó toda una sección de su libro a la demostración de este teorema. Le gustaba tanto este resultado que se refería a él como el «teorema áureo» o como «la joya de la aritmética»: su pasión por él lo llevó a demostrarlo de ocho formas distintas a lo largo de su vida.

El matemático Leopold Kronecker dijo que «es asombroso pensar en un hombre tan joven capaz de presentar un tratamiento tan profundo y bien organizado en una disciplina completamente nueva». En *Disquisitiones*, los teoremas se completan con demostraciones, corolarios y ejemplos: muchos autores posteriores siguieron ese mismo modelo al organizar sus escritos. Es la obra de la que deriva el trabajo de los más importantes matemáticos del siglo XIX en teoría de números.

VÉASE TAMBIÉN Números primos generados por cigarras (c. 1 millón a. C.), La criba de Eratóstenes (c. 240 a. C.), La conjetura de Goldbach (1742), La construcción de un heptadecágono regular (1796), La hipótesis de Riemann (1859), La demostración del teorema de los números primos (1919), La constante de Brun (1919), La conjetura de Gilbreath (1958), La espiral de Ulam (1963), Erdös y la colaboración extrema (1971), Criptografía de clave pública (1977) y La conjetura de Andrica (1985).

Johann Carl Friedrich Gauss, según el artista danés Christian Albrecht Jensen (1792–1870).



1801

El transportador de tres brazos

Joseph Huddart (1741–1816)

El transportador es un instrumento que se utiliza para construir y medir ángulos sobre un plano y para trazar rectas bajo distintos ángulos. El transportador actual es un disco semicircular que marca los grados entre 0 y 180. En el siglo XVII los transportadores dejaron de ser parte de otros instrumentos y comenzaron a utilizarse como un instrumento en sí mismo cuando los navegantes empezaron a usarlos sobre sus cartas marinas.

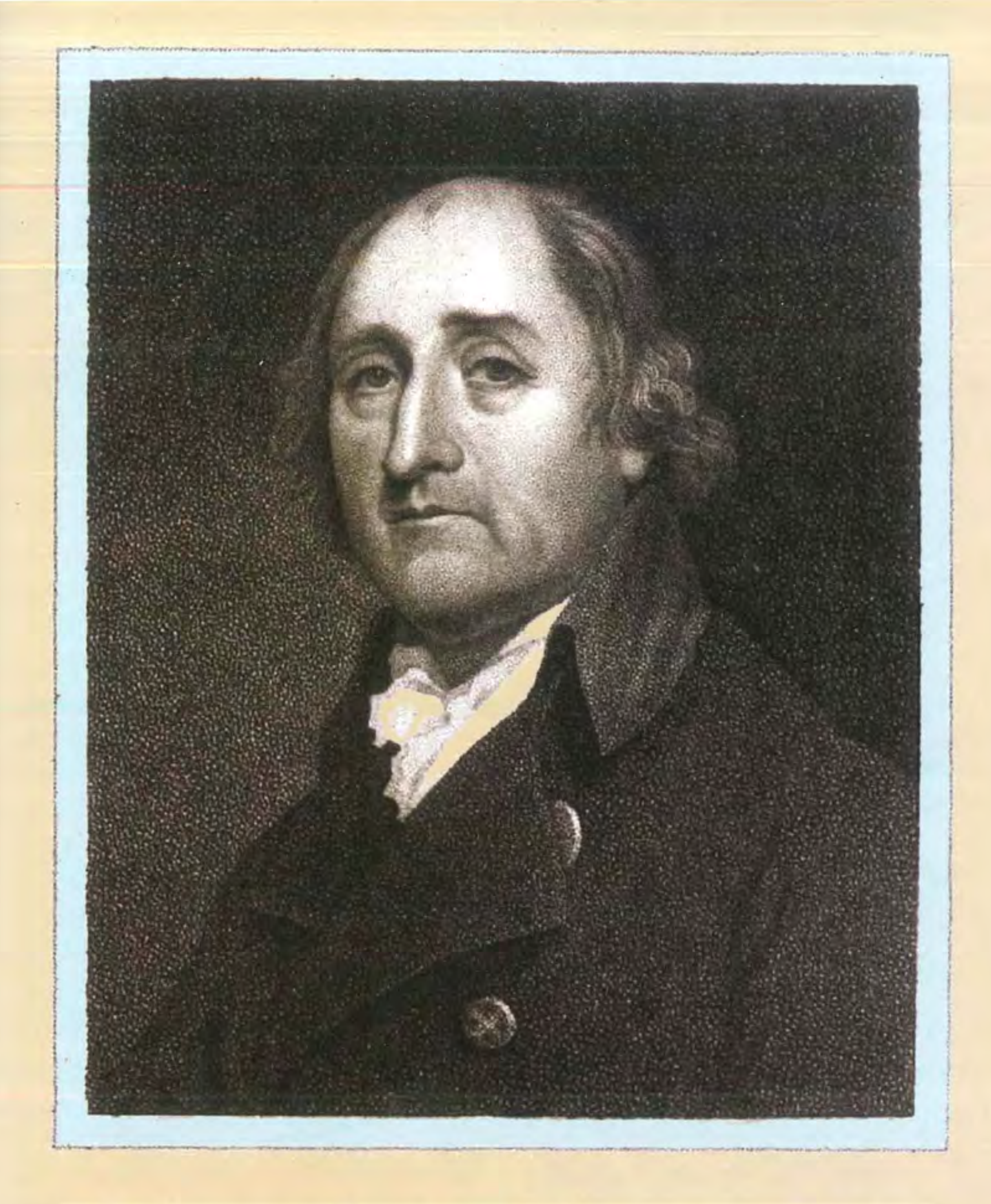
En 1801, el capitán naval inglés Joseph Huddart inventó el transportador de tres brazos para determinar la posición de un barco sobre una carta de navegación. Este tipo de transportador utiliza dos brazos exteriores que pueden rotar con respecto a un brazo central fijo. Los dos brazos rotatorios pueden fijarse en ángulos determinados.

En 1773, Huddart trabajaba para la Compañía de las Indias Orientales. Viajó a la isla de Santa Helena, en el Atlántico sur, y a Bencooleen, en Sumatra. Durante el viaje realizó mediciones detalladas de la costa occidental de Sumatra. En 1778 realizó una carta de navegación del canal de San Jorge, que conecta con el Mar de Irlanda (al norte) y con el océano Atlántico (al sudoeste): se trata de una obra maestra de claridad y precisión. Aparte de su fama tardía como inventor del transportador de tres brazos, fue la persona que sugirió que se utilizaran marcas del nivel máximo del agua en los muelles de Londres, unas marcas que aún se utilizaban en la década de 1960. Inventó unas máquinas de vapor para la fabricación de cuerdas que marcaron el patrón de calidad en esa materia.

En 1916, la Oficina hidrográfica de Estados Unidos explicaba así el uso de su transportador: «Para determinar una posición, los dos ángulos que forman los tres objetos seleccionados se fijan en el instrumento, que a continuación se desplaza sobre la carta de navegación hasta que los tres bordes biselados pasen respectiva y simultáneamente por los tres objetos. El centro del instrumento marcará entonces la posición del barco, que puede señalarse en la carta de navegación con una pequeña incisión o con un lapicero cuya punta se pase por el agujero central».

VÉASE TAMBIÉN La loxodrómica (1537) y La proyección de Mercator (1569).

El capitán naval inglés Joseph Huddart inventó el transportador de tres brazos, muy útil en navegación.



Captⁿ Joseph Huddart. F.R.S.

Engraved for the European Magazine from an Original Picture in the Possession of Chaˢ Turner Esqʳ. by T. Blood.

1807

Las series de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)

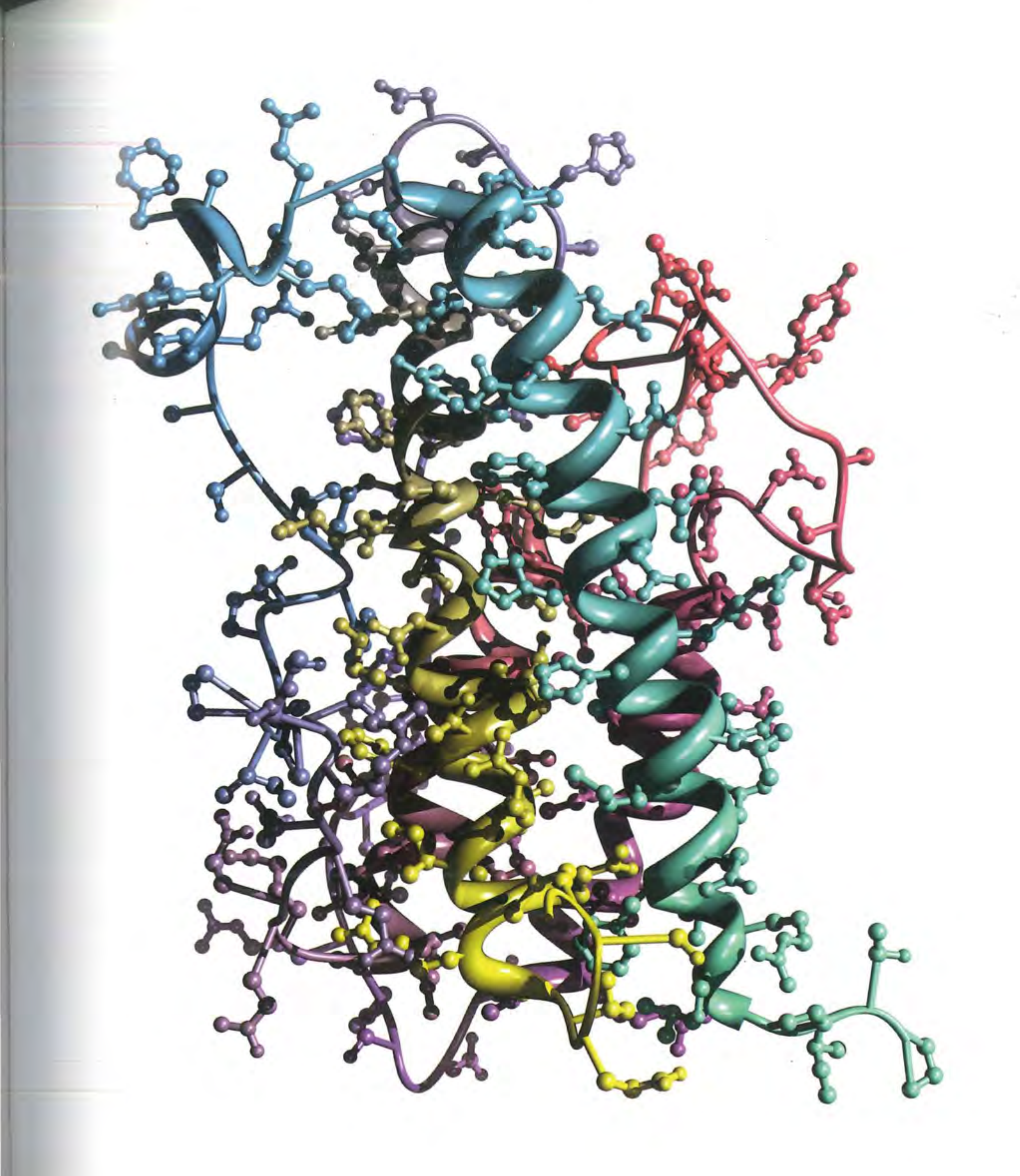
Las series de Fourier resultan útiles en incontables aplicaciones actuales, desde el análisis de vibraciones hasta el procesamiento de imágenes, pasando por casi cualquier campo en el que el análisis de frecuencias tenga alguna importancia. Las series de Fourier, por ejemplo, pueden ayudar a caracterizar y comprender mejor la composición química de las estrellas, o el modo en que el aparato fonador produce el sonido.

En 1789, antes de descubrir sus famosas series, el matemático francés Joseph Fourier acompañó a Napoleón en su expedición a Egipto, donde pasó muchos años dedicado al estudio de artefactos egipcios. Las investigaciones de Fourier acerca de la teoría matemática del calor comenzaron en torno al año 1804, cuando todavía estaba en Francia; en 1807 completó su importante monografía *On the Propogation of Heat in Solid Bodies*. Uno de sus intereses era la difusión del calor en cuerpos de diferentes formas. Para resolver este tipo de problemas, los investigadores suelen disponer de las temperaturas en la superficie y en los bordes en el instante $t = 0$. Fourier introdujo unas series con términos de senos y cosenos para encontrar soluciones a problemas de este tipo. Halló, de modo más general, que cualquier función diferenciable puede representarse con la precisión que se desee por medio de sumas de funciones de senos y cosenos, sin importar lo extraña que pueda parecer la representación gráfica de la misma.

Los biógrafos I. Grattan-Guiness y Jerome Ravetz señalan que «el logro de Fourier puede comprenderse si se tiene en cuenta la potencia de las herramientas matemáticas que inventó para las soluciones de las ecuaciones, que generaron una larga serie de resultados y dieron lugar a problemas de análisis matemático que motivaron gran parte de los trabajos más importantes en la materia durante el resto del siglo y también después». El físico británico Sir James Jeans (1877–1946) afirmó que «el teorema de Fourier nos dice que cada curva, con independencia de su naturaleza y del modo en que se obtuvo, puede reproducirse con exactitud mediante la superposición de un número suficiente de curvas armónicas sencillas; dicho de un modo sencillo, cualquier curva puede construirse mediante la acumulación de ondas».

VÉASE TAMBIÉN Las funciones de Bessel (1817), El analizador de armónicos (1876) y El analizador diferencial (1927).

El modelo molecular de la hormona humana del crecimiento. Las series de Fourier y los correspondientes métodos de síntesis se utilizan para determinar estructuras moleculares a partir de los datos de difracción de rayos X.



1812

La *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace

Pierre-Simon, Marqués de Laplace (1749–1827)

El primer gran tratado sobre probabilidad que combina la teoría acerca de esa materia con el cálculo es *Théorie Analytique des Probabilités* (Teoría analítica de las probabilidades) del matemático y astrónomo francés Pierre-Simon Laplace. La teoría de la probabilidad se centra en los fenómenos aleatorios. El simple lanzamiento de un dado puede considerarse un suceso aleatorio, pero después de muchas repeticiones se hace patente la existencia de un patrón estadístico que puede utilizarse para hacer predicciones.

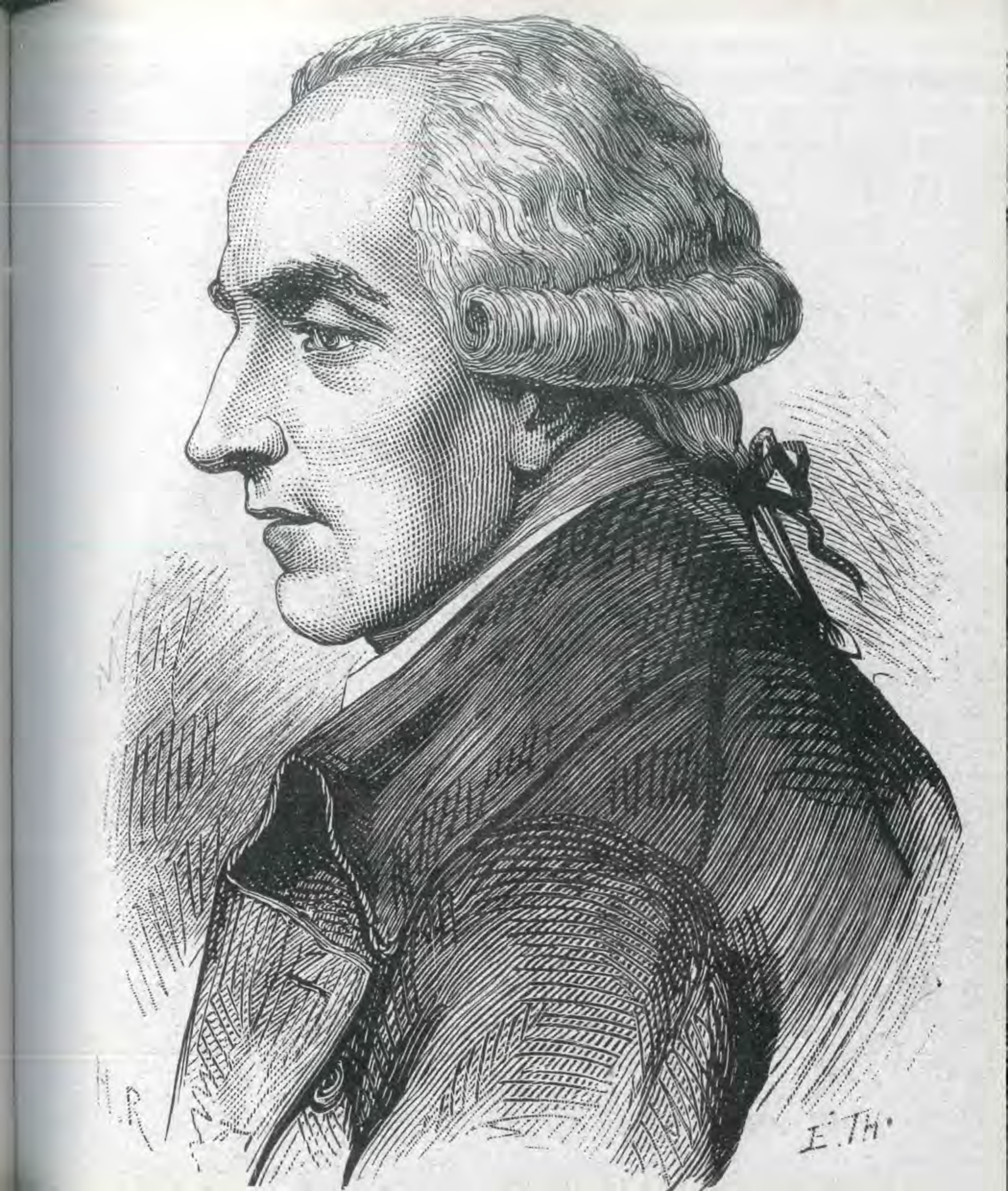
La primera edición del libro de Laplace, dedicada a Napoléon Bonaparte, analiza los métodos para encontrar las probabilidades de sucesos compuestos a partir de la combinación de las probabilidades individuales. El manual estudia, además, el método de los **mínimos cuadrados** y **la aguja de Buffon** y presta atención a muchas aplicaciones prácticas.

Stephen Hawkins considera que *Théorie Analytique* es «una obra maestra», y escribe que «Laplace sostenía que, dado que el mundo está determinado, no puede haber probabilidades para las cosas. La probabilidad es una consecuencia de nuestra ignorancia». Según Laplace no hay nada «incierto» para un ser lo bastante avanzado. Se trata de un modelo conceptual que siguió en pleno vigor hasta la aparición de la mecánica cuántica y de la teoría del caos en el siglo XX.

Para explicar el modo en que los procesos de probabilidad generan resultados predecibles, Laplace pide a los lectores que imaginen una gran cantidad de urnas dispuestas en forma de circunferencia. Una de las urnas contiene sólo bolas negras, mientras que otra sólo contiene bolas blancas. Las otras urnas contienen diversas proporciones de unas y otras. Si extraemos una bola, la colocamos en la urna adyacente y seguimos girando, llegará un momento en que la proporción de bolas blancas y negras en cada urna será más o menos igual. Laplace demuestra así que las «fuerzas naturales» aleatorias pueden provocar resultados ordenados y predecibles. Escribe: «Debemos destacar el hecho de que esta ciencia, que tiene su origen en los juegos de azar, puede llegar a convertirse en el objeto más importante del conocimiento humano. Las cuestiones vitales más importantes son en realidad, en la mayor parte de los casos, meros problemas de probabilidad». Otros famosos expertos en probabilidad fueron Gerolamo Cardano (1501–1576), Pierre de Fermat (1601–1665), Blaise Pascal (1623–1662) y Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987).

VÉASE TAMBIÉN El descubrimiento del cálculo (c. 1665), La ley de los grandes números (1713), La curva de distribución normal (1733), La aguja de Buffon (1777), Mínimos cuadrados (1795), El teorema de los infinitos monos (1913) y Selección de triángulos en una esfera (1982).

Grabado de Pierre-Simon, marqués de Laplace.


E.Th.

1816

El problema del príncipe Ruperto

Príncipe Ruperto del Rin (1619–1682), **Pieter Nieuwland** (1764–1794)

Éste es un problema con una historia fascinante. El príncipe Ruperto fue inventor, artista y soldado. Hablaba con fluidez casi todas las lenguas europeas de importancia y era un experto matemático. Acudía a las batallas con un enorme caniche que aterrorizaba a los soldados (creían que tenía poderes sobrenaturales).

En el siglo XVII, este príncipe planteó una célebre pregunta relacionada con la geometría: ¿De qué tamaño es el mayor cubo de madera que puede pasar a través de otro cubo cuyo lado mide una pulgada? O, con más precisión, ¿cuál es el tamaño *R* del borde del túnel más grande (de sección cuadrada) que puede atravesar un cubo sin romperlo?

En la actualidad sabemos que la respuesta es $R = 3\sqrt{2} / 4 = 1{,}060660\ldots$. En otras palabras, un cubo cuyo lado mida *R* metros (o menos) puede atravesar otro cubo cuyos lados midan un metro. El príncipe Ruperto apostó que, dados dos cubos iguales, se podía hacer un agujero en uno de ellos por el que pudiera deslizarse el otro. Ganó. Muchos creían que no se podía lograr.

Aunque el problema del príncipe Ruperto se publicó por primera vez en 1685, en el libro *De Algebra Tractatus* de John Wallis (1616–1703), la solución $R = 1{,}060660$ no se conoció hasta que la halló el matemático holandés Pieter Nieuwland, más de un siglo después de que se planteara por primera vez. Su respuesta la publicó de manera póstuma, en 1816, Jan Hendrik van Swinden, el maestro de Niewland, que halló la solución entre sus papeles.

Si se sostiene un cubo por una de las esquinas, la forma que se ve es la de un hexágono regular. El cuadrado más grande capaz de atravesar el cubo debe tener una cara que pueda inscribirse en ese hexágono. Según los matemáticos Richard Guy y Richard Nowakowski, el cubo más grande que puede atravesar un hipercubo tiene aristas de longitud 1,007434775..., es decir, la raíz cuadrada de 1,014924..., la raíz más pequeña del polígono $4x^4 - 28x^3 - 7x^2 + 16x + 16$.

VÉASE TAMBIÉN Los sólidos platónicos (c. 350 a. C.), La fórmula de Euler para los poliedros (1751), El hipercubo (1888) y La esponja de Menger (1926).

El príncipe Ruperto apostó que, dados dos cubos iguales, se podía hacer un agujero en uno de ellos por el que pudiera deslizarse el otro. Ganó. Muchos creían que no se podía lograr.



1817

Las funciones de Bessel

Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846)

El matemático alemán Friedrich Bessel, que no recibió ninguna educación formal hasta los catorce años, desarrolló las funciones que llevan su nombre en 1817, como parte de sus estudios sobre el movimiento de los planetas sometidos a gravedad mutua. Bessel generalizó los hallazgos anteriores del matemático Daniel Bernoulli (1700–1782).

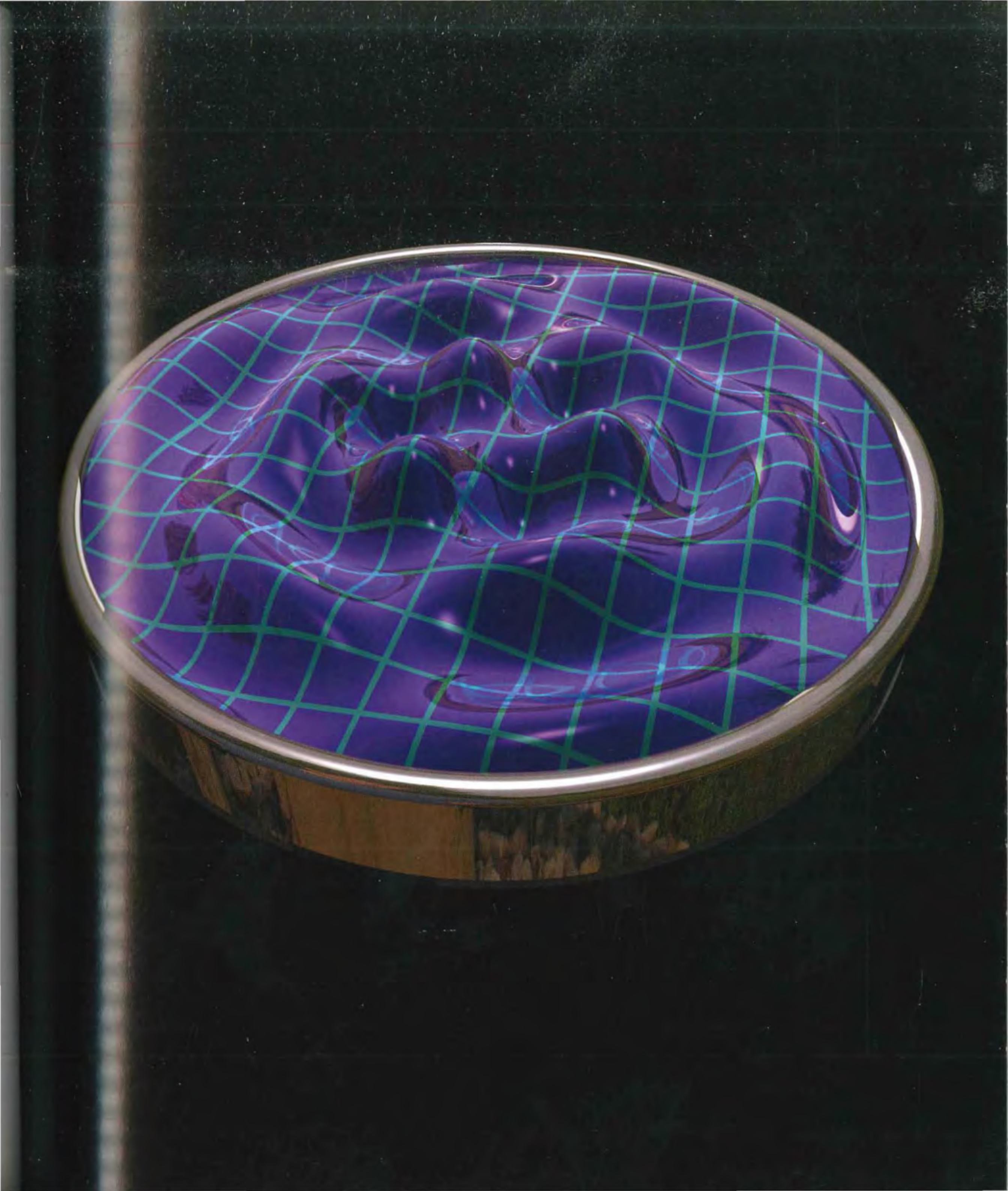
Desde la época de los descubrimientos de Bessel, sus funciones se han convertido en herramientas indispensables en matemáticas y en ingeniería. Según Boris Korenev, «un gran número de problemas diversos relacionados con las áreas más importantes de la física matemática, así como distintos problemas técnicos, están relacionado con las funciones de Bessel». De hecho, ciertos aspectos de la teoría de las funciones de Bessel se utilizan para problemas relacionados con la conducción térmica, la hidrodinámica, la difusión, el procesamiento de señales, la acústica, la física de radios y antenas, la vibración de placas, las oscilaciones en cadenas, las tensiones en materiales, la propagación de ondas en general, la física atómica y la física nuclear. En teoría de la elasticidad, las funciones de Bessel resultan útiles para resolver numerosos problemas espaciales que emplean coordenadas esféricas o cilíndricas.

Las funciones de Bessel son soluciones a ecuaciones diferenciales específicas; sus gráficas parecen ondas sinusoidales modificadas. En el caso de una ecuación de onda relacionada con una membrana circular, por ejemplo en un tambor, una clase de soluciones incluye las funciones de Bessel, y la solución de onda estacionaria puede expresarse como una función de Bessel que es una función de la distancia r desde el centro al borde de la membrana.

En 2006, investigadores de los laboratorios Akishima de la Universidad de Osaka se basaron en la teoría de las funciones de Bessel para crear un mecanismo que se sirve de ondas para dibujar y escribir sobre la superficie del agua. El aparato, llamado AMOEBA (Advanced Multiple Organized Experimental Basin), está formado por cincuenta generadores de ondas de agua repartidos a lo largo del perímetro de un tanque cilíndrico de 1,6 metros de diámetro y 30 centímetros de profundidad. El AMOEBA es capaz de deletrear todo el alfabeto latino. Cada imagen o letra sólo se mantiene sobre el agua durante un instante, pero es posible generarlas de forma continua cada pocos segundos.

VÉASE TAMBIÉN Las series de Fourier (1807), El analizador diferencial (1927) y El atractor de Ikeda (1979).

Las funciones de Bessel se utilizan para estudiar problemas de propagación de ondas, así como los modos de vibración de una membrana circular fina. (Representación creada por Paul Nylander, que utiliza las funciones de Bessel para analizar fenómenos ondulatorios.)



1822

El ordenador mecánico de Babbage

Charles Babbage (1792–1871), **Augusta Ada King, Condesa de Lovelace** (1815–1852)

El inventor, analista y estadístico inglés Charles Babbage sentía un gran interés por los milagros religiosos. En cierta ocasión escribió: «Los milagros no son una infracción de las leyes establecidas, sino una prueba de la existencia de leyes superiores». Babbage afirmaba que los milagros podían producirse en un mundo mecanicista. Creía que si él era capaz de imaginar la programación de comportamientos extraños en sus máquinas de calcular, también Dios podría programar irregularidades semejantes en la naturaleza. Al investigar los milagros bíblicos apuntó que la probabilidad de que un hombre resucitara era 10^{12}.

Suele considerarse que Babbage es el matemático-ingeniero más importante de cuantos estuvieron implicados en la prehistoria de los ordenadores. Su fama se debe, en particular, a la concepción de una enorme máquina de calcular, un primer antepasado de los ordenadores modernos. Babbage creía que el aparato sería muy útil para generar tablas matemáticas, pero le preocupaban los posibles errores de los humanos que transcribieran los resultados a partir de las treinta y una ruedas metálicas de salida. En la actualidad nos damos cuenta de que Babbage iba casi un siglo por delante de sus contemporáneos: la política y la tecnología de su época no estaban a la altura de sus sueños.

La máquina diferencial de Babbage, que comenzó a construir en 1822 pero que no logró terminar, estaba diseñada para calcular valores de funciones polinómicas usando veinticinco mil piezas mecánicas. También tenía planes para crear un ordenador más versátil, la máquina analítica, que podría programarse con tarjetas perforadas y dispondría de áreas separadas para el almacenamiento de números y para el cálculo. Según las estimaciones de los expertos, una máquina analítica capaz de almacenar mil números de cincuenta cifras tendría que medir más de treinta metros de longitud. Ada Lovelace, hija del poeta inglés Lord Byron, proporcionó especificaciones para programar la máquina analítica. Aunque Babbage ayudó a Ada, muchos consideran que ella fue la primera programadora informática de la historia.

En 1990, los novelistas William Gibson y Bruce Sterling escribieron *The Difference Engine*, que proponía a los lectores imaginar qué habría sucedido si las máquinas de Babbage hubieran triunfado en la sociedad victoriana.

VÉASE TAMBIÉN El ábaco (c. 1200), La regla de cálculo (1621), El analizador diferencial (1927), ENIAC (1946), La calculadora Curta (1948) y HP-35: la primera calculadora científica de bolsillo (1972).

Modelo funcional de una parte de la máquina diferencial de Charles Babbage, actualmente en el Museo de la ciencia de Londres.



1823

Le Calcul Infinitésimal de Cauchy

Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

Según el matemático estadounidense William Waterhouse, «el estado del cálculo a comienzos del siglo XIX era bastante desconcertante. No había ninguna duda de que era correcto. Los matemáticos de talento lo habían utilizado con éxito durante cien años. Y sin embargo, no había nadie capaz de explicar claramente por qué funcionaba. Entonces llegó Cauchy». En su obra de 1823 *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (Resumen de lecciones sobre cálculo infinitesimal), el prolífico matemático francés Augustin Cauchy proporciona un desarrollo riguroso del cálculo y una demostración moderna del teorema fundamental del cálculo, que unifica con elegancia las dos grandes ramas de la materia (el cálculo diferencial y el cálculo integral).

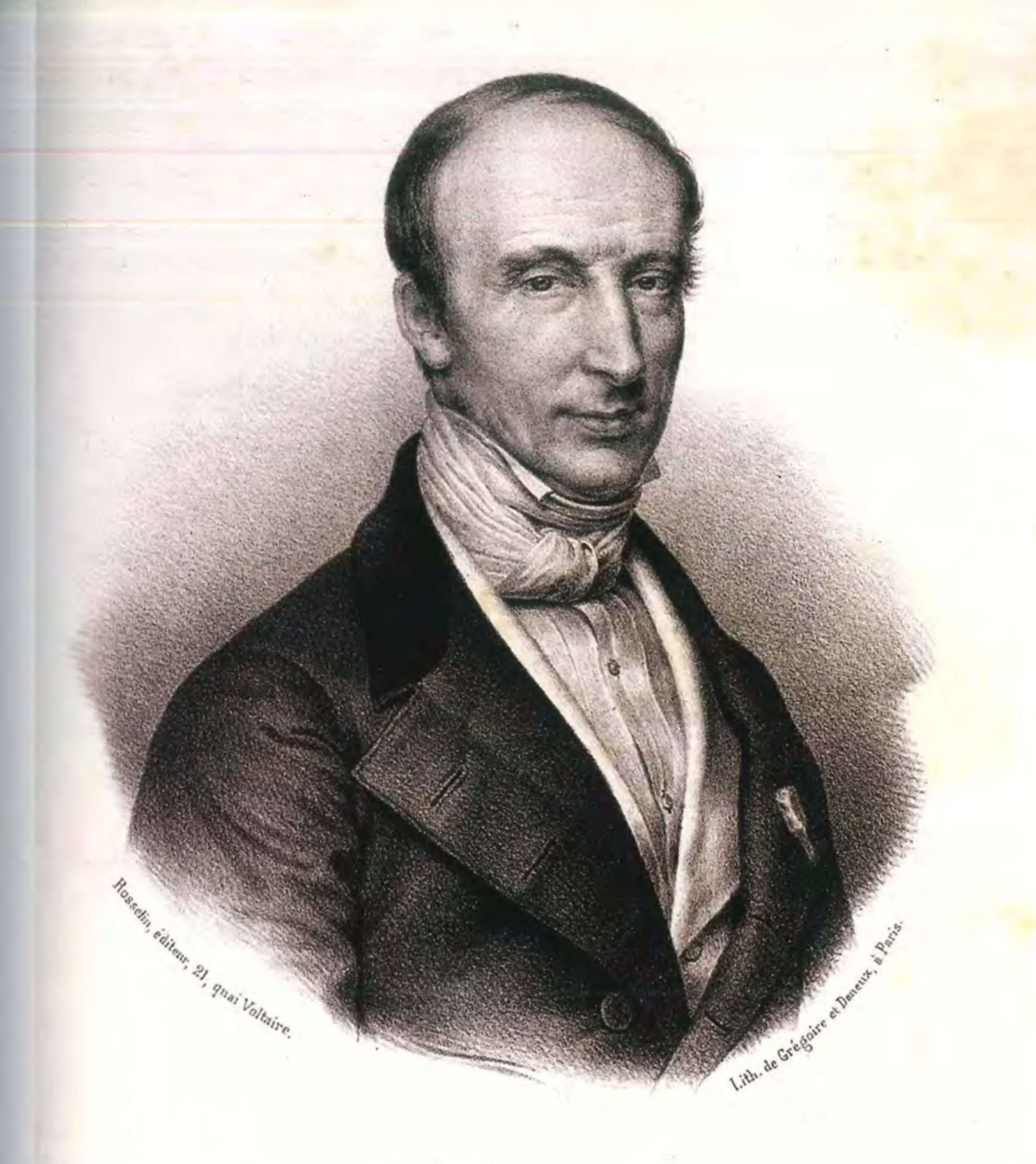
Cauchy comienza su tratado con una definición clara de la noción de derivada. Su mentor, el matemático francés Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), que pensaba en términos de representaciones gráficas, consideraba la derivada en relación con la tangente de una curva. Para determinar una derivada, Lagrange debía buscar las fórmulas derivativas necesarias. Stephen Hawkins afirma que «Cauchy fue mucho más allá que Lagrange al definir la derivada de f en un punto x como el límite del cociente incrementa $\Delta y/\Delta x = [f(x + i) - f(x)]/i$ cuando i tiende a cero, que es nuestra actual y no geométrica definición de derivada ».

De forma similar, al aclarar la noción de integral, Cauchy demostró el teorema fundamental del cálculo, que establece un modo de calcular la integral de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ para cualquier función continua. En particular el teorema afirma que si $f(x)$ es integrable en el intervalo $[a , b]$ y $H(x)$ es la integral de $f(x)$ entre a y $x \leq b$, entonces la derivada de $H(\mathrm{x})$ es idéntica a $f(\mathrm{x})$. Es decir, $H'(x) = f(x)$.

Waterhouse concluye que «en realidad, Cauchy no estableció nuevos cimientos; lo que hizo fue quitar el polvo para que se viera que el edificio del cálculo estaba bien asentado».

VÉASE TAMBIÉN Las paradojas de Zenón (c. 445 a. C.), El descubrimiento del cálculo (c. 1665), El análisis de lo infinitamente pequeño de L'Hôpital (1696), Las *Instituzioni Analitiche* de Agnesi (1748) y La *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace (1812).

Augustin Louis Cauchy, litografía de Gregoire y Deneux.



A^tin^ Cauchy.

Bon Augustin Cauchy

1827

El cálculo baricéntrico

August Ferdinand Möbius (1790–1868)

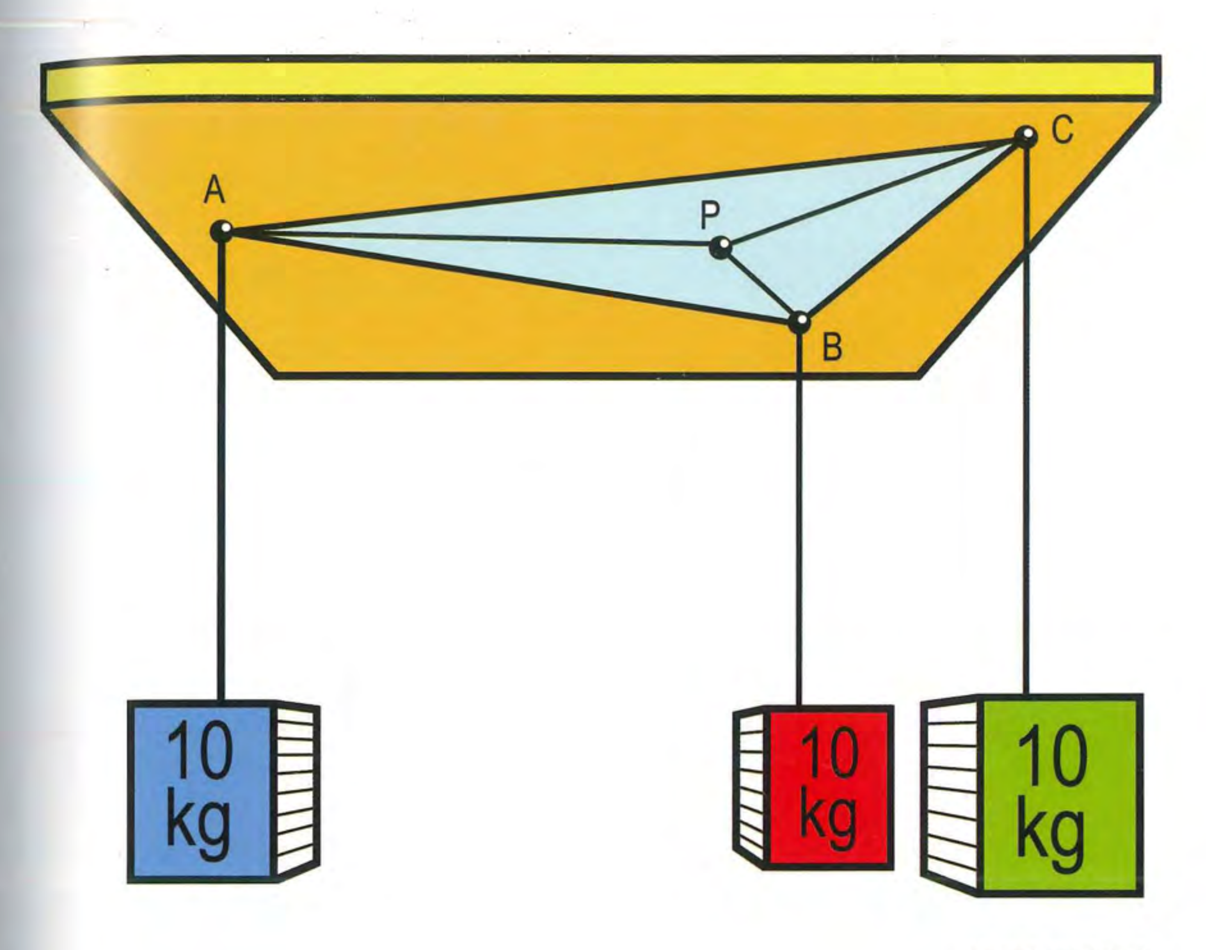
El matemático alemán August Ferdinand Möbius, famoso por la cinta de una sola cara a la que da nombre, contribuyó de forma decisiva a las matemáticas con el cálculo baricéntrico, un método geométrico de definir un punto como el centro de gravedad de otros puntos a los que se asignan determinados coeficientes o pesos. Podemos pensar en las coordenadas baricéntricas de Möbius como coordenadas en relación a un triángulo de referencia. Estas coordenadas suelen escribirse como grupos de tres números, que pueden interpretarse de forma gráfica como tres masas colocadas en los vértices del triángulo. En este sentido, las tres masas determinan un punto que sería el centro de gravedad del triángulo. Las nuevas herramientas algebraicas desarrolladas por Möbius en su obra de 1827 *Der Barycentrische Calcul* (El cálculo baricéntrico), han demostrado su utilidad en numerosas aplicaciones. Este libro, todo un clásico, estudia además materias relacionadas de geometría analítica (las transformaciones proyectivas, por ejemplo).

El término «baricéntrico» deriva de la palabra griega que significa «pesado» y hace referencia al centro de gravedad. Möbius se dio cuenta de que una serie de pesos colocados sobre una vara pueden reemplazarse por un único peso que ocupe el centro de gravedad. A partir de un principio tan simple, construyó un sistema matemático en el que se asignan coeficientes numéricos a cada punto del espacio.

En la actualidad, las coordenadas baricéntricas son un sistema general de coordenadas que se utiliza en muchas ramas de las matemáticas y en la construcción de gráficos por ordenador. Estas coordenadas resultan especialmente útiles en geometría proyectiva, un campo que estudia las incidencias (es decir, los lugares en los que coinciden, o no, las rectas, los planos y los puntos). La geometría proyectiva se ocupa además de las relaciones entre los objetos y las representaciones resultantes de proyectarlos sobre otra superficie, representaciones que podemos imaginar como sombras de cuerpos sólidos).

VÉASE TAMBIÉN La geometría de Descartes (1637), La geometría proyectiva (1639) y La cinta de Möbius (1858).

Coordenadas baricéntricas. El punto P es el centro de gravedad y baricentro de A, B y C y decimos que las coordenadas baricéntricas de P son [10 , 10 , 10]. El triángulo ABC estaría en equilibrio sobre una aguja situada en P.



BRIAN C. MANSFIELD

1829

Geometría no euclídea

Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1792–1856), **János Bolyai** (1802–1860), **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826–1866)

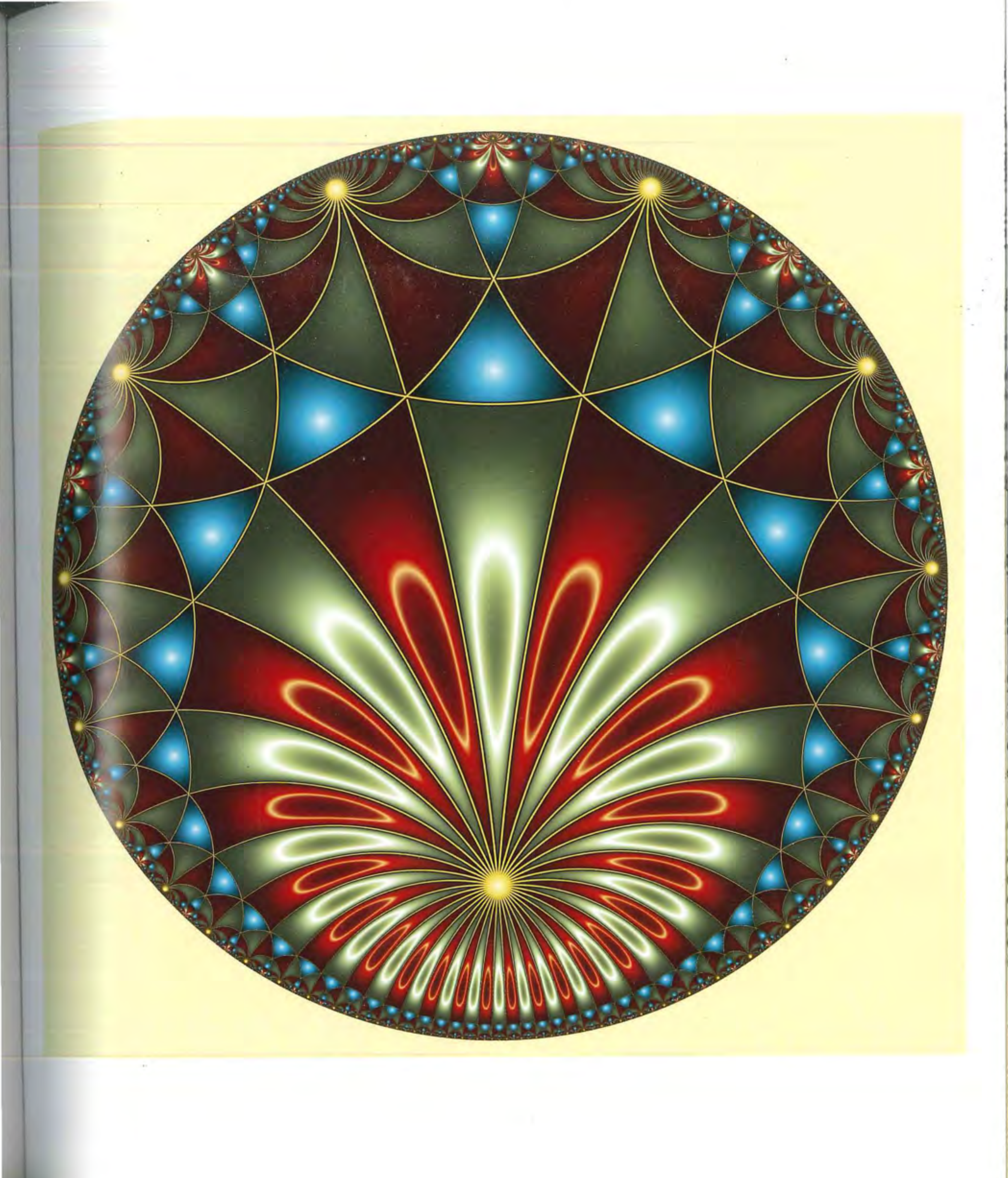
Desde los tiempos de Euclides (c. 325–270 a. C.), el conocido como postulado de las paralelas parecía describir de manera razonable el funcionamiento de nuestro mundo tridimensional. Según este postulado, si tenemos una recta y un punto que no pertenece a ella, sólo existe una recta, en su plano, que pase por el punto y que no tenga intersección con la recta original.

Con el tiempo, las formulaciones de la geometría no euclídea (en las que este postulado no se mantiene) han tenido consecuencias dramáticas. Según Einstein, «concedo una gran importancia a esta interpretación de la geometría; si no hubiera contado con ella, no habría sido capaz de desarrollar la teoría de la relatividad». De hecho, la relatividad general de Einstein representa el espacio-tiempo como una geometría no euclídea que puede curvarse en la proximidad de cuerpos gravitatorios como el Sol y los planetas. El lector puede imaginar una pelota densa (de bolos, por ejemplo) que se hunde en una superficie plana de plástico. Si colocásemos una canica en la depresión formada por el plástico y le diésemos un impulso lateral, orbitaría alrededor de la bola más grande durante un rato, como un planeta alrededor del Sol.

En 1820, el matemático ruso Nicolai Lobachevsky publicó *On the Principles of Geometry*, donde postuló una geometría consistente basada en la premisa de que el postulado de las paralelas era falso. Muchos años antes, el matemático húngaro János Bolyai había trabajado en una geometría no euclídea similar, pero sus resultados no se publicaron hasta 1932. En 1854, el matemático alemán Bernhard Riemann generalizó los hallazgos de Bolyai y Lobachevsky al demostrar que, según la dimensión considerada, eran posibles diferentes geometrías no euclídeas. Riemann señaló en cierta ocasión que «el valor de la geometría no euclídea reside en su capacidad de liberarnos de ideas preconcebidas como paso previo para la exploración de leyes físicas que exigen geometrías distintas de la propuesta por Euclides». Su predicción se cumplió años después con la teoría general de la relatividad de Einstein.

VÉASE TAMBIÉN Los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), El *Tratado* de Omar Khayyam (1070), La geometría de Descartes (1637), La geometría proyectiva (1639), La hipótesis de Riemann (1859), La pseudoesfera de Beltrami(1868) y La variedad de Weeks (1985).

Este teselado hiperbólico de Jos Leys es un ejemplo de geometría no euclídea. El artista M. C. Escher también experimentó con geometrías no euclídeas en las que todo el universo puede comprimirse hasta el punto de poder representarse en un disco finito.



1831

La función de Möbius

August Ferdinand Möbius (1790–1868)

En 1831, August Möbius introdujo la exótica función que lleva su nombre, que en la actualidad expresamos como $\mu(n)$. Para entender esta función, imagine que se meten todos los números enteros en tres buzones de correos. El primer buzón está marcado con un enorme «0». En el segundo leemos «+1» y en el tercero «-1». En el buzón «0» Möbius coloca los múltiplos de cuadrados perfectos distintos de 1. Es decir, el conjunto {4, 8, 9, 12, 16, 18,...}. Un número cuadrado perfecto es aquel que es el cuadrado de otro número entero, como el 4, el 9 o el 16. Así, $\mu(12) = 0$, porque 12 es múltiplo del cuadrados perfecto 4 y por tanto se coloca en el buzón «0».

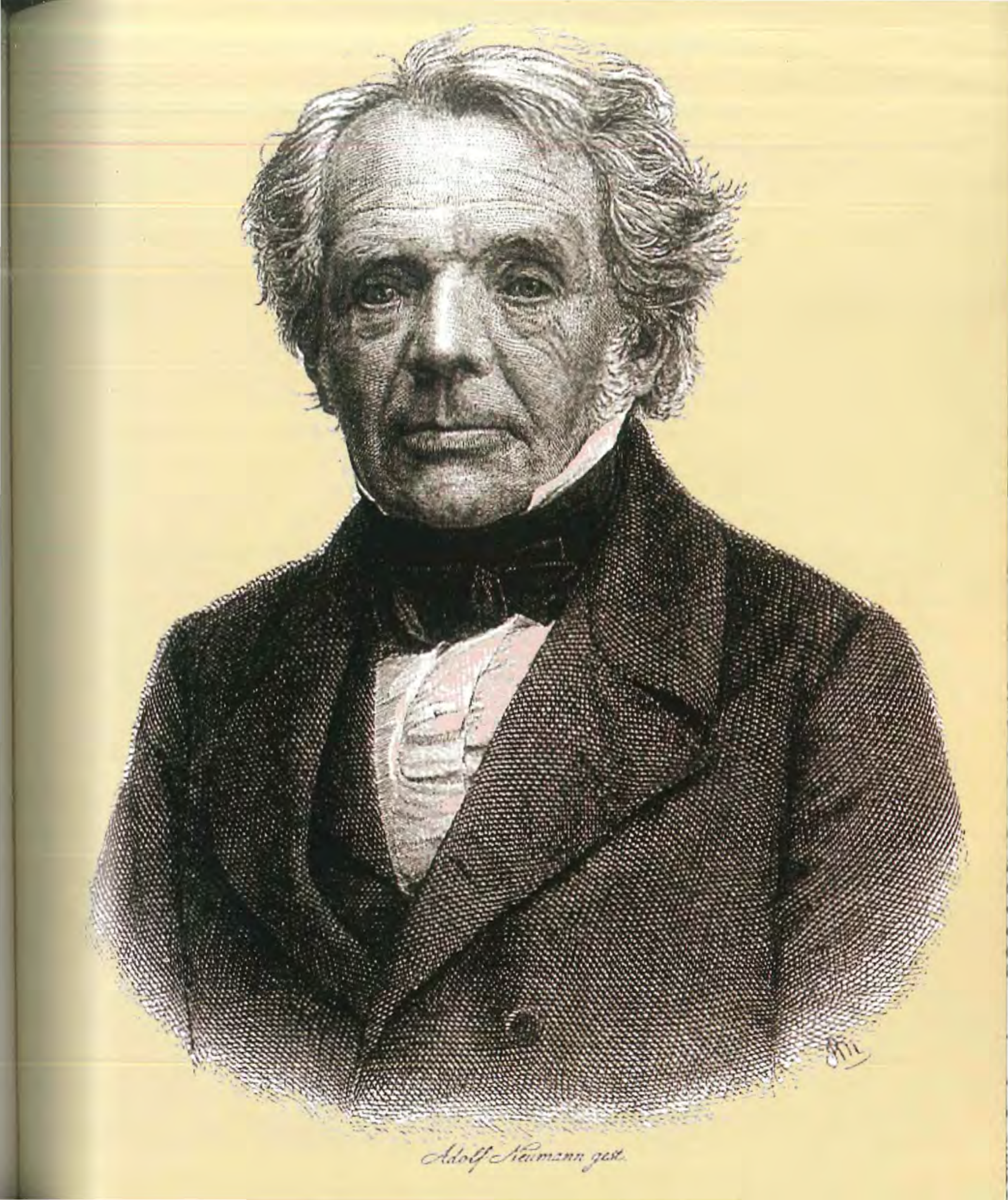
En el buzón «-1» Möbius coloca los números que pueden descomponerse como producto de un número impar de números primos. 5 x 2 x 3 = 30, así que el 30 pertenece al buzón «−1» (puede descomponerse como el producto de tres números primos). Los números primos también se colocan en este buzón, ya que sólo tienen un factor primo, ellos mismos. Así, $\mu(29) = -1$ y $\mu(30) = -1$. Se cumple que la probabilidad de que un número pertenezca al buzón «-1» es $3/\pi^2$, la misma de que pertenezca al buzón «+1».

Veamos con más detalle el buzón «+1», en el que Möbius sitúa los números que pueden descomponerse en un número par de factores primos, por ejemplo el 6 (6 = 2 x 3). Möbius introdujo aquí el número 1, por completitud. Este buzón está formado por el conjunto {1, 6, 10, 14, 15, 21, 22,...}. Los primeros veinte términos de la extrardinaria función de Möbius son $\mu(n) = \{1, -1, -1, 0, -1, 1, -1, 0, 0, 1, -1, 0, -1, 1, 1, 0, -1, 0, -1, 0\}$.

Por increíble que parezca, los científicos han encontrado aplicaciones prácticas para esta función en diversas interpretaciones físicas de la teoría de partículas subatómicas. La función de Möbius es asombrosa, además, porque no se sabe casi nada de su comportamiento y porque aparece en numerosas identidades matemáticas de gran elegancia.

VÉASE TAMBIÉN Números primos generados por cigarras (1 millón a. C.), La criba de Eratóstenes (c. 240 a. C.) y La conjetura de Andrica (1985).

August Ferdinand Möbius, del frontispicio de sus Werke (Trabajos).


Adolf Neumann gest.

1832

La teoría de grupos

Évariste Galois (1811–1832)

El matemático francés Évariste Galois fue el artífice de la teoría que lleva su nombre (una rama importante del álgebra abstracta), y debe también su fama a sus contribuciones a la teoría de grupos. En 1832 encontró un método para determinar si una ecuación general puede resolverse mediante radicales, con lo que dio el pistoletazo de salida a la moderna teoría de grupos, que se dedica al estudio matemático de la simetría.

Según Martin Gardner: «Murió de un disparo, en 1832. Aún no había cumplido veintiún años. Con anterioridad se había llevado a cabo algún trabajo fragmentario sobre grupos, pero fue Galois el que sentó las bases de la moderna teoría de grupos y le puso nombre, y todo en una sola carta, triste y extensa, que le escribió a un amigo la noche anterior a un duelo fatal». Un grupo es un conjunto de elementos con una operación que, al combinar dos elementos cualesquiera, da como resultado un tercer elemento del grupo. Consideremos, por ejemplo, todos los números enteros y la operación de la suma. El conjunto forma un grupo. Al sumar dos números enteros siempre obtenemos otro número entero. Un objeto geométrico puede caracterizarse por un grupo llamado *grupo de simetría* que especifica sus características de simetría. Este grupo contiene un conjunto de transformaciones que, cuando se aplican, dejan invariante el objeto. En la actualidad, los temas más importantes de la teoría de grupos suelen ejemplificarse con el famoso **cubo de Rubik.**

Las circunstancias que condujeron a la muerte de Galois nunca han logrado explicarse por completo. Es posible que su muerte fuera el resultado de una disputa por una mujer, o por motivos políticos. En cualquier caso, pasó la noche anterior al duelo esbozando en una carta sus descubrimientos matemáticos. La figura de la derecha muestra una página (dedicada a las ecuaciones de quinto grado) de esos últimos escritos.

Al día siguiente, un disparo le alcanzó en el estómago. Cayó al suelo. No había ningún médico que pudiera curarlo, y el agresor se fue de allí con total tranquilidad mientras Galois agonizaba. Su reputación matemática se debe a menos de cien páginas geniales, publicadas de manera póstuma.

VÉASE TAMBIÉN Los grupos del papel de pintado (1891), El programa de Langlands (1967), El cubo de Rubik (1974), El grupo Monstruo (1981) y La búsqueda del grupo de Lie E_8 (2007).

Los frenéticos escritos matemáticos que Galois garabateó la noche anterior a su fatal duelo. En esta misma página, a la izquierda, debajo del centro, se encuentran las palabras Une femme, *con la segunda tachada, en referencia a la mujer que tal vez provocó el duelo.*

$\varphi x = (fx)^2 + (x-a)(Fx)^2$

$(fa)^2 + (a-a)(Fa)^2 = 0$

$fa = \pm$

$f6 = \pm$

indivisible

Unité ; indivisibilité de la république

Liberté, égalité, fraternité ou la mort.

$+(a x_1 + a^{n-1} x_n) + \int \frac{\varphi t}{x-A} \frac{dx}{\sqrt{\varphi x}} \qquad \sum \int \frac{\sqrt{\varphi x}}{a-x} \frac{da}{\sqrt{\varphi a}}$

$\frac{x}{1-a^2x^2} \qquad 1-x^2$

indivisibilité
Unité Nationalité

$\frac{\sqrt{\varphi a}}{x - fa} \qquad \frac{dx}{\sqrt{\varphi x}}$

fa bemol

$\sqrt{\varphi y} = \frac{U}{U} \sqrt{\varphi x}$

Une femme

Logarithme de A

$(fx + Fx\sqrt{\varphi y})^n$

$\frac{dA}{da}$

$X - A$

$\sqrt{A}\, dX$

1834

El principio del palomar de Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

La primera enunciación del principio del palomar fue hecha por el matemático alemán Johann Dirichlet en 1834, aunque se refirió a él como *Schubfachprinzip* («Principio del cajón»). La denominación «Principio del palomar», debida a Raphael M. Robinson, no se utilizó en una revista matemática seria hasta 1940. Enunciado de manera simple dice así: si tenemos m palomares y n palomas, podemos afirmar con certeza que, si $n > m$, habrá al menos un palomar con más de una paloma.

Esta afirmación tan simple se ha utilizado en aplicaciones que abarcan desde la compresión de datos informáticos hasta problemas de conjuntos infinitos que no pueden relacionarse por una correspondencia biunívoca. El principio del palomar se ha generalizado además para aplicaciones de probabilidad, de modo que si n palomas se distribuyen de forma *aleatoria* en m palomares con una probabilidad uniforme $1/m$, entonces habrá al menos un palomar con más de una paloma con una probabilidad $1 - m!/[(m - n)!m^n]$. Consideremos algunos ejemplos que ofrecen resultados poco intuitivos.

Debido al principio del palomar, en la ciudad de Nueva York debe haber al menos dos personas con el mismo número de pelos en la cabeza. Imaginemos que representamos los pelos como palomares y las personas como palomas. Nueva York tiene más de ocho millones de habitantes, y el cabello humano tiene menos de un millón de pelos, lo que implica que habrá al menos dos personas con el mismo número de pelos en la cabeza

Imaginemos ahora que pintamos de rojo y azul una de las caras de un papel del tamaño de un billete. ¿Será posible encontrar dos puntos del mismo color que estén a una determinada distancia uno del otro (tres centímetros, por ejemplo) con independencia de lo intrincado del dibujo? Para resolverlo, dibuje un triángulo equilátero de tres centímetros de lado. Imagine que los colores son palomares y que los vértices del triángulo son palomas. Al menos dos de los vértices deben ser del mismo color. De modo que deben existir dos puntos del mismo color exactamente a tres centímetros de distancia.

VÉASE TAMBIÉN Dados (c. 3000 a. C.) La *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace (1812) y La teoría de Ramsey (1928).

Dados m palomares y n palomas, podemos afirmar con certeza que, si $n > m$, habrá al menos un palomar con más de una paloma.



1843

Los cuaterniones

Sir William Rowan Hamilton (1805–1865)

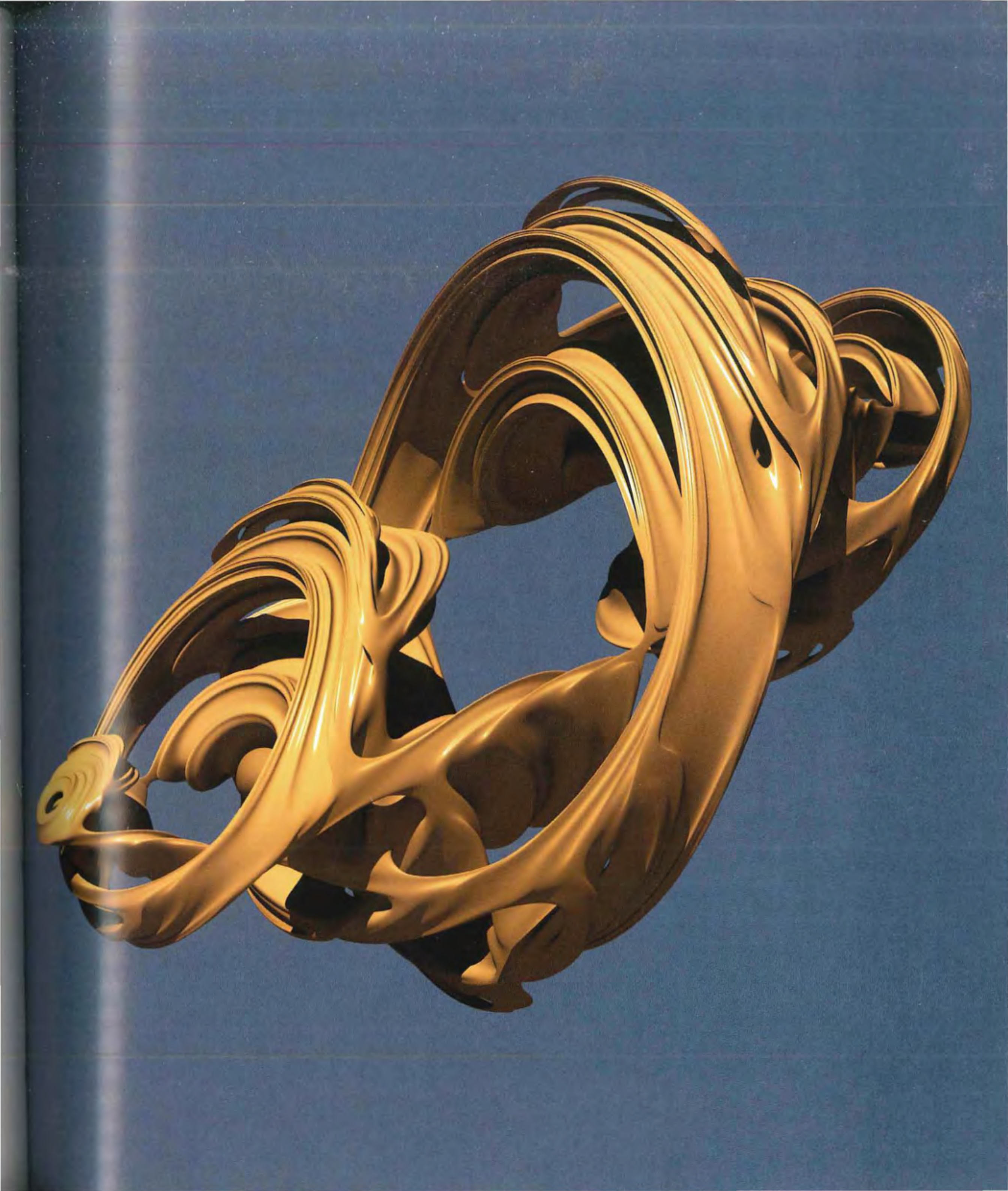
Los cuaterniones son números de cuatro dimensiones definidos en 1843 por el matemático irlandés William Hamilton. Desde entonces, se han utilizado para describir las dinámicas del movimiento en tres dimensiones y se han aplicado en las gráficas de realidades virtuales, en la programación de videojuegos, en el procesamiento de señales, en robótica, en bioinformática y en estudios sobre la geometría del espacio-tiempo. La velocidad, la compacidad y la fiabilidad de los cuaterniones hacen que estén presentes en el *software* de vuelo de los transbordadores espaciales: se utilizan para calcular trayectorias, para la navegación y para el control de vuelo.

A pesar de la utilidad potencial de los cuaterniones, algunos matemáticos se mostraron escépticos en un principio. El físico escocés William Thomson (1824–1907) escribió: «Hamilton describió los cuaterniones después de algunos trabajos excelentes; aunque ingeniosos y bellos, han demostrado ser la personificación del mal para todos aquellos que se han aproximado a ellos». En el lado opuesto, el ingeniero y matemático Oliver Heaviside afirmó en 1892 que «la invención de los cuaterniones debe verse como la hazaña más extraordinaria del ingenio humano. El análisis vectorial, sin cuaterniones, podría haberlo descubierto cualquier matemático... pero el hallazgo de los cuaterniones exigía un genio». Debemos señalar que Theodore Kaczynski (el terrorista conocido como «Unabomber») escribió intrincados tratados matemáticos acerca de los cuaterniones antes de comenzar su campaña de envío de cartas-bomba.

Los cuaterniones pueden representarse en cuatro dimensiones como $Q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$, donde i, j, y k son (al igual que el número imaginario i) vectores unitarios en tres direcciones ortogonales (perpendiculares), y perpendiculares a su vez al eje de los números reales. Para sumar o multiplicar dos cuaterniones los tratamos como si fueran polinomios de i, j, y k, pero con las siguientes reglas: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = -ji = k$; $jk = -kj = i$; y $ki = -ik = j$. Hamilton escribió que había grabado estas fórmulas en una piedra del puente Brougham de Dublín mientras paseaba con su mujer, después de que la idea se le apareciera como una revelación.

VÉASE TAMBIÉN Los números imaginarios (1572).

El físico Leo Fink creó esta sección tridimensional de las cuatro dimensiones de un cuaternión fractal. La intrincada superficie representa el complejo comportamiento de $Q_{n+1} = Q_n^2 + c$*, donde Q y c son cuaterniones y* $c = -0,35 + 0,7i + 0,15j + 0,3k$.



1844

Los números trascendentes

Joseph Liouville (1809–1882), **Charles Hermite** (1822–1901), **Ferdinand von Lindemann** (1852–1939)

En 1844, el matemático francés Joseph Liouville estudió el siguiente número: 0,110001000000000000000001000..., que en la actualidad conocemos como constante de Liouville. ¿Sería el lector capaz de imaginar su significado o la regla que se utilizó para crearlo?

Liouville demostró que este número tan inusual era trascendente, con lo que este número se convirtió en uno de los primeros en demostrar tal condición. Nótese que la constante tiene un 1 en las posiciones decimales correspondientes al factorial de un número, y ceros en el resto. De modo que sólo hay un 1 en los decimales 1, 2, 6, 24, 120, 720, etcétera.

Los números trascendentes son tan exóticos que su «descubrimiento» es muy reciente; es posible que los lectores sólo estén familiarizados con uno de ellos, π, o con dos si conocen el **número de Euler, *e*.** Se trata de números que no pueden expresarse como la raíz de una ecuación algebraica con coeficientes racionales. Esto quiere decir que π, por ejemplo, nunca podría satisfacer de manera exacta una ecuación del tipo $2x^4 - 3x^2 + 7 = 0$.

Demostrar que un número es trascendente resulta muy difícil. El matemático francés Charles Hermite demostró que *e* era trascendente en 1873, y el matemático alemán Ferdinand von Lindemann hizo lo propio con π en 1882. En 1874, otro matemático alemán, Georg Cantor, sorprendió a muchos colegas al demostrar que «casi todos» los números reales son trascendentes. Si pusiésemos todos los números reales en una enorme jarra, los mezclásemos y extrajésemos uno al azar, el elegido sería casi con toda seguridad un número trascendente. Y sin embargo, a pesar de que están por todas partes, sólo se conocen unos pocos, a los que se pone nombre. Hay muchas estrellas en el cielo, pero ¿cuántas somos capaces de nombrar?

Al margen de sus objetivos matemáticos, Liouville mostró interés por la política; en 1848 fue elegido miembro de la asamblea constituyente francesa. Una derrota electoral posterior lo sumió en la depresión. Sus enmarañadas matemáticas comenzaron a mezclarse con citas poéticas. A pesar de todo, a lo largo de su vida Liouville escribió más de cuatrocientos artículos matemáticos serios.

VÉASE TAMBIÉN La cuadratura de la lúnula (c. 440 a. C.), π (c. 250 a. C.), El número de Euler, *e* (1727), La fórmula de Stirling (1730), Los números transfinitos de Cantor (1874), Números normales (1909) y El número de Champernowne (1933).

El matemático francés Charles Hermite, c. 1887. En 1873, Hermite demostró que el número de Euler, e, era trascendente.



1844

La conjetura de Catalan

Eugène Charles Catalan (1814–1894), **Preda Mihăilescu** (nacido en 1955)

Las conjeturas de apariencia simple que implican números enteros pueden llegar a confundir a los matemáticos más brillantes. Como en el caso del último teorema de Fermat, pueden transcurrir siglos sin que se demuestren o se refuten. Es posible que algunas no se resuelvan nunca, ni siquiera con el trabajo conjunto de humanos y ordenadores.

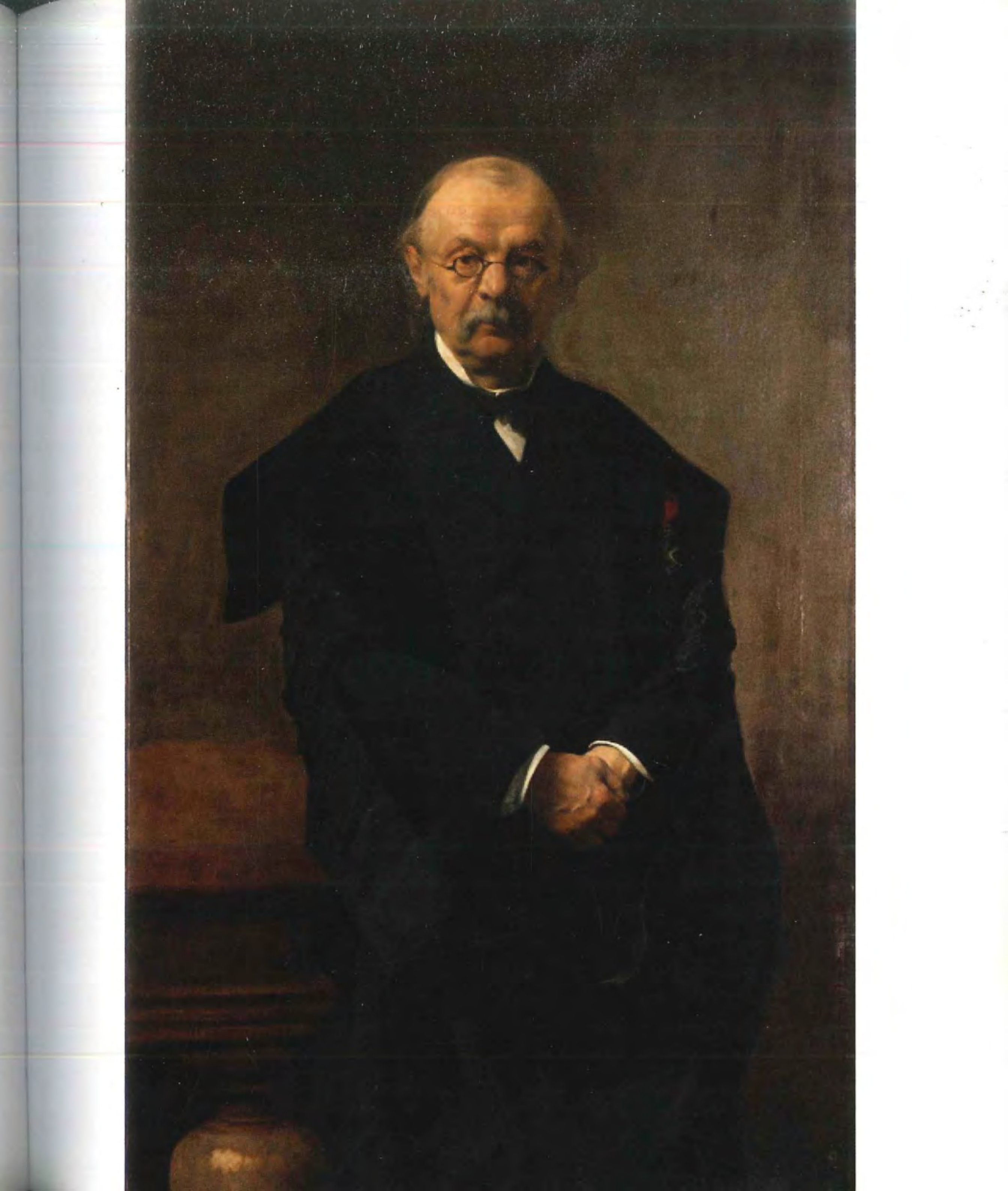
Para acercarnos a la conjetura de Catalan, imaginemos los números enteros mayores que 1 elevados al cuadrado: los resultados serán 4, 9, 16, 25... Consideremos también, por otra parte, los mismos números elevados al cubo: 8, 27, 64, 125... Si unimos los dos conjuntos y los ordenamos de menor a mayor, obtendremos 4, 8, 9, 16, 25, 27, 36... Nótese que el 8 (2^3) y el 9 (3^2) son consecutivos. En 1844, el matemático belga Eugène Catalan conjeturó que el 8 y el 9 eran las únicas dos potencias consecutivas de números enteros. Si existiera otra pareja de números consecutivos, podría encontrarse buscando los valores enteros (y mayores que 1) de x, y, q y p que cumplieran la expresión $x^p - y^q = 1$. Catalan creía que sólo existía una solución: $3^2 - 2^3 = 1$.

La historia de la conjetura de Catalan tiene protagonistas de lo más pintoresco. Cientos de años antes de Catalan, el francés Levi ben Gerson (1288–1344) —más conocido como Gersónides o Ralbag— ya había demostrado una versión más restringida de la conjetura, según la cual las únicas potencias consecutivas de 2 y 3 son 3^2 y 2^3. Ralbag fue un famoso rabino, filósofo, matemático y talmudista.

Avancemos hasta 1976, cuando Robert Tijdeman, de la universidad holandesa de Leiden demostró que, de existir otras potencias consecutivas, el número de éstas sería finito. En 2002, por fin, Preda Mihailescu, de la universidad alemana de Paderborn demostró la conjetura de Catalan.

VÉASE TAMBIÉN El último teorema de Fermat (1637) y El problema de la división del polígono de Euler (1751).

El matemático belga Eugène Charles Catalan. En 1844 Catalan conjeturó que el 8 y el 9 eran las únicas dos potencias consecutivas de números enteros.



1850

Las matrices de Sylvester

James Joseph Sylvester (1814–1897), **Arthur Cayley** (1821–1895)

En su artículo de 1850 «*Sobre una nueva clase de teoremas*», el matemático inglés James Sylvester utilizó por primera vez la palabra matrices para referirse a ciertas disposiciones rectangulares de elementos que pueden sumarse y multiplicarse. Las matrices suelen utilizarse para describir un sistema de ecuaciones lineales o para representar información que depende de dos o más parámetros.

El mérito de comprender e identificar la importancia de las propiedades algebráicas de las matrices suele otorgarse al matemático inglés Arthur Cayley y a sus últimos trabajos de 1855. Dado que Cayley y Sylvester colaboraron estrechamente durante muchos años, la fundación de la teoría de matrices suele atribuirse a ambos.

La teoría de matrices floreció a mediados del siglo XIX, pero algunos conceptos simples relacionados con las matrices son anteriores a nuestra era: los antiguos chinos conocían los **cuadrados mágicos** y habían comenzado a aplicar métodos matriciales para resolver sistemas de ecuaciones. Otros dos matemáticos, el japonés Seki Kowa y el alemán Gottfried Leibniz, también exploraron el uso de las matrices (en 1683 y 1693 respectivamente).

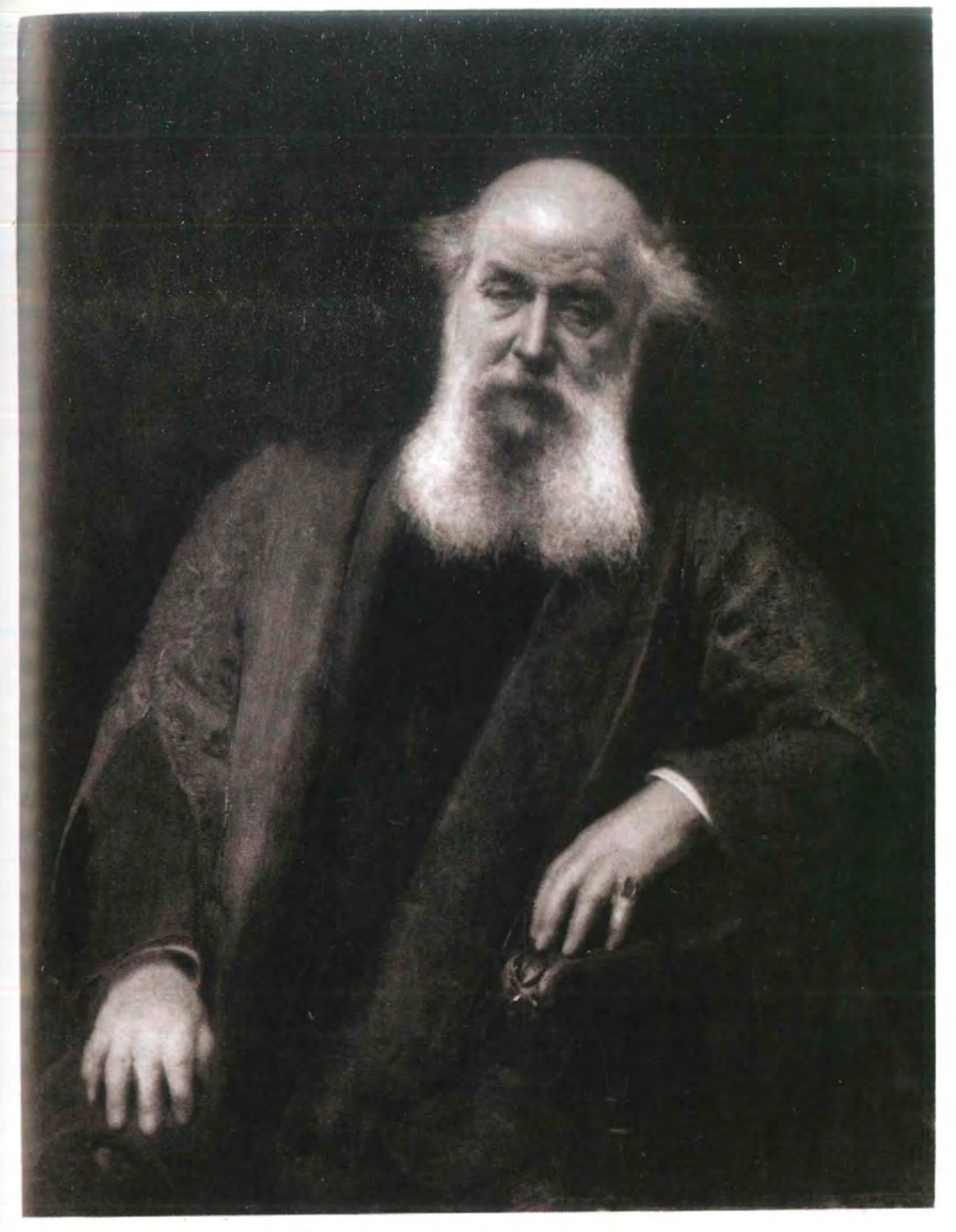
Tanto Sylvester como Cayley habían estudiado en Cambridge, pero Sylvester no pudo obtener el título porque era judío, a pesar de que logró el segundo puesto en los exámenes de matemáticas. Antes de asistir a Cambridge, Sylvester había estudiado en la Royal Institution de Liverpoool, pero los otros estudiantes le hostigaban debido a su religión y acabó escapando a Dublín.

Cayley trabajó como abogado durante más de diez años, en los que además publicó unos doscientos cincuenta artículos sobre matemáticas. En su etapa en Cambridge publicaría otros seiscientos cincuenta. Cayley introdujo la multiplicación de matrices.

En la actualidad las matrices se utilizan en áreas muy diversas, desde la encriptación y desencriptación de datos a la manipulación de gráficos digitales (en videojuegos y medicina, por ejemplo), pasando por la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, los estudios de mecánica cuántica sobre la estructura atómica, el equilibrio de cuerpos sólidos, la teoría de grafos, la teoría de juegos, los modelos económicos y las redes electrónicas.

VÉASE TAMBIÉN Cuadrados mágicos (c. 2200 a. C.) El problema de los treinta y seis oficiales (1779) y El problema de la recta de Sylvester (1893).

Retrato de James Joseph Sylvester, frontispicio del cuarto volumen de The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester, *editado por H. F. Baker (Cambridge University Press, 1912).*



Yours faithfully
J. J. Sylvester

1852

El teorema de los cuatro colores

Francis Guthrie (1831–1899), **Kenneth Appel** (nacido en 1932), **Wolfgang Haken** (nacido en 1928)

Los cartógrafos han supuesto durante siglos que cuatro colores eran suficientes para crear cualquier mapa o plano de modo que no haya dos regiones limítrofes del mismo color (aunque dos regiones del mismo color pueden tener un vértice común). En la actualidad sabemos con certeza que aunque evidentemente existen mapas planos que pueden colorearse con menos colores, ningún mapa requiere más de cuatro. Cuatro colores son suficientes también para colorear mapas dibujados sobre esferas o cilindros. Sin embargo, para pintar un mapa en un toro pueden llegar a necesitarse hasta siete colores (un toro es una superficie con forma de rosquilla).

En 1852, el matemático y botánico Francis Guthrie fue el primero en conjeturar, mientras cartografiaba los condados ingleses, que cuatro colores podían ser suficientes. Desde entonces, los matemáticos han intentado demostrar las consecuencias de esta observación aparentemente tan sencilla, que durante mucho tiempo ha sido uno de los problemas topológicos no resueltos más famosos.

Por fin, en 1976, los matemáticos Kenneth Appel y Wolfgang Haken demostraron con éxito el teorema de los cuatro colores con la ayuda de un ordenador que examinaba miles de casos: se convirtió así en el primer problema de matemáticas puras que se sirvió de un ordenador para lograr una parte esencial de la demostración. En la actualidad los ordenadores desempeñan papeles cada vez más importantes en las matemáticas, y ayudan a los expertos a verificar ciertas demostraciones cuya complejidad desafía la comprensión humana. El teorema de los cuatro colores es un buen ejemplo. Otro es la clasificación de los grupos simples finitos, encarnada en un proyecto colectivo de diez mil páginas. Desafortunadamente, los tradicionales métodos humanos para asegurar que una demostración es correcta se vienen abajo cuando los artículos resultantes constan de miles de páginas.

Aunque parezca sorprendente, el teorema de los cuatro colores ha tenido poca importancia en el terreno de la cartografía. Un estudio acerca de la evolución de los atlas revela que no ha habido ningún intento de minimizar el número de colores, y los libros sobre cartografía e historia suelen utilizar más colores de los necesarios.

VÉASE TAMBIÉN La conjetura de Kepler (1611), La hipótesis de Riemann (1859), La botella de Klein (1882) y La búsqueda del grupo de Lie E_8 (2007).

Este mapa de Ohio, reproducción de un original de 1881, utiliza cuatro colores. Nótese que no hay regiones limítrofes del mismo color.


A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
LAKE ERIE
FULTON
WOOD
HENRY
PUTNAM
ALLEN
AUGLAIZE
LOGAN
CHAMPAIGN
MIAMI
CLARK
GREENE
CLINTON
HIGHLAND
BROWN
ADAMS
PIKE
ROSS
PICKAWAY
FAIRFIELD
HOCKING
VINTON
ATHENS
MEIGS
GALLIA
LAWRENCE
SCIOTO
WASHINGTON
NOBLE
MONROE
MORGAN
PERRY
LICKING
KNOX
HOLMES
COSHOCTON
GUERNSEY
BELMONT
HARRISON
JEFFERSON
CARROLL
COLUMBIANA
STARK
WAYNE
MAHONING
PORTAGE
SUMMIT
TRUMBULL
ASHTABULA
GEAUGA
CUYAHOGA
LORAIN
MEDINA
HURON
ERIE
SANDUSKY
SENECA
CRAWFORD
WYANDOT
RICHLAND
MORROW
MARION
DELAWARE
FRANKLIN
COLUMBUS
ASHLAND
CLEVELAND
SANDUSKY
CAMPBELL
PENDLETON
JACKSON
MASON
PUTNAM
CABELL
WOOD
WETZEL
NEW MARTINSVILLE
PARKERSBURG
WHEELING
KENTUCKY
WEST
VIRG
MAP OF
HAMILTON CO.,
OHIO.
SCALE OF MILES.

1854

El álgebra de Boole

George Boole (1815–1864)

El trabajo más importante del matemático inglés George Boole se publicó en 1854. Su título es *An Investigation into the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (Una investigación acerca de las leyes del pensamiento, en las que se basan las teorías matemáticas de la lógica y las probabilidades). Boole intentó reducir la lógica a un álgebra simple que sólo utilizara dos cantidades (0, 1) y tres operaciones básicas (y, o, no) El álgebra de Boole ha tenido enormes aplicaciones en conmutación telefónica y en diseño de ordenadores. Boole consideraba su trabajo «la más valiosa contribución que he hecho o podré hacer a la ciencia y aquello por lo que me gustaría ser recordado».

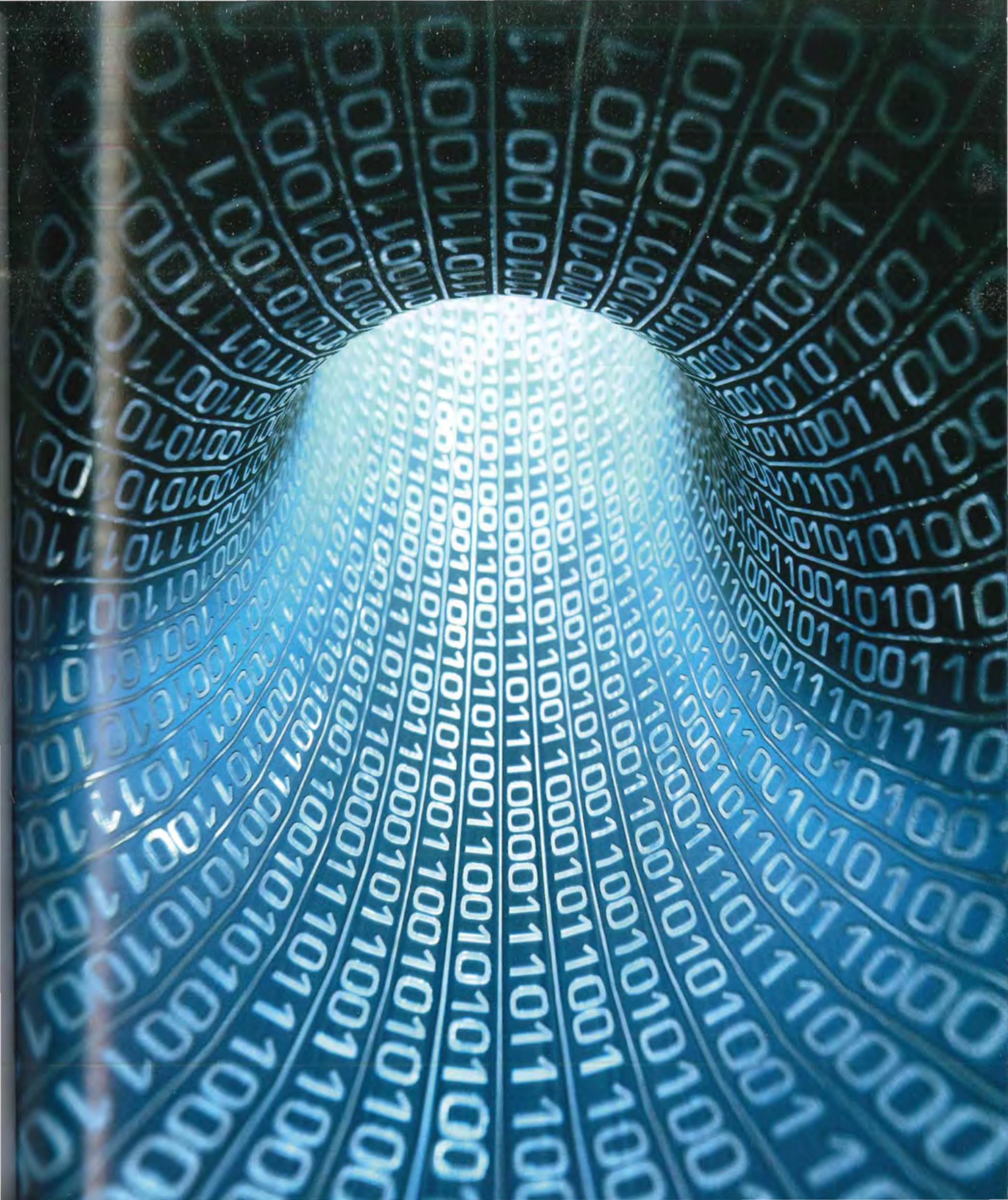
Boole falleció a los cuarenta y nueve años: una tormenta a la intemperie le desencadenó un ataque de fiebre. Por desgracia, su mujer vertió grandes cantidades de agua sobre él porque creía que el remedio estaba en repetir las causas que habían provocado la enfermedad.

El matemático Augustus De Morgan (1806–1871) alabó su trabajo en los siguientes términos: «El sistema lógico de Boole es un claro ejemplo de la combinación de genialidad y paciencia. Nadie creería, si no se hubiera demostrado, que los procesos simbólicos del álgebra, inventados como herramientas de cálculo numérico, podrían llegar a expresar los actos del pensamiento y amueblar las gramáticas y los diccionarios con un sistema lógico que lo abarca todo».

Unos setenta años después de la muerte de su descubridor, el matemático estadounidense Claude Shannon (1916–2001) conoció el álgebra de Boole en su etapa de estudiante y demostró que se podía utilizar para optimizar el diseño de los sistemas de conmutación telefónica. Demostró, además, que los circuitos con relés eran capaces de resolver problemas de álgebra de Boole. De modo que Boole se convirtió, con la ayuda de Shannon, en uno de los fundadores de la era digital.

VÉASE TAMBIÉN El *Órganon* de Aristóteles (c. 350 a. C.), La *Théorie du Baguenodier* de Gros (1872), Los diagramas de Venn (1880), *Filosofía y diversión del álgebra*, de Boole (1909), *Principia Mathematica* (1910–1913), El teorema de Gödel (1931), El código Gray (1947), La teoría de la información (1948) y La lógica difusa (1965).

El artista y fotógrafo ucraniano Mikhail Tolstoy ilustra su concepción creativa de una corriente binaria compuesta por unos y ceros. La obra le recuerda a la información binaria que fluye por redes digitales como Internet.



1857

El juego icosiano

Sir William Rowan Hamilton (1805–1865)

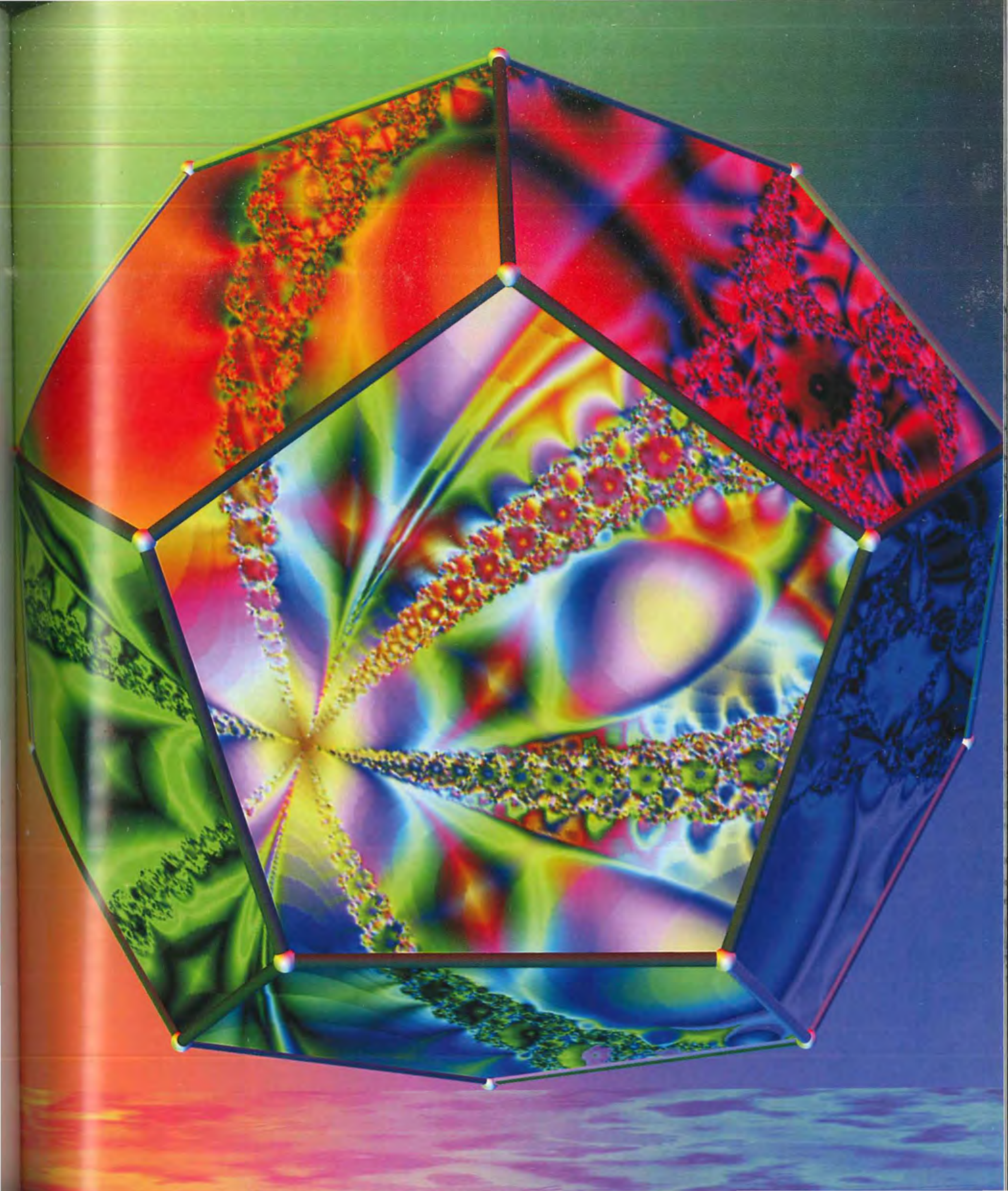
El matemático, físico y astrónomo irlandés William Hamilton ideó en 1857 el juego icosiano, cuyo objetivo consiste en encontrar una trayectoria que recorra las aristas de un dodecaedro (poliedro de doce caras) pasando una sola vez por cada vértice. En la actualidad, los expertos en teoría de grafos llaman trayectoria hamiltoniana a aquella que pasa por cada vértice una única vez. Un ciclo (o circuito) hamiltoniano, que es lo que se pide en el juego icosiano, es aquel en el que la trayectoria regresa al punto de partida. El matemático británico Thomas Kirkman (1806–1895) enunció el juego icosiano de forma más general: dado el grafo de un poliedro, ¿existe un ciclo que pase una única vez por cada vértice?

El término *icosiano* procede de la invención, por parte de Hamilton, de un tipo de álgebra llamada cálculo *icosiano*, basada en las propiedades de simetría del icosaedro. Resolvió el problema por medio de esa álgebra y de los *icosianos* (una clase especial de vectores) asociados. Todos los sólidos platónicos son hamiltonianos. En 1974, el matemático Frank Rubon describió un procedimiento de búsqueda capaz de encontrar trayectorias y ciclos hamiltonianos en grafos.

Un fabricante de juguetes londinense compró los derechos del juego icosiano y creó un juego con un dodecaedro que tenía clavos en los vértices. Cada clavo representaba una ciudad. El jugador marcaba su trayectoria con una cuerda que se anudaba en cada ciudad «visitada». El juego también se vendió en otras versiones, por ejemplo en forma de un tablero plano que tenía agujeros en los nodos del dodecaedro (puede crearse un modelo plano de un dodecaedro extendiéndolo después de recortar una de sus caras). Desafortunadamente, el juego no se vendió bien; entre otras razones porque era bastante fácil de resolver. Es posible que Hamilton estuviera tan centrado en teorías profundas que no se diera cuenta de que se podía llegar a una solución por el método de ensayo y error.

VÉASE TAMBIÉN Los sólidos platónicos (c. 350 a. C.), Los poliedros arquimedianos (c. 240 a. C.), Los puentes de Königsberg (1736), La fórmula de Euler para los poliedros (1751), El teorema de Pick (1899), La cúpula geodésica (1922), El poliedro de Császár (1949), El poliedro de Szilassi (1977), Spidrones (1979) y La solución al poliedro (1999).

Versión creativa del juego icosiano realizada por Teja Krašek. El objetivo consiste en encontrar una trayectoria que bordee el dodecaedro por sus aristas de modo que cada uno de sus 20 vértices se visite una sola vez. En 1859, un fabricante de juguetes londinense compró los derechos del juego.



1857

El armonógrafo

Jules Antoine Lissajous (1822–1880), Hugh Blackburn (1823–1909)

El armonógrafo es un mecanismo que, por medio de dos péndulos, traza trayectorias que pueden estudiarse tanto desde un punto de vista artístico como desde un punto de vista matemático. En una de sus variantes, un péndulo mueve un lápiz o cualquier otro útil de escritura. El otro péndulo mueve una mesa con una hoja de papel. El efecto combinado de los dos péndulos genera un movimiento complejo que poco a poco, y debido al rozamiento, se va reduciendo a un único punto. Cada trazada del lápiz se encuentra muy próxima a la trazada precedente, con lo que el resultado muestra una apariencia ondulatoria que puede recordar a una tela de araña. Al variar la frecuencia y las fases relativas de los péndulos se generan diseños muy diferentes.

En la versión más simple, estos diseños pueden caracterizarse como curvas de Lissajous que describen el movimiento armónico complejo; pueden representarse (asumiendo que no existe rozamiento) como las curvas generadas por $x(t) = A\text{sen}(at + d)$, $y(t) = B\text{sen}(bt)$, donde t es el tiempo y A y B son amplitudes. La relación entre a y b controla las frecuencias relativas, mientras que d señala la diferencia de fase. A partir de unos pocos parámetros puede generarse un amplio abanico de curvas ornamentales.

Los primeros armonógrafos se construyeron en 1857, cuando el matemático y físico francés Jules Antoine Lissajous dio a conocer los patrones generados por dos diapasones anclados a pequeños espejos que vibraban con frecuencias distintas. Un rayo de luz reflejado en los espejos producía intrincadas curvas que deleitaban al público.

Se atribuye al matemático y físico británico Hugh Blackburn el mérito de hacer las primeras versiones del armonógrafo con péndulos tradicionales; desde entonces, se han creado muchas variantes del armonógrafo de Blackburn. Existen armonógrafos más complejos que incorporan más péndulos colgados unos de otros. En mi novela *The Heaven Virus* (El virus del cielo), aparece un extraño armonógrafo alienígena «con un bolígrafo que oscila sobre una plataforma que oscilaba sobre otra plataforma que oscilaba sobre otra plataforma y así sucesivamente hasta llegar a la décima plataforma».

VÉASE TAMBIÉN El analizador diferencial (1927), El caos y el efecto mariposa (1963), El atractor de Ikeda (1979) y La curva mariposa (1989).

Representación de un armonógrafo por Ivan Moscovic. En los años sesenta, Moscovich creó grandes armonógrafos mecánicos, muy eficientes, conectando péndulos a una superficie vertical. Moscovich, célebre por sus rompecabezas y acertijos, permaneció en el campo de concentración de Auschwitz hasta que fue liberado por las tropas británicas en 1945.



1858

La cinta de Möbius

August Ferdinand Möbius (1790-1868)

El matemático alemán August Ferdinand Möbius fue un profesor tímido, despistado y huraño. Hizo su mayor descubrimiento, la cinta de Möbius, cuando contaba casi setenta años de edad. Es fácil construir una de estas cintas: basta con unir los dos extremos de una cinta después de haber girado uno de ellos ciento ochenta grados. El resultado es una superficie de una sola cara; un insecto podría arrastrarse de un punto de la cinta a cualquier otro punto sin necesidad de pasar por el borde. Intente pintar la cinta con una tiza. Es imposible pintar una cara de rojo y la otra de verde, porque sólo existe una cara.

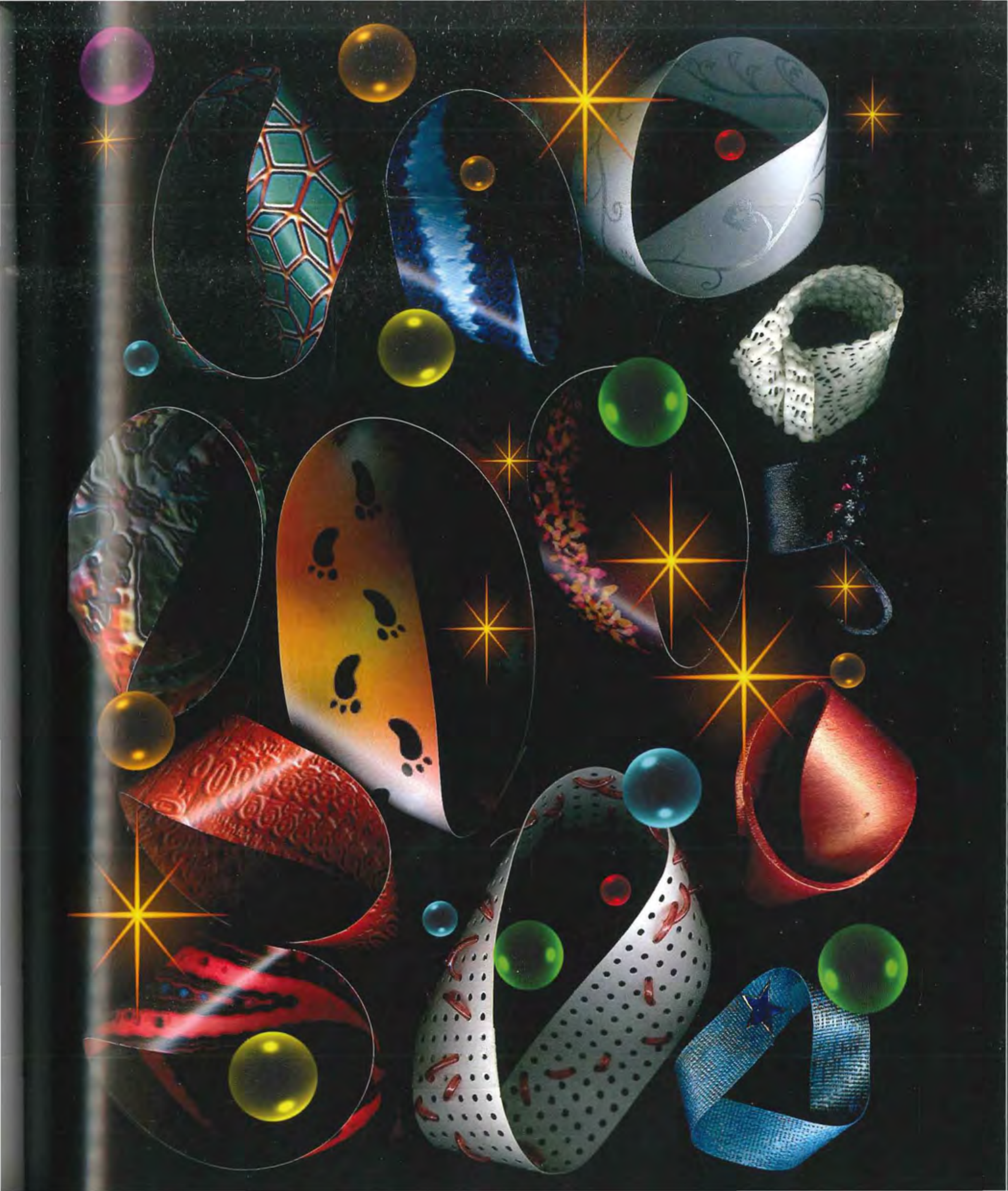
La popularidad y las aplicaciones de la cinta de Möbius crecieron tras la muerte de su descubridor hasta pasar a formar parte integral de las matemáticas, el ilusionismo, la ciencia, el arte, la ingeniería, la literatura y la música. La cinta de Möbius es también el logotipo universal del reciclaje, representando el proceso de transformación de los desechos hasta convertirse en recursos útiles. En la actualidad, la cinta de Möbius se encuentra en todas partes, desde las moléculas y las esculturas metálicas a la filatelia, la literatura, las patentes, la arquitectura y diversas estructuras de nuestro universo cotidiano.

August Möbius descubrió su célebre cinta al mismo tiempo que lo hacía el matemático alemán Johann Benedict Listing (1808–1882). Pero da la impresión de que Möbius exploró el concepto un poco más que Listing, ya que estudió con detalle sus extraordinarias propiedades.

La cinta de Möbius es la primera superficie de una sola cara descubierta y estudiada por la humanidad. Parece inverosímil que nadie hubiera descrito las propiedades de estos objetos hasta mediados del siglo XIX, pero no hay fuentes que indiquen lo contrario. Dado que la cinta de Möbius suele ser la primera y única aproximación de mucha gente al estudio de la topología (la ciencia de las formas geométricas y sus relaciones), este elegante descubrimiento merece su lugar en este libro.

VÉASE TAMBIÉN Los puentes de Königsberg (1736), La fórmula de Euler para los poliedros (1751), El problema del caballo (1759), El cálculo baricéntrico (1827), El triángulo de Reuleaux (1875), La botella de Klein (1882) y La superficie de Boy (1901).

Múltiples cintas de Möbius, obra creda por Teja Krašek y Cliff Pickover. La cinta de Möbius es la primera superficie de una sola cara descubierta y estudiada por la humanidad.



1858

El teorema de Holditch

Hamnet Holditch (1800–1867)

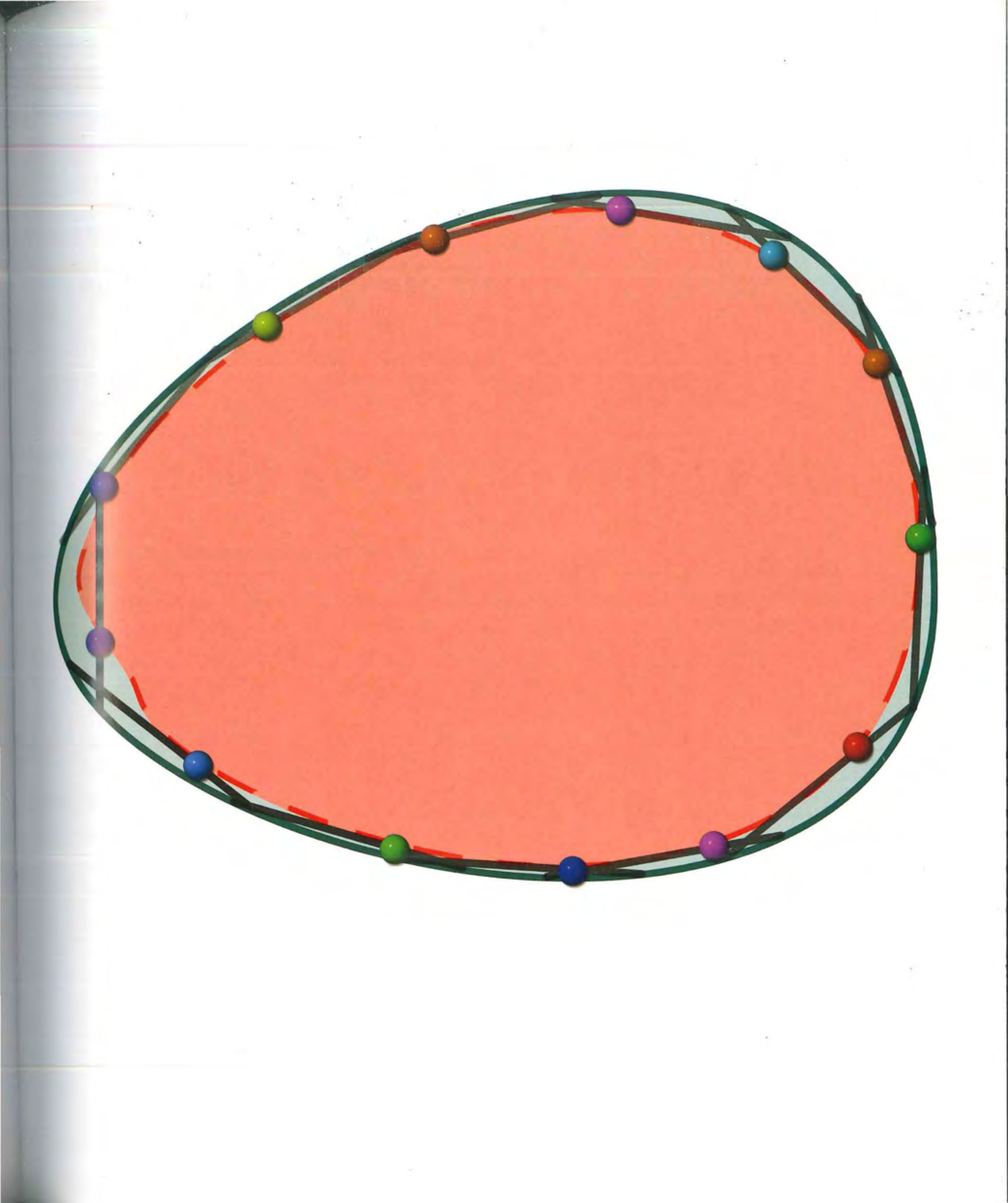
Dibuje una curva suave, cerrada y convexa C_1. Coloque una cuerda de longitud constante en el interior de la curva y deje que se deslice por su interior de modo que los dos extremos toquen C_1, en todo momento. (El lector puede visualizar este proceso si mueve un palito alrededor de la superficie de un charco cuya forma sea la de C_1). Marque un punto del palo de modo que éste quede dividido en dos partes de longitudes p y q. A medida que mueve el palo, este punto traza una nueva curva cerrada, C_2, en el interior de C_1. Si asumimos que C_1 tiene una forma tal que el palo puede dar una vuelta completa a C_1, el teorema de Holditch establece que el área entre las curvas C_1 y C_2 será πpq. Hay que destacar que esta cantidad es independiente de la forma de C_1.

El teorema de Holditch ha maravillado a los matemáticos durante más de un siglo. En 1998, por ejemplo, el matemático británico Mark Cooker escribió: «Hubo dos cosas que me asombraron desde el principio. En primer lugar, que la fórmula del área sea independiente del tamaño de C_1. Y, en segundo lugar, que esta área coincida con el área de una elipse de semiejes p y q, sobre todo porque en el teorema no aparece ninguna elipse».

El reverendo Hamnet Holditch, que fue presidente del Caius College de Cambridge a mediados del siglo XIX, publicó el teorema en 1858. Si C_1 es una circunferencia de radio R, C_2 será una circunferencia menor de radio $r = \sqrt{R^2 - pq}$.

VÉASE TAMBIÉN π (c. 250 a. C.) y El teorema de la curva de Jordan (1905).

A medida que el palo se desliza alrededor de la curva exterior, uno de sus puntos traza la curva interior. El teorema de Holditch afirma que el área entre las dos curvas será $\pi \cdot p \cdot q$, una cantidad independiente de la forma de la curva exterior. (Dibujo de Brian Mansfield.)



1859

La hipótesis de Riemann

Georg Freidrich Bernhard Riemann (1826–1866)

Muchas encuestas entre expertos señalan que «la demostración de la hipótesis de Riemann» es la cuestión matemática pendiente de mayor importancia. Esta demostración está relacionada con la función zeta, que puede representarse como una curva de aspecto bastante complejo y de gran utilidad en teoría de números para investigar las propiedades de los números primos. Escrita $\zeta(x)$, la función se definió originalmente como la serie $\zeta(x) = 1 + (1/2)^x + (1/3)^x + (1/4)^x + \ldots$ Si $x = 1$, el resultado es infinito. Sin embargo, valores de x mayores que 1 dan como resultado una suma finita. Si x es menor que 1, la suma también es infinita. La función zeta completa, estudiada y debatida en la literatura matemática es más complicada: coincide con esta misma serie para valores mayores que 1, pero tiene valores finitos para cualquier número real o complejo excepto para aquellos cuya parte real es 1. Sabemos que la función es cero cuando x es igual a $-2, -4, -6, \ldots$ y que tiene un infinito número de valores cero en el conjunto de números complejos con parte real entre cero y uno, pero no sabemos con exactitud cuáles son. El matemático Georg Bernhard Riemann conjeturó que estos ceros se producen en números complejos cuya parte real es 1/2. Existen muchas pruebas numéricas a favor de esta conjetura, pero todavía no se ha demostrado. La confirmación de la hipótesis de Riemann tendría consecuencias profundas en la teoría de los números primos y en el modo en que entendemos las propiedades de los números complejos. Por increíble que pueda parecer, los físicos han encontrado un misterioso vínculo entre la física cuántica y la teoría de números al investigar la hipótesis de Riemann.

En la actualidad, más de once mil voluntarios en todo el mundo trabajan en la hipótesis de Riemann utilizando un paquete de *software* distribuido en Zetagrid.net para buscar los ceros de la función zeta de Riemann. Cada día se calculan más de mil millones de ceros de esta función.

VÉASE TAMBIÉN Números primos generados por cigarras (1 millón a. C.), La criba de Eratóstenes (c. 240 a. C.), La serie armónica diverge (c. 1350), Los números imaginarios (1572), El teorema de los cuatro colores (1852) y Los veintitrés problemas de Hilbert (1900).

Interpretación de Tibor Majlath de la función zeta de Riemann $\zeta(s)$ en el plano complejo. Los cuatro dibujos en forma de diana de las partes superior e inferior corresponden a ceros con $Re(s) = ½$. El dibujo se extiende desde -32 hasta +32 en los ejes real e imaginario.



1868

La pseudoesfera de Beltrami

Eugenio Beltrami (1835–1899)

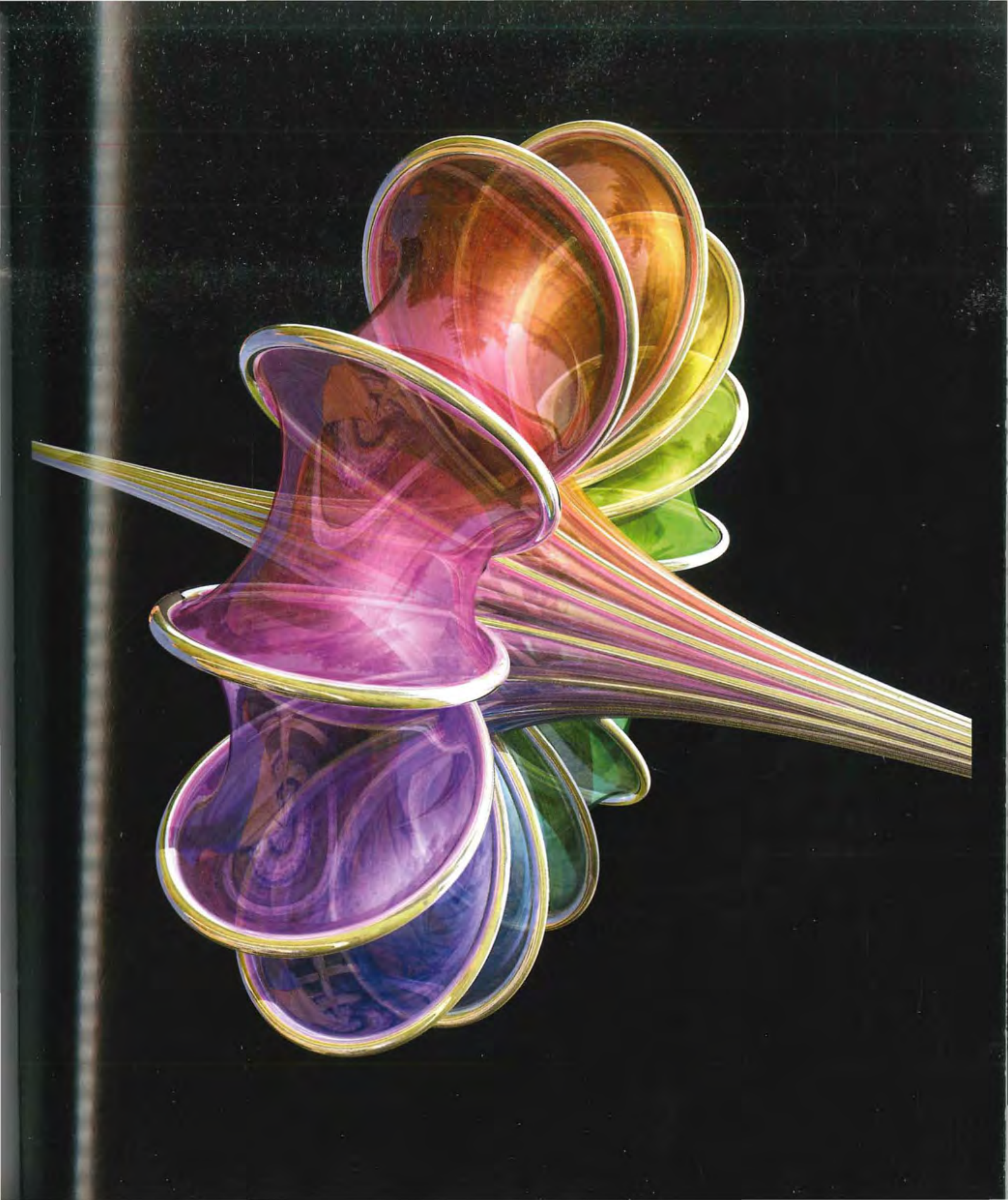
La pseudoesfera es un objeto geométrico que recuerda a dos trompetas unidas por los bordes. Las «boquillas» de estas dos trompetas están muy lejos, en el infinito, como para que sólo los dioses puedan tocarlas. El matemático italiano Eugenio Beltrami, famoso por su trabajo en geometría y física, fue el primero en analizar en profundidad esta forma tan peculiar en su artículo «Ensayo sobre una interpretación de la geometría no euclídea» (1868). La superficie se genera al rotar una curva llamada *tractriz* alrededor de su asíntota.

Mientras que en la esfera ordinaria la curvatura es positiva en todos sus puntos, la pseudoesfera tiene una curvatura constante negativa que hace pensar en una concavidad constante en toda su superficie (excepto en el vértice central). De modo que mientras la esfera es una superficie cerrada con un área finita, la pseudoesfera es una superficie abierta de área infinita. El divulgador británico David Darling escribe: «De hecho, aunque tanto el plano bidimensional como la pseudoesfera son infinitos, la pseudoesfera se las arregla para tener más espacio. Podemos pensar que el infinito de la pseudoesfera es más intenso que el del plano». La curvatura negativa de la pseudoesfera exige que los ángulos de un triángulo dibujado en su superficie sumen menos de 180°. La geometría de la pseudoesfera se llama hiperbólica; algunos astrónomos han sugerido que todo nuestro universo podría describirse por medio de una geometría hiperbólica con las propiedades de una pseudoesfera. La importancia histórica de la pseudoesfera se debe a que fue uno de los primeros modelos de espacio **no euclídeo**.

Los intereses de Beltrami iban más allá de las matemáticas. Los cuatro volúmenes de *Opere Matematiche* prestan atención a la óptica, la termodinámica, la elasticidad, el magnetismo y la electricidad. Beltrami fue miembro de la Accademia dei Lincei, de la que fue presidente en 1898. Un año antes de morir fue nombrado miembro del senado italiano.

VÉASE TAMBIÉN La trompeta de Torricelli (1641), Superficie mínima (1774) y Geometría no euclídea (1829).

Una variante de la pseudoesfera clásica de Beltrami, también con curvatura negativa constante, en versión de Paul Nylander.



1872

La función de Weierstrass

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)

A comienzos del siglo XIX los matemáticos creían que las funciones continuas tenían una derivada (una tangente única) que podía especificarse en la mayor parte de los puntos de la curva. En 1872, el matemático alemán Karl Weierstrass sorprendió a todos sus colegas de la academia de Berlín al demostrar que esta noción era falsa. Su función, que es continua en todos los puntos pero no es diferenciable (por tanto, no tiene derivada) en ningúno, está definida por $f(x) = \Sigma a^k \cos(b^k \pi x)$, donde el sumatorio se extiende desde $k = 0$ hasta ∞; a es un número real tal que $0 < a < 1$, b es un número entero impar y positivo y $ab > (1 + 3\pi/2)$. El símbolo de sumatorio, Σ, indica que la función se construye con un número infinito de funciones trigonométricas que producen una estructura oscilante densamente encajada.

Los matemáticos eran muy conscientes, por supuesto, de que las funciones continuas podían no ser diferenciables en determinados puntos problemáticos (por ejemplo la parte inferior de la cuña invertida de la función $f(x) = |x|$, que no tiene derivada en $x = 0$). Sin embargo, cuando Weierstrass demostró la existencia de una curva que no era diferenciable en ningún punto, los matemáticos se encontraron con un dilema. En 1893, Charles Hermite le escribió a Thomas Stieltjes una carta que decía lo siguiente: «Me aparto con miedo y horror de esa plaga de funciones continuas que no tienen derivadas...».

En 1875 Paul du Bois-Reymond publicó en un artículo la función de Weierstrass: fue la primera función de este tipo que se publicó. Dos años antes le había entregado a Weierstrass un borrador del artículo (el borrador contenía una función diferente $f(x) = \Sigma \text{sen}(a^k x)/b^k$, con $(a/b) > 1$ y desde $k = 0$ hasta ∞, pero se sustituyó antes de la publicación del artículo).

Al igual que otras formas **fractales**, la función de Weierstrass muestra más detalles a medida que se magnifica. Otros matemáticos, por ejemplo el checo Bernard Bolzano y el alemán Bernhard Riemann, habían trabajado con construcciones similares que no llegaron a publicar (fue en 1830 y 1861 respectivamente). Otro ejemplo de curva continua en todos sus puntos que no tiene derivada en ninguno es la curva fractal de Koch.

VÉASE TAMBIÉN La curva de Peano (1890), El copo de nieve de Koch (1904), La dimensión de Hausdorff (1918), La paradoja de la línea de costa (c. 1950) y Los fractales (1975).

Esta superficie de Weierstrass, formada a partir de numerosas curvas de Weierstrass relacionadas, la aproximó y representó Paul Nylander usando $f_a(x) = \Sigma[\text{sen}(\pi k^a x)/\pi k^a]$ *donde* $0 < x < 1$; $2 < a < 3$; *y sumando desde* $k = 1$ *hasta 15.*



1882

La *Théorie du Baguenodier* de Gros

Louis Gros (c. 1837–c. 1907)

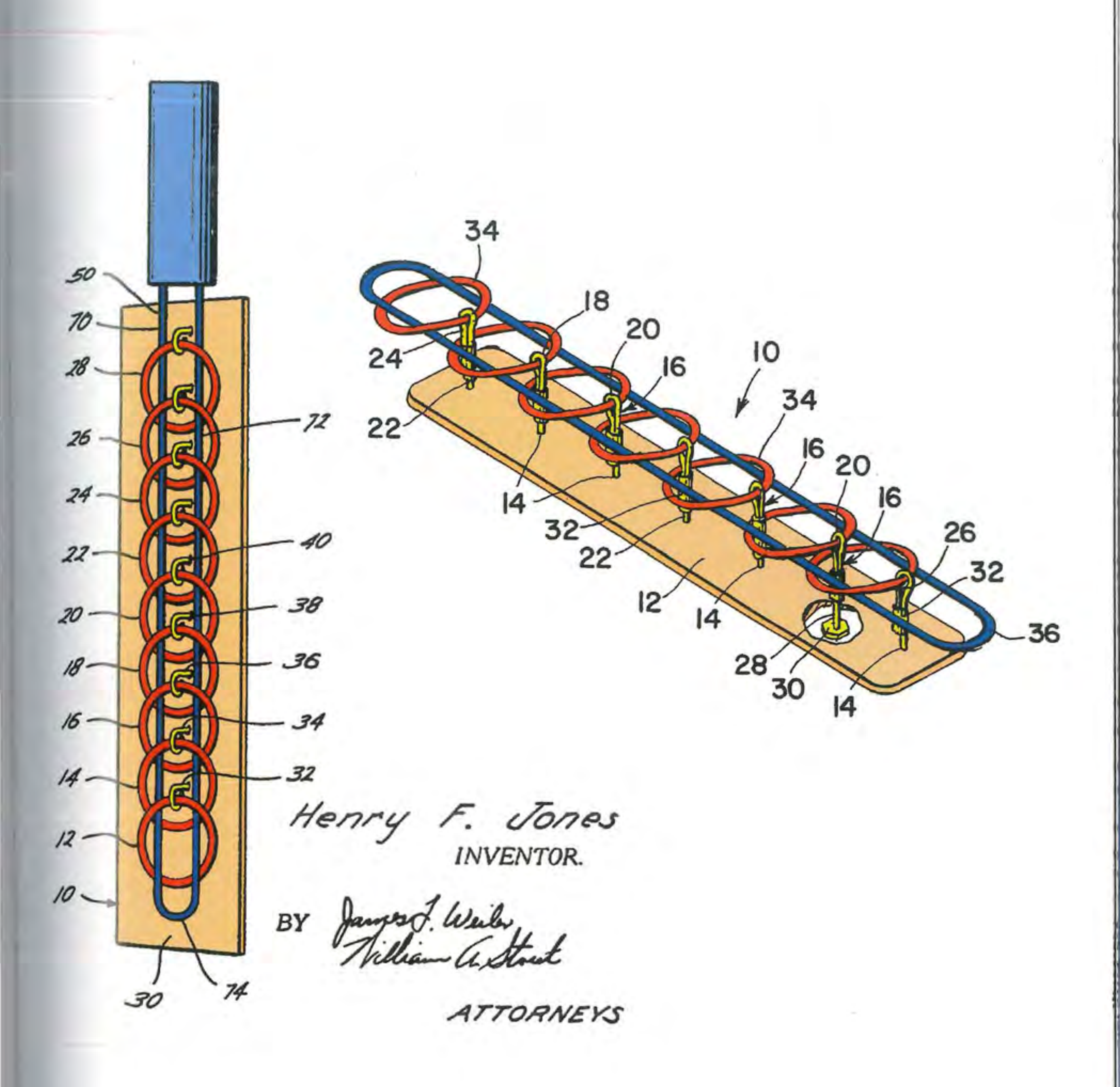
El Baguenaudier es uno de los rompecabezas mecánicos más antiguos que se conocen. En 1901, el matemático inglés Henry E. Dudeney señaló que «no debería haber ningún hogar que no tuviera este juego fascinante, histórico e instructivo».

El objetivo del Baguenaudier consiste en extraer todos los anillos de un lazo rígido de alambre. En el primer movimiento se pueden extraer uno o dos anillos de los extremos del alambre. El proceso completo resulta complicado porque hay que devolver los anillos al lazo de alambre para poder extraer otros, de modo que el procedimiento se repite muchas veces. El número mínimo de movimientos es $(2^{n+1} - 2)/3$ si el número de anillos n es par, y $(2^{n+1} - 1)/3$ si n es impar. Según Martin Gardner, «si hay veinticinco anillos, hacen falta 22.369.621 movimientos. Alguien con experiencia, capaz de hacer cincuenta movimientos por minutos, tardaría un poco más de dos años en resolverlo».

La leyenda asegura que el juego lo inventó el general chino Chu-ko Liang (181–234) para que su mujer estuviera entretenida en tiempos de guerra. En 1872, Louis Gros, un magistrado francés, encontró un vínculo explícito entre estos anillos y los números binarios en su libro *Théorie du Baguenodier* (el prefería escribir así el nombre del juego). Cada anillo puede representarse por medio de un dígito binario: 1 si está «trabado» , 0 si está «liberado». Gros demostró que si los anillos se encontraban en un conjunto conocido de estados, era posible calcular un número binario que indicara con exactitud cuántos movimientos harían falta para resolverlo. El trabajo de Gros es uno de los primeros ejemplos de lo que hoy conocemos como **código Gray**, en el que dos números binarios sucesivos difieren sólo en un dígito. De hecho, Donald Knuth, experto informático, afirmó que Gros había sido «el auténtico inventor del código binario Gray», un código que se sigue utilizando hoy en día para facilitar la corrección de errores en la comunicación digital.

VÉASE TAMBIÉN El álgebra de Boole (1854), El rompecabezas del quince (1874), La torre de Hanoi (1883), El código Gray (1947) y Locura instantánea (1966).

Desde los años setenta, el antiguo rompecabezas conocido como baguenaudier ha dado lugar en Estados Unidos a varias patentes que describen juegos similares. Una de las versiones puede desmontarse con facilidad aunque no se resuelva. Otra permite variar el número de anillos para que cambie el nivel de dificultad. (Las ilustraciones pertenecen a las patentes 4.000.901 y 3.706.458 de Estados Unidos.)


50
70
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
72
40
38
36
34
32
30
74
34
18
20
24
10
16
22
34
16
20
14
16
32
26
22
32
12
14
36
28
30
14
Henry F. Jones
INVENTOR.
BY
ATTORNEYS

1874

El doctorado de Kovalevskaya

Sofia Kovalevskaya (1850–1891)

La matemática rusa Sofia Kovalevskaya hizo valiosas contribuciones a la teoría de las ecuaciones diferenciales y fue la primera mujer que recibió un doctorado en matemáticas. Como muchos otros genios de la materia, se enamoró de las matemáticas a una edad muy temprana. Según explica en su autobiografía, «aún no era capaz, por supuesto, de captar el significado de estos conceptos, pero actuaron sobre mi imaginación hasta instalar en mí una veneración por las matemáticas, como una ciencia exaltada y misteriosa que introduce a sus iniciados en un nuevo mundo de maravillas, inaccesibles para el común de los mortales». A los once años las paredes de su habitación estaban empapeladas con apuntes de las clases de análisis diferencial e integral de Mikhail Ostrogradski.

Kovalevskaya obtuvo su doctorado *summa cum laude* de la Universidad de Göttingen en 1874 con un trabajo sobre ecuaciones en derivadas parciales, integrales abelianas y la estructura de los anillos de Saturno. Pero a pesar de su doctorado, y de las entusiastas cartas de recomendación del matemático Karl Weierstrass, su condición de mujer hizo que tardara muchos años en lograr un puesto académico. En 1884, por fin, empezó a dar clase en la Universidad de Estocolmo y logró un cargo de profesora durante cinco años. En 1888, la Academia de la Ciencia de París le concedió un premio especial por su tratamiento teórico de los sólidos en rotación.

Kovalevskaya merece además un lugar destacado en la historia porque fue la primera matemática rusa de importancia, la tercera mujer que logró un puesto de profesora de universidad en Europa, después de Laura Bassi (1711–1778) y Maria Agnesi (1718–1799) y la primera catedrática de matemáticas de la historia. Tuvo que vencer numerosos obstáculos. Su padre, por ejemplo, le prohibió estudiar matemáticas. Estudiaba en secreto por las noches, mientras todos dormían. Las mujeres en Rusia no podían vivir lejos de su familia sin un permiso paterno, así que se vio obligada a casarse para poder seguir estudiando en el extranjero. Más adelante escribiría: «No se puede ser matemático si no se tiene alma de poeta».

VÉASE TAMBIÉN La muerte de Hipatia (415), Las *Instituzioni Analitiche* de Agnesi (1748), *Filosofía y diversión del álgebra*, de Boole (1909) y La teoría de ideales de Noether (1921).

Sofia Kovalevskaya fue la primera mujer europea que obtuvo un doctorado en matemáticas.



1874

El rompecabezas del quince

Noyes Palmer Chapman (1811–1889)

Aunque no se trate de un auténtico acontecimiento en la historia de las matemáticas comparable a la mayoría de los que describe este libro, el rompecabezas del quince causó tanto revuelo que merece que lo mencionemos por motivos históricos. Aún hoy pueden comprarse diferentes versiones de este juego integrado por quince cuadrados móviles y un hueco dispuestos en un marco o caja de tamaño 4 x 4. Al comienzo del juego, los cuadrados, con los números del 1 al 15, aparecen ordenados y seguidos del hueco. En la *Cyclopedia* de Sam Loyd (1914) se describe una variante en la que la configuración inicial intercambia las posiciones del 14 y el 15.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

El rompecabezas del quince (posición inicial)

Según Loyd, el objetivo es deslizar los cuadrados en las cuatro direcciones hasta que los números estén ordenados (de modo que el 14 y el 15 hayan cambiado sus posiciones). Loyd aseguró que se entregaría un premio de mil dólares a quien lo resolviera; sin embargo, es imposible llegar a una solución desde esta posición inicial.

La versión original del juego desarrollada en 1874 por Noyes Palmer Chapman, jefe de una oficina de correos de Nueva York, se convirtió en un éxito instantáneo, similar al que obtendría el cubo de Rubik cien años después. En esta primera versión, los cuadrados podían extraerse; el jugador los colocaba al azar y después trataba de llegar a la solución. Si se parte de una configuración inicial aleatoria, el cincuenta por ciento de las veces el rompecabezas es irresoluble.

Los matemáticos han determinado cuáles son las configuraciones iniciales que permiten llegar a una solución. Según el matemático alemán W. Ahrens, «el rompecabezas del quince subió como la espuma en Estados Unidos; se propagó con rapidez y se convirtió, si nos atenemos al número de fanáticos que obtuvo, en una plaga». La superestrella del ajedrez Bobby Fisher era capaz de resolverlo en menos de treinta segundos (siempre que la configuración inicial lo permitiera).

VÉASE TAMBIÉN Locura instantánea (1966) y El cubo de Rubik (1974).

En la década de 1880 el rompecabezas del quince se adueñó del mundo, igual que el cubo de Rubik en tiempos más recientes. Los matemáticos han determinado cuáles son las configuraciones iniciales que permiten llegar a una solución.


1
12
11
2
13
9
10
3
14
15
8
4
5
6
7

1874

Los números transfinitos de Cantor

Georg Cantor (1845–1918)

El matemático alemán Georg Cantor fundó la teoría de conjuntos moderna e introdujo el desconcertante concepto de número transfinito, que puede utilizarse para denotar el «tamaño» relativo de una colección infinita de objetos. El número transfinito más pequeño es el llamado *álef-cero*, escrito $\aleph_0$, que corresponde a los números enteros. Si el conjunto de los números enteros es infinito y consta de $\aleph_0$ elementos, ¿hay algún grado de infinitud mayor? Resulta que, a pesar de que existe un número infinito de números enteros, de números racionales (aquellos que pueden expresarse como una fracción) y de números irracionales (como la raíz cuadrada de 2, que no puede expresarse en forma de fracción), podemos decir que, de algún modo, el infinito número de irracionales es mayor que el infinito número de enteros o racionales. Del mismo modo, existen más números reales (que incluyen los racionales y los irracionales) que enteros.

Las chocantes ideas de Cantor acerca del infinito recibieron críticas generalizadas que lo sumieron en la depresión (tuvo que ser internado varias veces); al final, sin embargo, se convirtieron en una teoría fundamental. Cantor, además, equiparó su concepto del «infinito absoluto», que iba más allá de los números transfinitos, con Dios. Escribió: «No albergo ninguna duda en cuanto a la realidad de los transfinitos, que supe reconocer con la ayuda de Dios y que he estudiado en toda su diversidad durante más de veinte años». En 1884, Cantor escribió una carta (dirigida al matemático sueco Gösta Mittag-Leffler) en la que aseguraba que no era el creador de su nueva obra, sino un mero reportero. Dios había puesto la inspiración, y la tarea de Cantor se limitaba a organizar los papeles y darles coherencia. Cantor dijo que sabía que los números transfinitos eran verdaderos porque «Dios me lo dijo». Si Dios sólo hubiera creado números *finitos*, su poder sería menor. El matemático David Hilbert describió el trabajo de Cantor como «el producto más depurado de genio matemático y uno de los mayores logros de la actividad intelectual pura».

VÉASE TAMBIÉN La paradoja de la rueda de Aristóteles (c. 320 a. C.), El hotel infinito de Hilbert (1925) y La indecibilidad de la hipótesis del continuo (1963).

Fotografía de Georg Cantor y su esposa en torno a 1880. Las ideas de Cantor acerca del infinito recibieron una crítica generalizada que tal vez agravó su tendencia crónica a la depresión.



1875

El triángulo de Reuleaux

Franz Reuleaux (1829–1905)

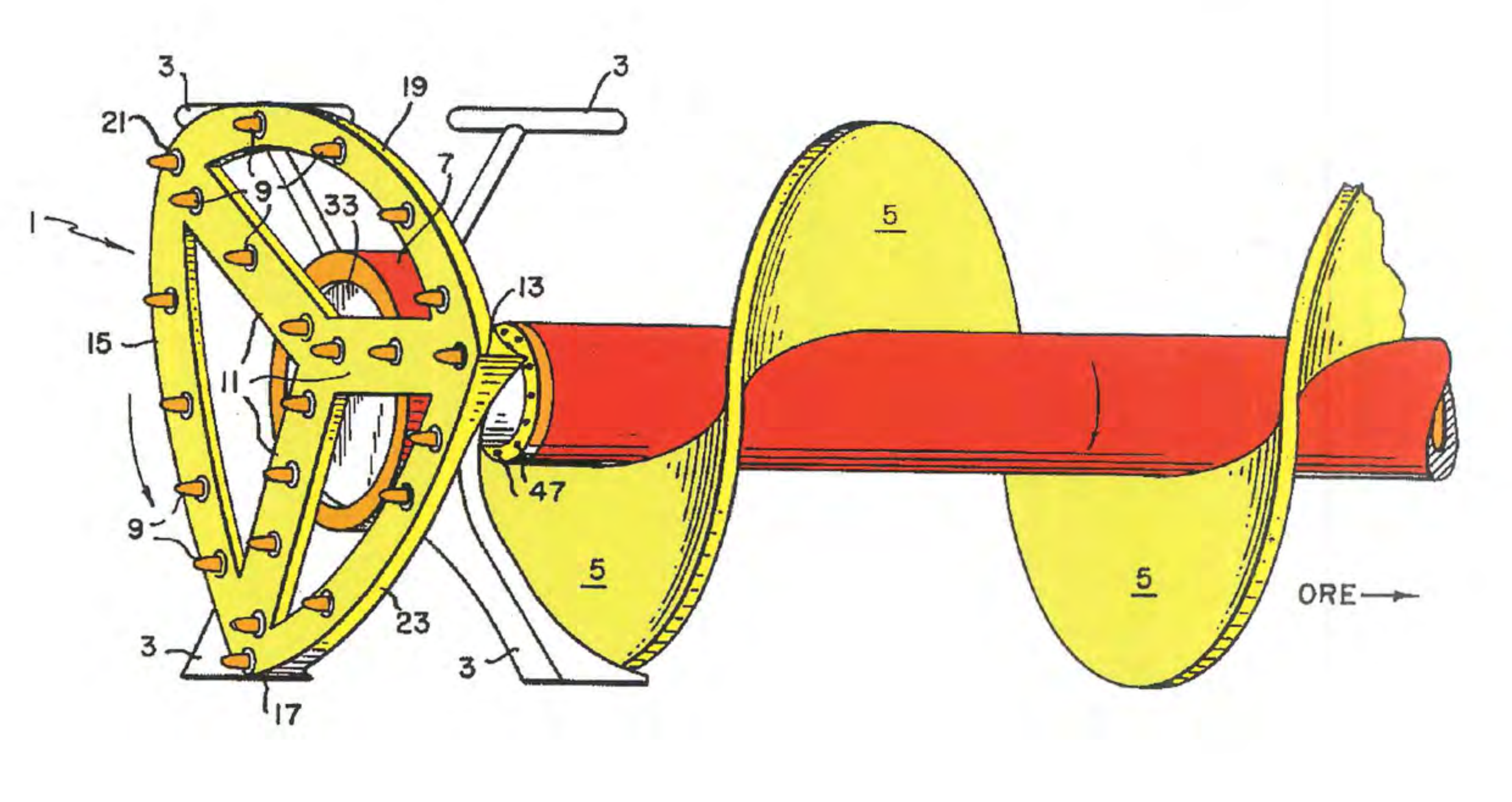
El triángulo de Reuleaux es un ejemplo claro de un amplio abanico de descubrimientos geométricos que, como en el caso de la **cinta de Möbius**, no encontraron aplicaciones prácticas hasta un momento tardío de la evolución intelectual de la raza humana. El triángulo de Reuleaux, no comenzó a tener utilidad hasta 1875, cuando el ingeniero mecánico alemán Franz Reuleaux investigó este famoso triángulo curvado. Reuleaux no fue el primero en dibujar y estudiar la forma generada por la intersección de tres circunferencias en los vértices de un triángulo equilátero, pero fue el primero que demostró las propiedades de su anchura constante y lo utilizó en numerosos mecanismos del mundo real. La construcción del triángulo resulta tan simple que los investigadores modernos se preguntan por qué nadie se interesó en estudiar sus aplicaciones con anterioridad. La forma es muy próxima a la de una circunferencia debido a su anchura constante: la distancia entre dos puntos opuestos es siempre la misma.

Existen varias patentes de brocas que taladran agujeros cuadrados gracias a este triángulo. El concepto de una broca semejante parece desafiar al sentido común. ¿Cómo es posible que algo que gira produzca un agujero no circular? Estas brocas existen. La ilustración de la siguiente página muestra una «broca de agujero cuadrado», la patente 4.074.778 de Estados Unidos (1978). Este triángulo aparece también en patentes de otras brocas, así como de botellas novedosas, latas de bebidas, velas, estanterías que rotan, cajas de cambios, motores giratorios y vitrinas.

Muchos matemáticos han estudiado el triángulo de Reuleaux, así que sabemos muchas cosas sobre sus propiedades. Su área, por ejemplo, es $A = \frac{1}{2} (\pi - \sqrt{3})r^2$, y el área taladrada por una broca de agujero cuadrado cubre el 0,9877003907...por ciento del área de un cuadrado perfecto. Esta pequeña diferencia se debe a que el cuadrado perforado por estas brocas tiene sus esquinas ligeramente redondeadas.

VÉASE TAMBIÉN La astroide (1674) y La cinta de Möbius (1858).

Figura que aparece en una patente estadounidense de 1978 (patente nº 4.074.778). La figura describe una broca basada en el triángulo de Reuleaux que realiza agujeros cuadrados.


3
21
19
3
9
33
7
1
13
15
11
47
9
5
5
5
23
3
3
17
ORE

1876

El analizador de armónicos

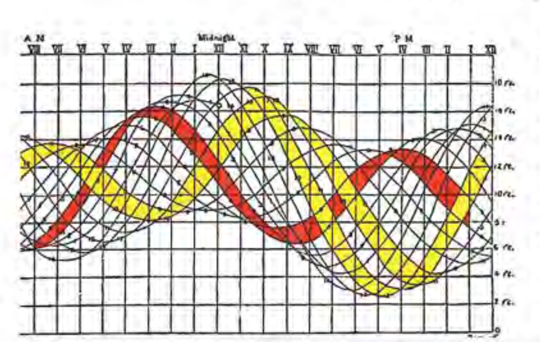
Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), **William Thomson, Baron Kelvin de Largs** (1824–1907)

A comienzos del siglo XIX, el matemático francés Joseph Fourier descubrió que cualquier función diferenciable, por compleja que fuera, podía representarse con la precisión deseada como suma de senos y cosenos. Por ejemplo, una función periódica $f(x)$ puede representarse mediante la suma de $A_n \cdot \text{sen}(nx) + B_n \cdot \cos(nx)$ con amplitudes A_n y B_n.

Un analizador de armónicos es un dispositivo físico que determina los coeficientes A_n y B_n. En 1876, el físico matemático británico Lord Kelvin inventó el analizador de armónicos para analizar curvas relacionadas con las mareas oceánicas. El cilindro principal se envuelve con un papel en el que está representada la curva de interés. El mecanismo recorre la curva haciendo que la posición de sus diversos componentes determinen los coeficientes buscados. Según el propio Kelvin, esta «máquina cinemática» no sólo predice «las horas y alturas de las mareas altas, sino la profundidad del agua en cada instante; las muestra, por medio de una curva continua, con años de antelación». Las mareas dependen de la posición del Sol y de la Luna, de la rotación de la Tierra y de la forma de la costa y del suelo oceánico, así que pueden llegar a ser muy complejas.

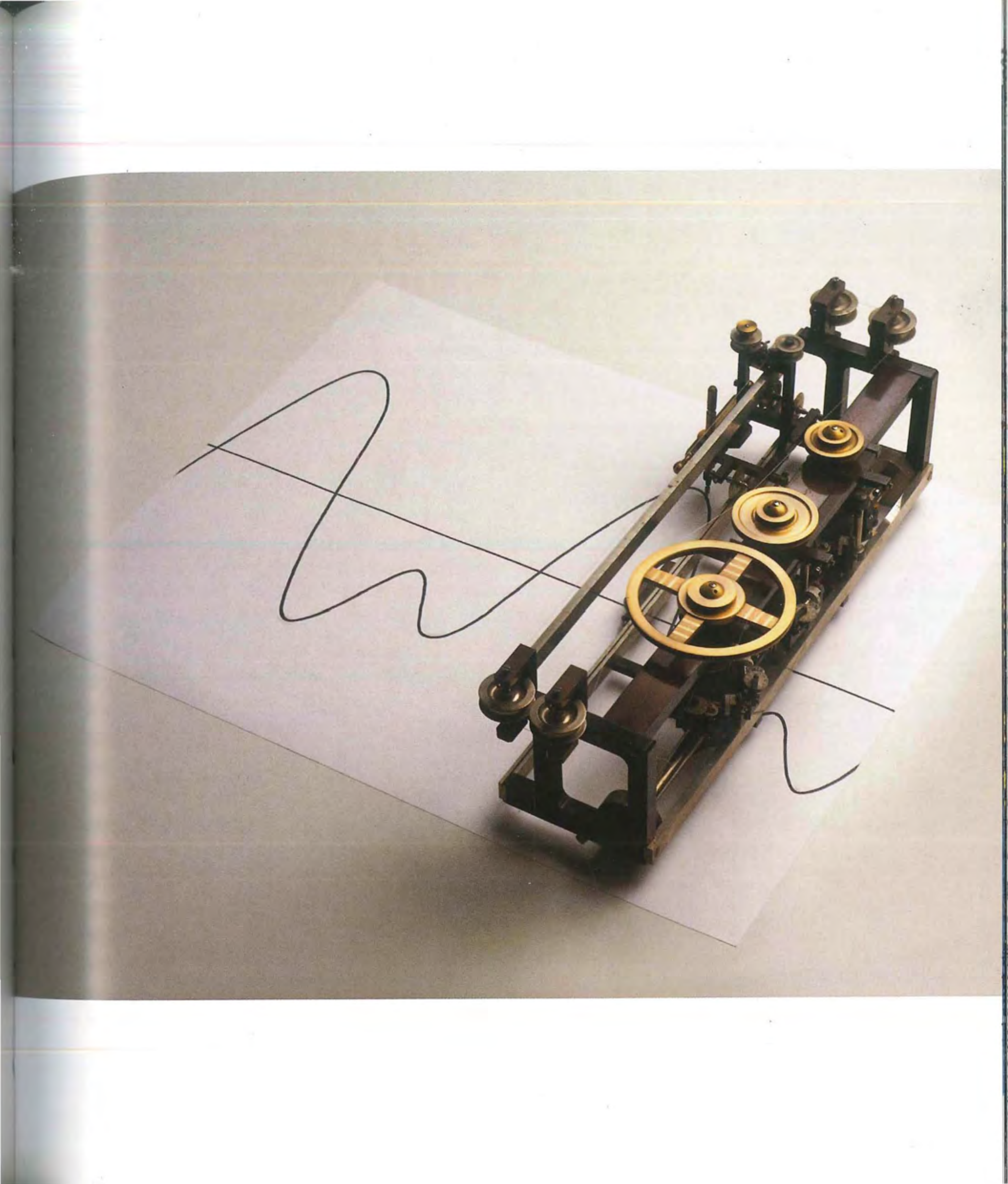
En 1894, el matemático alemán Olaus Henrici (1840–1918) diseñó un analizador de armónicos para determinar los coeficientes de ciertas ondas de sonido complejas como, por ejemplo, las de los instrumentos musicales. El aparato se componía de multitud de poleas y esferas de cristal conectadas a cuadrantes de medición que daban la fase y la amplitud de diez componentes armónicos de Fourier.

En 1909, el ingeniero alemán Otto Mader inventó un analizador de armónicos que utilizaba motores y una aguja para trazar una curva; los distintos motores correspondían a los armónicos. El analizador de armónicos de Montgomery, de 1938, se servía de medios ópticos y fotoeléctricos para determinar el contenido armónico de una curva. H. C. Montgomery, de Laboratorios Bell, dejó escrito que el aparato «está adaptado especialmente para analizar discursos y música, ya que opera de manera directa a partir de un tipo convencional de pista de sonido sobre cinta».



VÉASE TAMBIÉN Las series de Fourier (1807) y El analizador diferencial (1927).

IZQUIERDA: *Registros de la marea en Bombay (del 1 al 14 de enero de 1884). La curva de la marea quedaba registrada en una hoja cilíndrica que giraba una vez cada 24 horas.* DERECHA: *el analizador de armónicos del matemático alemán Olaus Henrici.*



1879

La caja registradora Ritty Model I

James Ritty (1836–1918)

Se hace difícil imaginar cómo podía funcionar el comercio al por menor cuando no existían las cajas registradoras. Con el tiempo, las cajas registradoras se hicieron cada vez más sofisticadas y empezaron a incorporar mecanismos contra el robo. No parece exagerado afirmar que fue una de las máquinas que más influyeron en los cambios de la era industrial.

James Ritty inventó la primera caja registradora en 1879. Ritty abrió su primer establecimiento en Dayton, Ohio, en 1871. Se trataba de un lugar en el que se dispensaban «whiskys refinados, buenos vinos y puros». En ocasiones, los empleados se llevaban directamente al bolsillo el dinero que recibían de los clientes.

Durante un viaje en un barco de vapor, Ritty reparó en el mecanismo que contaba el número de revoluciones del motor e imaginó un mecanismo similar que registrara las transacciones en metálico. Las primeras máquinas que diseñó tenían dos filas de teclas: cada tecla correspondía a una cantidad fija, desde cinco céntimos hasta un dólar. Al pulsar una de las teclas, un eje hacía girar un contador interno. Patentó el diseño en 1870 con el nombre de «cajero incorruputible de Ritty». Poco después vendió el negocio de las cajas registradoras a un hombre de negocios llamado Jacob H. Eckert. En 1884 Eckert le vendió la compañía a John H. Patterson, que cambió el nombre de la empresa (en adelante sería la National Cash Register Company).

La semilla de Ritty crecía poco a poco. Patterson añadió rollos de papel que registraban las transacciones por medio de perforadoras. Cuando terminaba una transacción, sonaba una campanilla y el importe aparecía en un gran cuadrante. En 1906, el inventor Charles F. Kettering diseñó una caja registradora con un motor eléctrico. En 1974, la National Cash Register Company se convirtió en la NCR Corp. En la actualidad, la funcionalidad de las cajas registradoras va más allá de los sueños de Ritty, se trata de máquinas «devoradoras» de números que registran la hora de la transacción, extraen los precios de bases de datos y calculan impuestos, tarifas según el tipo de cliente y descuentos.

VÉASE TAMBIÉN La calculadora Curta (1948).

Una réplica de 1904 de la caja registradora Ritty Model 1.


00 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95

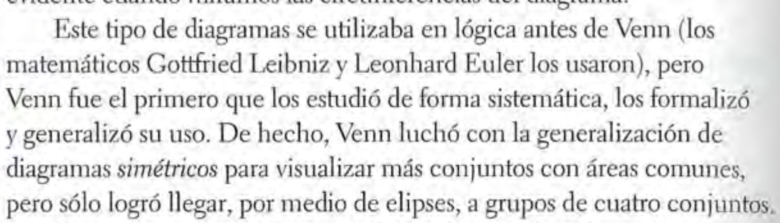
1880

Los diagramas de Venn

John Venn (1834–1923)

En 1880, el filósofo británico y pastor de la iglesia anglicana John Venn, ideó un método para visualizar elementos, conjuntos y relaciones lógicas. Un diagrama de Venn suele contener áreas circulares que representan conjuntos de elementos con propiedades comunes. Por ejemplo, el rectángulo de la primera ilustración comprende las criaturas reales y legendarias; la región *H* representa a los humanos, la región *W* a las criaturas con alas y la región A a los ángeles. Una mirada al diagrama revela lo siguiente: (1) Todos los ángeles son criaturas con alas (la región A está incluida por completo en la región *W*); (2) Ningún humano es una criatura con alas (las regiones *H* y *W* no tienen intersección) y (3) Ningún humano es un ángel (las regiones *H* y A no tienen intersección).

Se trata de una descripción de una regla básica de la lógica: dadas las afirmaciones «todo A es *W*» y «ningún *H* es *W*» se deduce que «ningún *H* es A». La conclusión resulta evidente cuando miramos las circunferencias del diagrama.



1

Este tipo de diagramas se utilizaba en lógica antes de Venn (los matemáticos Gottfried Leibniz y Leonhard Euler los usaron), pero Venn fue el primero que los estudió de forma sistemática, los formalizó y generalizó su uso. De hecho, Venn luchó con la generalización de diagramas *simétricos* para visualizar más conjuntos con áreas comunes, pero sólo logró llegar, por medio de elipses, a grupos de cuatro conjuntos.

Tuvo que pasar un siglo antes de que Branko Grünbaum, matemático de la Universidad de Washington, demostrara que pueden formarse diagramas de Venn con simetría rotacional a partir de cinco elipses congruentes. La segunda ilustración muestra uno de los muchos diagramas simétricos posibles para cinco conjuntos.

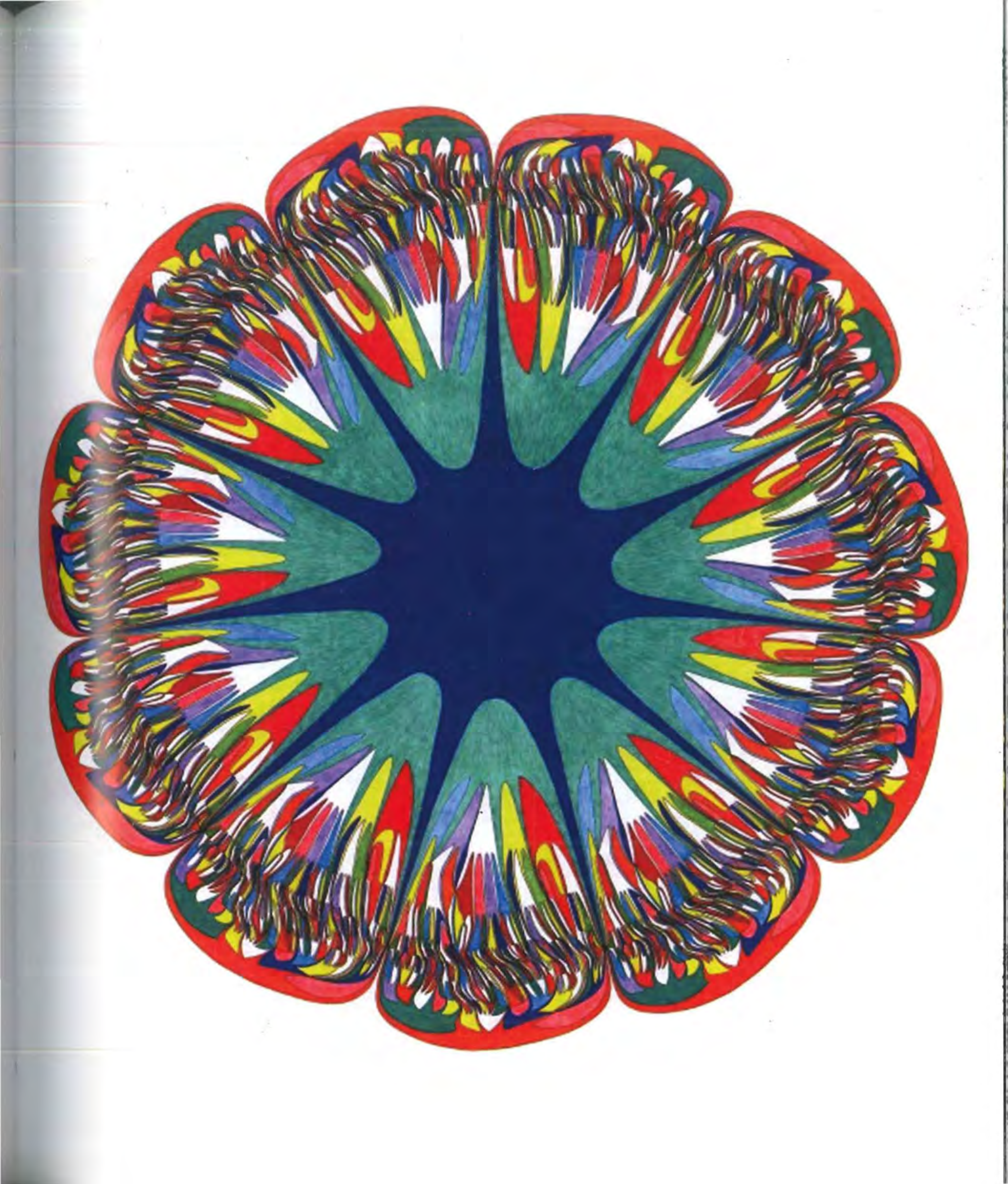
Los matemáticos fueron asumiendo que los diagramas con simetría rotacional sólo pueden dibujarse si el número de «pétalos» es primo. En cualquier caso, los diagramas simétricos con siete pétalos eran tan difíciles de hallar que se llegó a dudar de su existencia. En 2001, el matemático Peter Hamburger y la artista Edit Hepp construyeron un ejemplo con once pétalos, que se muestra en la página siguiente.



2

VÉASE TAMBIÉN El *Órganon* de Aristóteles (c. 350 a. C.), El álgebra de Boole (1854), *Principia Mathematica* (1910–1913), El teorema de Gödel (1931) y La lógica difusa (1965).

Un diagrama de Venn de once pétalos, cortesía del doctor Peter Hamburger y de Edit Hepp.



La ley de Benford

Simon Newcomb (1835–1909), **Frank Benford** (1883–1948)

La ley de Benford, conocida también como ley o fenómeno del primer dígito, afirma que si consideramos diferentes listas de números, el dígito 1 tiende a aparecer a la izquierda del todo con una probabilidad aproximada de un 30%, mucho mayor que el esperado 11,1% que resultaría si cada dígito apareciera en esa posición una de cada nueve veces. La ley de Benford se cumple, por ejemplo, en tablas de población, tasas de mortalidad, precios de acciones en la bolsa, estadísticas deportivas y áreas de lagos y ríos. Las explicaciones de este fenómeno son muy recientes.

Esta ley recibe su nombre del doctor Frank Benford, un físico de la compañía General Electric que publicó su trabajo en 1939, aunque el fenómeno ya había sido descubierto en 1881 por el matemático y astrónomo Simon Newcomb. Se dice que en las tablas de logaritmos, las páginas que corresponden a los números que empiezan por 1 están más gastadas debido a que este número es el primer dígito en aproximadamente un 30% de los casos. Benford determinó que en muchos tipos de datos la probabilidad de que un número del 1 al 9 sea el primer dígito es $\log_{10}(1 + 1/n)$. Incluso la secuencia de Fibonacci —1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...— cumple la ley de Benford. Dado un número de Fibonacci, es más probable que empiece por 1 que por cualquier otro dígito. Da la impresión de que la ley de Benford se cumple con cualquier dato que siga una «ley potencial». Los lagos grandes, por ejemplo, son escasos, pero los medianos son más comunes, y los pequeños aún más. De modo parecido, en el intervalo 1-100 hay once números de Fibonacci, pero sólo hay uno en cada uno de los siguientes tres intervalos similares (101–200, 201–300, 301–400).

La ley de Benford se ha utilizado para detectar fraudes. Los consultores de cuentas pueden servirse de ella para detectar devoluciones de impuestos fraudulentas en las que los dígitos no siguen la tendencia que debería esperarse según la ley de Benford.

VÉASE TAMBIÉN El *Liber Abaci* de Fibonacci (1202) y La *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace (1812).

La ley de Benford se cumple en los precios de las acciones bursátiles y en otros datos financieros, así como en las facturas de electricidad y en las direcciones postales.

SUR.
KER
TINTO
GEORGE
MET
RA
RMER
ELDG
HS

33.13
19.63
15.85
73.93
29.55
21.10
3.98
37.40
17.70
22.79
42.52
16.82

70.86
3.51
33.20
19.65
15.94
74.04
29.59
21.13
3.99
37.48
17.72
22.81
42.54

La botella de Klein

Felix Klein (1849–1925)

La botella de Klein, descrita por vez primera en 1882 por el matemático alemán Felix Klein, es un objeto con el aspecto de una botella cuyo cuello flexible se introduce en ésta hasta conectarse con su fondo, generando una superficie que no tiene exterior ni interior. Se trata de un objeto relacionado con la cinta de Möbius; de hecho, en teoría puede construirse uniendo dos cintas de Möbius por los bordes. Una forma de construir un modelo físico imperfecto de la botella de Klein en nuestro universo tridimensional consiste en hacer que se corte a sí misma en una pequeña curva circular. Para crear una botella de Klein auténtica, sin autointersecciones, se precisan cuatro dimensiones.

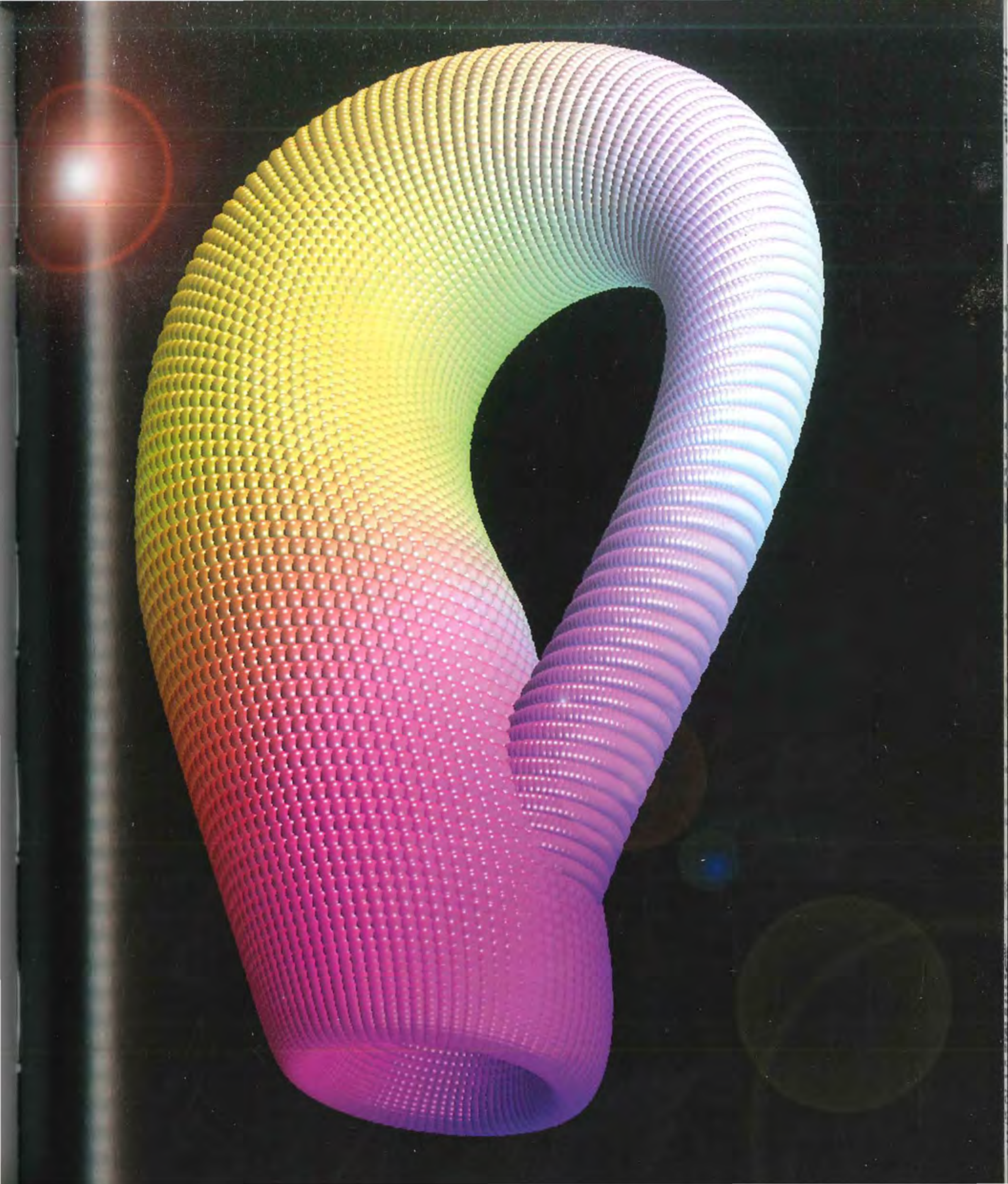
Imagine la frustración de alguien que tratara de pintar el exterior de una botella de Klein sin pintar el interior. Se comienza a pintar lo que parece ser la superficie exterior hasta llegar al estrecho cuello. El objeto de cuatro dimensiones no tiene intersecciones consigo mismo, de modo que se puede seguir por el cuello, que ahora estará «dentro» de la botella. Cuando el cuello se abre para volver a unirse a la superficie, uno se da cuenta de que está pintando el interior. Si nuestro universo tuviese la forma de una botella de Klein, podríamos encontrar trayectorias que hicieran que nuestros cuerpos se invirtieran al volver de un viaje (al regresar, tendríamos el corazón en la parte derecha).

El astrónomo Cliff Styoll, con la colaboración del Kingbridge Centre de Toronto y de la empresa de material de laboratorio Killdee, ha creado el mayor modelo de botella de Klein del mundo. La botella de Klein de Kingbridge mide 1,1 metros de altura y 50 centímetros de diámetro y está construida con 15 kilogramos de cristal *Pyrex*.

Dadas sus peculiares propiedades, tanto los matemáticos como los fanáticos de los juegos de lógica estudian laberintos y partidas de ajedrez sobre la superficie de botellas de Klein. Si se dibujara un mapa sobre una botella de Klein, se necesitarían seis colores para asegurar que no hubiera dos regiones limítrofes del mismo color.

VÉASE TAMBIÉN Superficie mínima (1774), El teorema de los cuatro colores (1852), La cinta de Möbius (1858), La superficie de Boy (1901) y Cómo evertir una esfera (1958).

La botella de Klein tiene un cuello flexible que puede doblarse hasta introducirse de nuevo en la botella, de modo que el objeto resultante no tiene un interior y un exterior distinguibles. Para crear una botella de Klein auténtica, sin autointersecciones, se precisan cuatro dimensiones.



La torre de Hanoi

François Édouard Anatole Lucas (1842-1891)

La torre de Hanoi ha intrigado al mundo desde que se comercializó como juguete en 1883. Su inventor fue el matemático francés Édouard Lucas. El juego está compuesto por varios discos de distintos tamaños con un agujero en el centro y tres pequeños mástiles sobre una base de madera. En su posición inicial, todos los discos están apilados, de mayor a menor tamaño, en uno de los mástiles. A partir de aquí, el único movimiento permitido consiste en coger el disco superior de uno de los mástiles y deslizarlo en cualquier otro mástil. No se puede colocar un disco encima de otro más pequeño. El objetivo consiste en mover todo el conjunto inicial, que suele estar formado por ocho discos, a otro mástil. El número mínimo de movimientos para lograrlo es $2^n - 1$, donde n es el número de discos.

Se dijo que el juego original estaba inspirado en la legendaria Torre de Brahma, que constaba de sesenta y cuatro discos de oro. Los sacerdotes de Brahma movían los discos sin parar, siguiendo las mismas reglas del juego de la torre de Hanoi. El juego termina cuando se completa el último movimiento. Nótese que, si suponemos que los sacerdotes eran capaces de realizar un movimiento por segundo, los 18.446.744.073.709.551.615 movimientos ($2^{64} - 1$) requerirían más o menos quinientos ochenta y cinco mil millones de años, varias veces la edad estimada del universo.

Existen algoritmos sencillos para calcular las soluciones; de hecho, la torre de Hanoi suele utilizarse en las clases de programación para enseñar algoritmos recursivos. En cualquier caso, no se conoce la solución óptima para este problema cuando hay más de tres mástiles. Este juego intriga a los matemáticos por su relación con otras áreas de las matemáticas, como los **códigos Gray** o la búsqueda de trayectorias hamiltonianas en un hipercubo n dimensional.

VÉASE TAMBIÉN El álgebra de Boole (1854), El juego icosiano (1857), La *Théorie du Baguenodier* de Gros (1872), El hipercubo (1888), El código Gray (1947), Locura instantánea (1974) y El cubo de Rubik (1974).

La torre de la bandera de Hanoi se construyó en 1812. Su altura alcanza 33,4 metros, que se convierten en 41 metros con la bandera. Según algunas leyendas, esta torre inspiró el nombre del juego.



1884

Planilandia

Edwin Abbott Abbott (1838-1926)

Hace más de un siglo, el clérigo Edwin Abbott Abbott, director de una escuela de la Inglaterra victoriana, escribió un libro muy influyente en el que describía las interacciones entre criaturas con acceso a distintas dimensiones espaciales. Sigue siendo una obra popular entre estudiantes de matemáticas y se considera una lectura útil para cualquiera que pretenda estudiar las relaciones entre dimensiones.

Abbott animaba a sus lectores a que abrieran sus mentes a nuevos modos de percepción. *Planilandia* describe una raza de criaturas bidimensionales que viven sobre un plano sin saber que existen otras dimensiones a su alrededor. Si pudiésemos mirar un mundo de dos dimensiones, veríamos el interior de las estructuras de un solo vistazo. Del mismo modo, una criatura con acceso a la cuarta dimensión espacial vería el interior de nuestros cuerpos y podría eliminar un tumor sin tener que atravesar la carne. Si alguien mirara *Planilandia* desde una altura de unos pocos centímetros y registrara los acontecimientos, los habitantes de ese mundo de dos dimensiones no se darían cuenta. Para sacar a un habitante de *Planilandia* de la cárcel bastaría con «levantarlo» y depositarlo en otro lugar. Para los *planilandeses* se trataría de un milagro para el que ni siquiera existiría una palabra.

En la actualidad, las proyecciones de objetos de cuatro dimensiones generadas por ordenador nos acercan a este tipo de fenómenos, pero incluso el más brillante de los matemáticos puede ser incapaz de visualizar la cuarta dimensión, del mismo modo que el protagonista plano de *Planilandia* tendría serios problemas para comprender la tercera dimensión. En una de las escenas más emocionantes de *Planilandia*, el héroe bidimensional se enfrenta a las formas cambiantes de un ser de tres dimensiones que atraviesa su mundo. El protagonista sólo es capaz de ver el «corte», la sección de esta criatura. Abbott creía en la importancia de estudiar la cuarta dimensión espacial para expandir la imaginación y para aumentar tanto nuestra admiración por el universo como nuestra humildad (el primer paso, tal vez, en cualquier intento de comprender mejor la naturaleza de nuestra realidad o de echar un vistazo a la divinidad).

VÉASE TAMBIÉN Los *Elementos* de Euclides (300 a.C.), La botella de Klein (1882) y El hipercubo (1888).

Portada de la sexta edición de Planilandia, *de Edwin Abbott Abbott. Nótese que «su esposa» es una línea en el interior de la casa pentagonal. En* Planilandia *las mujeres son especialmente peligrosas porque tienen los bordes afilados.*



BASIL BLACKWELL · OXFORD

Price Seven Shillings and Sixpence net

1888

El hipercubo

Charles Howard Hinton (1853–1907)

No conozco ningún asunto matemático que haya intrigado tanto a niños y adultos como la idea de la cuarta dimensión, una dirección espacial diferente de las que conocemos en nuestra vida cotidiana tridimensional. Los teólogos han planteado la idea de que, en la vida ultraterrena, todo tiene cuatro dimensiones: el cielo, el infierno, los ángeles y las almas en general. Los matemáticos y los físicos suelen utilizar la cuarta dimensión en sus cálculos. Forma parte de algunas teorías importantes que describen cómo está construido nuestro universo.

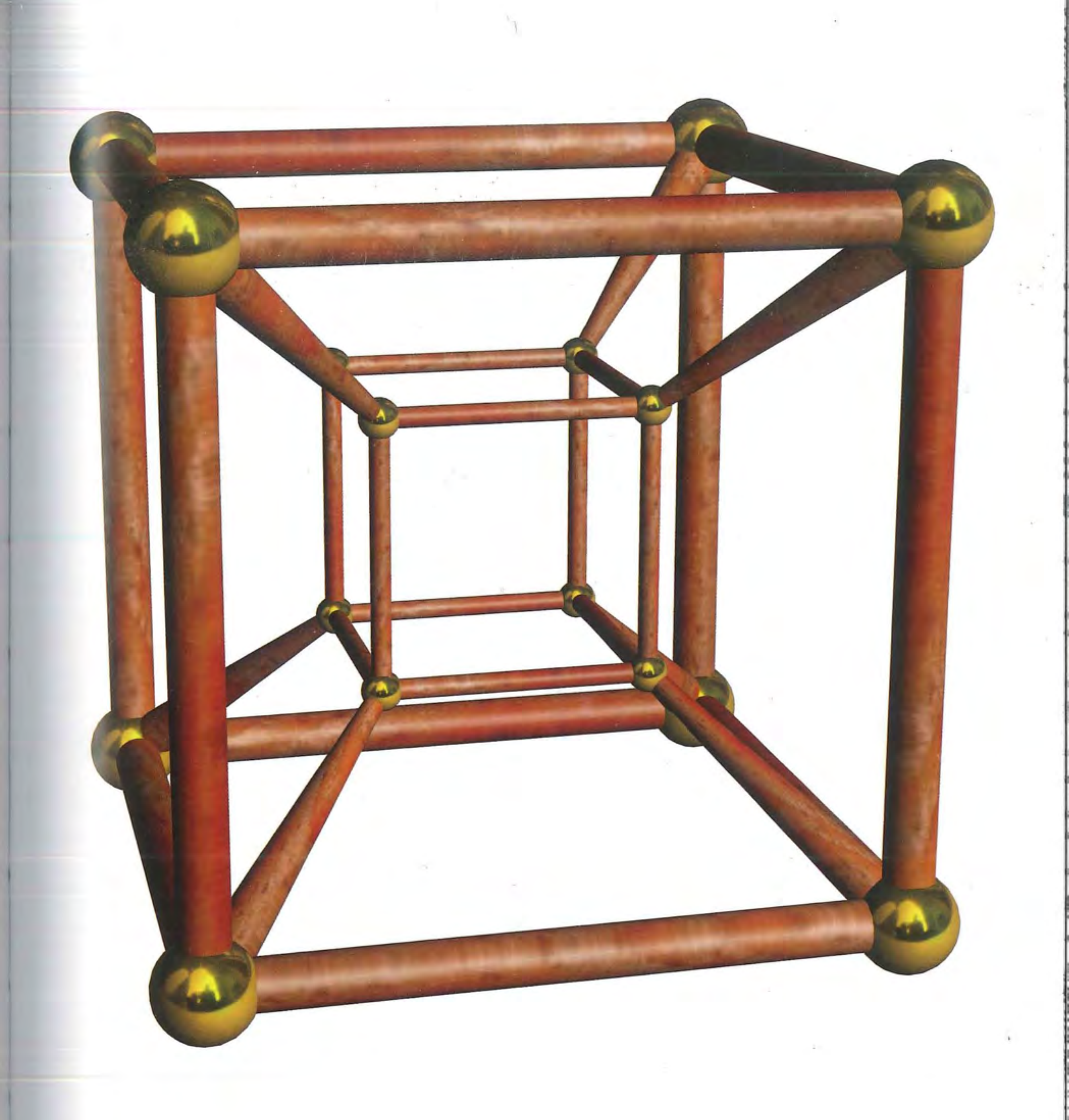
El hipercubo es el análogo del cubo ordinario en más de tres dimensiones. A veces se utiliza el término «teseracto» para nombrar el hipercubo de cuatro dimensiones. Igual que un cubo puede visualizarse «arrastrando» un cuadrado a la tercera dimensión y observando la forma que el cuadrado traza en el espacio, el hipercubo se genera con la estela de un cubo que se mueve en la cuarta dimensión. Aunque resulta difícil visualizar un cubo que se desplaza en una dirección perpendicular a sus tres ejes, los gráficos por ordenador permiten que los matemáticos lleguen a intuir los objetos de más de tres dimensiones. Nótese que un cubo queda limitado por sus caras cuadradas; del mismo modo, el hipercubo queda limitado por sus caras cúbicas. Podemos señalar el número de vértices, aristas, caras y sólidos de este tipo de objetos:

	Vértices	Aristas	Caras	Sólidos
Punto	1	0	0	0
Segmento de recta	2	1	0	0
Cuadrado	4	4	1	0
Cubo	8	12	6	1
Hipercubo	16	32	24	8

La palabra teseracto se utilizó por primera vez en 1888, en el libro *A New Era of Thought* del matemático británico Charles Howard Hinton. Hinton, que era bígamo, se hizo célebre además por la invención de un conjunto de cubos de colores que, según aseguraba, podía utilizarse para visualizar la cuarta dimensión. Los cubos de Hinton llegaron a utilizarse en sesiones de espiritismo, creyendo que podían facilitar el contacto con los muertos.

VÉASE TAMBIÉN Los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), El problema del príncipe Ruperto (1816), La botella de Klein (1882), *Planilandia* (1884), *Filosofía y diversión del álgebra*, de Boole (1909), El cubo de Rubik (1974) y Un hipercubo mágico perfecto (1999).

Robert Webb realizó este hipercubo con ayuda del programa informático Stella4D. El hipercubo es el análogo del cubo ordinario en más de tres dimensiones.



1889

Los axiomas de Peano

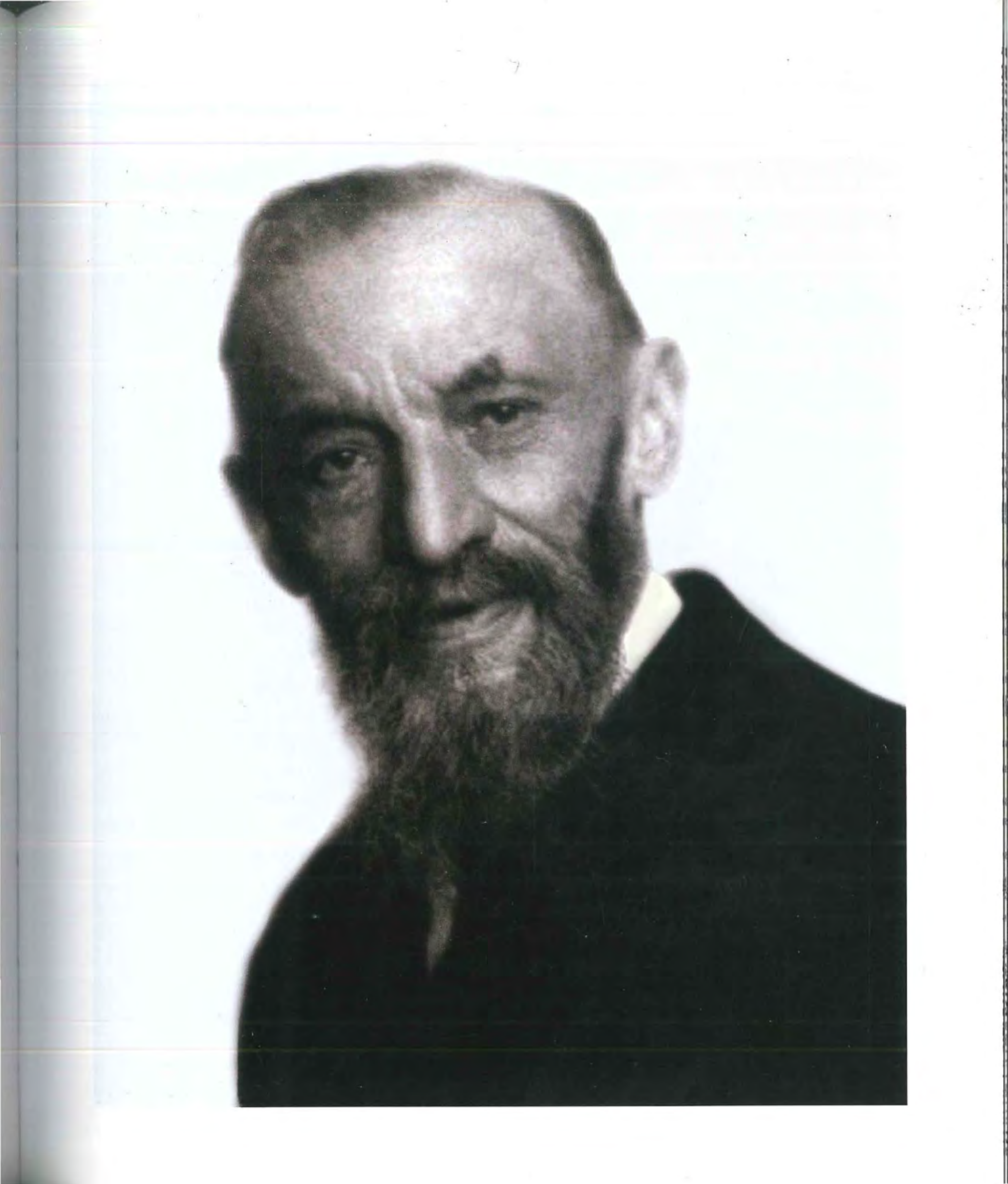
Giuseppe Peano (1858–1932)

Los niños conocen algunas reglas aritméticas sencillas para contar, sumar y multiplicar. ¿De dónde proceden estas reglas? ¿Cómo sabemos que son correctas? El matemático italiano Giuseppe Peano, familiarizado con los cinco axiomas o postulados de Euclides que pusieron los cimientos de la geometría, estaba interesado en crear una base igual de sólida para la aritmética y la teoría de números. Los cinco axiomas de Peano conciernen a los números enteros no negativos y pueden expresarse así: 1) 0 es un número; 2) El sucesor de cualquier número también es un número; 3) Si n y m son números y sus sucesores son iguales, entonces n y m son iguales; 4) 0 no es el sucesor de ningún número; y 5) Si S es un conjunto de números que contiene al 0 y si el sucesor de cualquier número que pertenece a S también pertenece a S, entonces S contiene todos los números.

El quinto axioma permite que los matemáticos determinen si una propiedad es cierta para todos los números no negativos. Para lograrlo, debemos demostrar primero que 0 posee esa propiedad. En siguiente lugar hay que demostrar que si un número cualquiera i tiene la propiedad, entonces $i + 1$ también la tiene. Una metáfora nos ayudará a entenderlo. Imaginemos una línea infinita compuesta por cerillas que casi se tocan. Si queremos que ardan todas, debemos asegurarnos de que lo haga la primera y de que estén lo bastante próximas para que si arde una, arda también la siguiente. Si hay dos cerillas muy separadas, el fuego se detiene. Con los axiomas de Peano podemos construir un sistema aritmético que implique a un conjunto infinito de números. Los axiomas proporcionan los cimientos de nuestro sistema numérico y sirven de ayuda para construir otros sistemas numéricos que se utilizan en las matemáticas modernas. Peano presentó sus axiomas en su obra de 1889 *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (Los principios de la aritmética presentados con un nuevo método).

VÉASE TAMBIÉN Los *Elementos* de Euclides (300 a. C), El *Órganon de Aristóteles* (c. 350 a. C.), El *álgebra* de Boole (1854), Los diagramas de Venn (1880), El hotel infinito de Hilbert (1925), El teorema de Gödel (1931) y La lógica difusa (1965).

El trabajo del matemático italiano Giuseppe Peano está relacionado con la filosofía, con la lógica matemática y con la teoría de conjuntos. Enseñó matemáticas en la Universidad de Turín hasta el día anterior a su muerte, producida por una crisis cardíaca.



La curva de Peano

Giuseppe Peano (1858–1932)

En 1890 el matemático italiano Giuseppe Peano dio a conocer uno de los primeros ejemplos de curva capaz de llenar el espacio. El divulgador científico británico David Darling dice que este descubrimiento fue «un terremoto en la estructura tradicional de las matemáticas». Al referirse a esta nueva clase de curvas, el matemático ruso Naum Vilenkin escribió que «todo se encontraba en ruinas, los conceptos matemáticos básicos habían perdido su significado».

El término «curva de Peano» suele utilizarse para hacer referencia a cualquier curva capaz de llenar todo el espacio; se trata de curvas que se generan habitualmente por medio de un proceso de iteración que crea líneas zigzagueantes que terminan por llenar completamente el espacio que habitan. Según Martin Gardner, «las curvas de Peano dejaron sin habla a los matemáticos. Sus trayectorias parecen unidimensionales y, sin embargo, llevadas al límite, colman un área bidimensional. ¿Es correcto que las denominemos «curvas»? Para empeorar las cosas, las curvas de Peano pueden llenar también cubos e hipercubos». Las curvas de Peano son continuas, pero no tienen tangente única en ningún punto, como ocurre con el **copo de nieve de Koch** o la **función de Weierstrass**. Todas las curvas que llenan el espacio tienen una **dimensión de Hausdorff** igual a 2.

Estas curvas han encontrado aplicaciones prácticas; por ejemplo, son capaces de «sugerir» rutas eficientes cuando se visitan varias ciudades. John J. Bartholdi III, profesor de la Escuela de Ingeniería Industrial y de Sistemas del Instituto de Tecnología de Georgia, ha utilizado las curvas de Peano para construir un sistema que optimiza las rutas de reparto de comida de una organización benéfica y los itinerarios de distribución de sangre que la Cruz Roja lleva a cabo entre diversos hospitales. Dado que los puntos de entrega suelen apiñarse alrededor de áreas urbanas, el uso que hace Bartholdi de este tipo de curvas resulta muy eficiente, ya que las curvas visitan todos los puntos de una zona antes de desplazarse a otra. Los científicos han experimentado con las curvas de Peano para dirigir misiles, puesto que los procesos matemáticos necesarios pueden incorporarse de modo eficaz a los ordenadores de los satélites artificiales.

VÉASE TAMBIÉN El problema del caballo (1759), Las funciones de Weierstrass (1872), El hipercubo (1888), El copo de nieve de Koch (1904), La dimensión de Hausdorff (1918) y Los fractales (1975).

El cubo de Hilbert es una extensión tridimensional de las tradicionales curvas de Peano. Esta escultura de bronce y acero inoxidable, obra de Carlo H. Sequin (de la Universidad de Berkeley) mide poco más de diez centímetros.



1891

Los grupos del papel pintado

Evgraf Stepanovich Fedorov (1853–1919), **Arthur Moritz Schönflies** (1853–1928), **William Barlow** (1845–1934)

El término «grupos del papel pintado» hace referencia a las distintas formas de empapelar un plano de modo que el mismo diseño se repita de manera infinita en dos dimensiones. Existen diecisiete diseños básicos, cada uno identificado por sus simetrías de traslación y rotación.

El eminente cristalógrafo ruso E. S. Fedorov descubrió y clasificó estos patrones en 1891; también lo hicieron, de forma independiente, el matemático alemán A. M. Schönflies y el cristalógrafo inglés William Barlow. Trece de estos modelos (conocidos formalmente como isometrías) presentan algún tipo de simetría rotacional. Cinco presentan simetrías hexagonales. Doce, simetrías rectangulares. Según Martin Gardner, «existen diecisiete grupos de simetría distintos que exhiben todas las formas esencialmente diferentes en que un diseño puede repetirse de modo indefinido en dos dimensiones. Los elementos de estos grupos no son otra cosa que tres operaciones realizadas sobre un patrón básico: desplazarlo en el plano, rotarlo y reflejarlo en un espejo. Los diecisiete grupos de simetría tienen una gran importancia en el estudio de las estructuras cristalinas».

El experto en geometría H. S. M. Coxeter ha señalado que el arte de llenar un plano con un diseño repetido tuvo su momento de apoteosis en la España islámica del siglo XIII: en la decoración de la Alhambra se utilizan los diecisiete grupos de simetría. Dado que algunas tradiciones islámicas no permiten el uso de imágenes humanas, los patrones simétricos resultaron muy atractivos para la decoración. El palacio de la Alhambra, en Granada, contiene intrincados arabescos que decoran los azulejos, los estucos y la madera.

La obra de M. C. Escher (1898–1972), repleta de simetrías, muestra la influencia de la visita del artista holandés a la Alhambra. En cierta ocasión, Escher afirmó que sus viajes a la Alhambra fueron «la más rica fuente de inspiración que he tenido en mi vida». Escher trató de «ampliar» el trabajo de los árabes utilizando cuadrículas geométricas como base de sus bocetos, a los que después añadía motivos animales.

VÉASE TAMBIÉN La teoría de grupos (1832), La cuadratura del rectángulo (1925), Las teselaciones de Voderberg (1936), Las teselas de Penrose (1973), El grupo Monstruo (1981) y La búsqueda del grupo de Lie E_8 (2007).

El palacio de la Alhambra. Los árabes utilizaron muchos «grupos del papel pintado» diferentes para decorarlo.





El problema de la recta de Sylvester

James Joseph Sylvester (1814–1897), **Tibor Gallai** (1912–1992)

El problema de la recta de Sylvester, también conocido como problema de Sylvester de los puntos alineados o teorema de Sylvester-Gallai, dejó perpleja a la comunidad matemática durante cuarenta años. Afirma que, dado un número finito de puntos del plano, sucede una de las siguientes cosas: o bien existe una recta que sólo contiene dos de los puntos, o bien todos los puntos son colineales, es decir, pertenecen a la misma recta. El matemático inglés James Sylvester formuló la conjetura en 1893, pero no fue capaz de demostrarla. El matemático de origen húngaro Paul Erdös estudió el problema en 1943; la solución la dio, en 1944, el matemático húngaro Tibor Gallai.

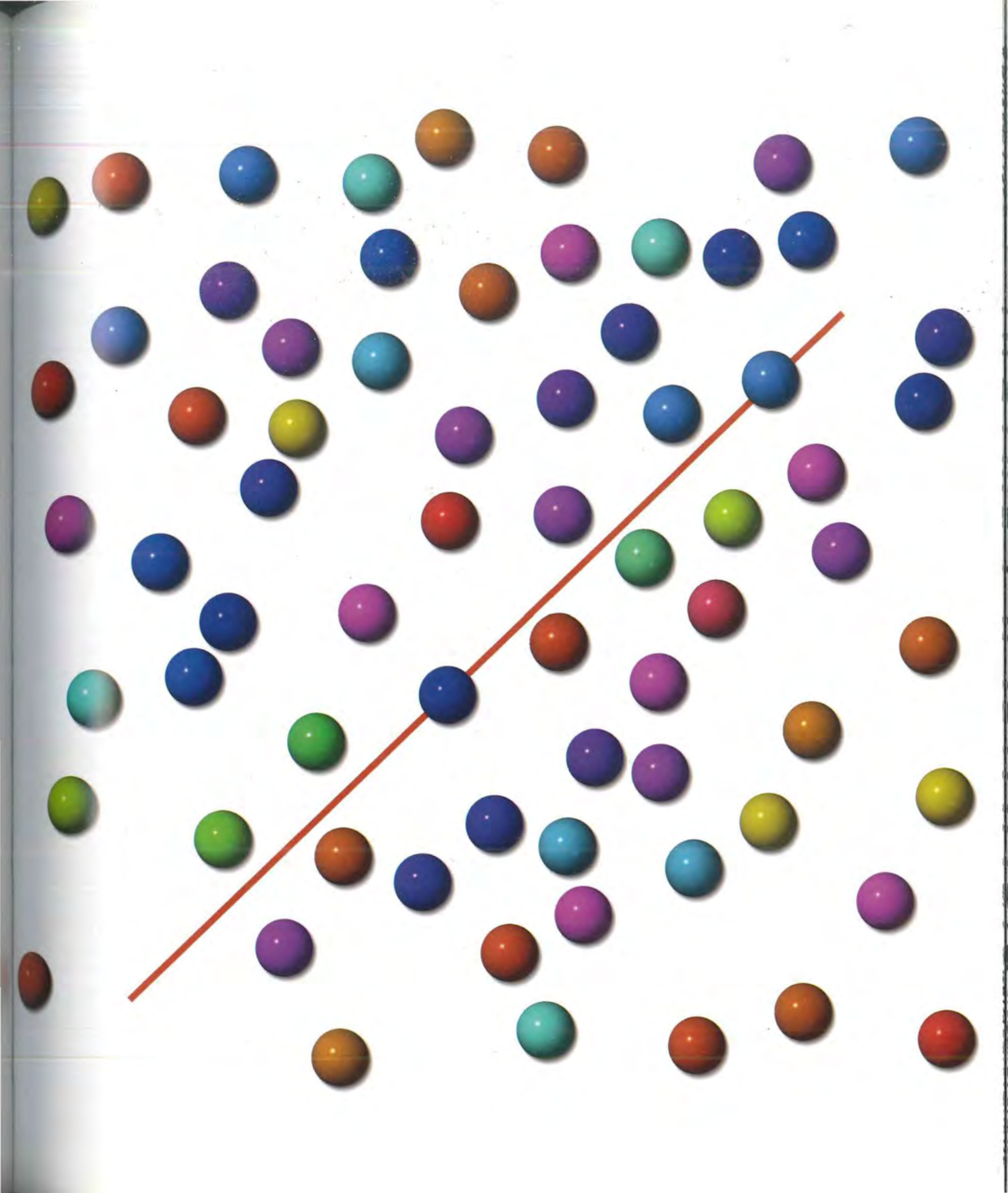
Sylvester había llegado a retar a los lectores a que probaran «que no es posible disponer un número finito de puntos de modo que toda recta definida por un par de esos puntos contenga también a un tercero, salvo que todos pertenezcan a una misma recta».

En 1951, estimulado por la conjetura de Sylvester, el matemático Gabriel Andrew Dirac (1925–1984) —hijastro de Paul Dirac y sobrino de Eugene Wigner— conjeturó que en un conjunto cualquiera formado por n puntos no alineados existen al menos $n/2$ rectas que contienen exactamente dos puntos. En la actualidad sólo se conocen dos contraejemplos de la conjetura de Dirac.

Según el matemático Joseph Malkevitch, «algunos problemas matemáticos fáciles de plantear destacan, pese a su aparente sencillez, porque desde un principio han esquivado una solución [...] Erdös manifestó su sorpresa ante el hecho de que el problema de Sylvester pasara tantos años sin resolverse [...] Un problema seminal puede abrir caminos intelectuales que siguen explorándose muchos años después». En 1877, en un discurso en la Universidad Johns Hopkins, Sylvester afirmó que «las matemáticas no son un libro confinado dentro de unas tapas. Tampoco una mina cuyos tesoros llenan tan sólo un número limitado de venas. No tienen límites. Sus posibilidades son tan infinitas como los mundos que se apiñan y multiplican sin cesar ante la mirada del astrónomo».

VÉASE TAMBIÉN Los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), El teorema del hexágono de Pappus (c. 340), Las matrices de Sylvester (1850) y El teorema de Jung (1901).

Dado un grupo disperso de puntos (representados aquí mediante esferas de colores), no todos en la misma recta, el teorema de Sylvester-Gallai afirma que debe existir al menos una recta que pase sólo por dos de los puntos.



1896

Demostración del teorema de los números primos

Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), **Jacques Salomon Hadamard** (1865–1963), **Charles-Jean de la Vallée-Poussin** (1866–1962), **John Edensor Littlewood** (1885–1977)

El matemático Don Zagier ha comentado que «a pesar de su simple definición y de ser las piezas básicas para la construcción de los números naturales, los números primos crecen como la mala hierba... sin que nadie pueda predecir dónde aparecerán... Y, lo que resulta aún más sorprendente, exhiben una regularidad asombrosa. Hay leyes que rigen su comportamiento, y las cumplen con una precisión casi militar».

Consideremos la función $\pi(n)$, que es el número de primos menores o iguales a un número n dado. En 1792, a los quince años, Carl Gauss quedó fascinado por la distribución de los números primos y propuso que $\pi(n)$ era aproximadamente igual al $n/\ln(n)$, donde ln es el logaritmo natural o neperiano. Una consecuencia del teorema de los números primos es que el enésimo número primo está muy cerca de $n\ln(n)$, con un error relativo que tiende a cero cuando n tiende a infinito. Más tarde, Gauss afinó más su estimación hasta llegar a $\pi(n) \sim \mathrm{Li}(n)$ donde $\mathrm{Li}(n)$ es la integral de $dx/\ln(x)$ entre 2 y n.

En 1896 dos matemáticos, el francés Jacques Hadamard y el belga Charles-Jean de la Vallée-Poussin, demostraron de forma independiente el teorema de Gauss. Basándose en experimentos numéricos, conjeturaron que $\pi(n)$ siempre está un poco por debajo de $\mathrm{Li}(n)$. En 1914, sin embargo, Littlewood demostró que $\pi(n) < \mathrm{Li}(n)$ se invierten con frecuencia infinita si se rastrean valores lo bastante grandes de n. En 1933, el matemático Stanley Skewes demostró que el primer «cruce» $\pi(n) - \mathrm{Li}(n) = 0$ ocurre antes de 10^10^10^34, un número que suele denominarse número de Skewes, donde el símbolo ^ indica exponenciación. Desde entonces, este número se ha reducido a 10^{316}.

El matemático inglés G. H. Hardy (1877–1947) describió el número de Skewes como «el número más grande que se ha utilizado con un propósito matemático definido» (aunque perdió después este puesto de privilegio). Paul Erdös y Atle Selberg descubrieron, hacia 1950, una demostración elemental del teorema de los números primos (es decir, una demostración que sólo utiliza números reales).

VÉASE TAMBIÉN Las cigarras generan números primos (c. 1 millón a. C), La criba de Eratóstenes (c. 240 a. C.), La conjetura de Goldbach (1742), La contrucción de un heptadecágono recular (1796), Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801), La hipótesis de Riemann (1859), La constante de Brun (1919), La conjetura de Gilbreath (1958), La espiral de Ulam (1963), Erdös y la colaboración extrema (1971), Criptografía de clave pública (1977) y La conjetura de Andrica (1985).

Los números primos, en negrita, «crecen como la mala hierba... sin que nadie pueda predecir dónde aparecerán...». El 1 solía considerarse un número primo; los matemáticos, en la actualidad, prefieren elegir el 2 como primer número primo.

1, **2**, **3**, 4, **5**, 6, **7**, 8, 9, 10, **11**, 12, **13**, 14, 15, 16, **17**, 18, **19**, 20, 21, 22, **23**, 24, 25, 26, 27, 28, **29**, 30, **31**, 32, 33, 34, 35, 36, **37**, 38, 39,
40, **41**, 42, **43**, 44, 45, 46, **47**, 48, 49, 50, 51, 52, **53**, 54, 55, 56, 57, 58, **59**, 60, **61**, 62, 63, 64, 65, 66, **67**, 68, 69, 70, **71**, 72, **73**, 74, 75,
76, 77, 78, **79**, 80, 81, 82, **83**, 84, 85, 86, 87, 88, **89**, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, **97**, 98, 99, 100, **101**, 102, **103**, 104, 105, 106, **107**, 108,
109, 110, 111, 112, **113**, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, **127**, 128, 129, 130, **131**, 132, 133, 134, 135,
136, **137**, 138, **139**, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, **149**, 150, **151**, 152, 153, 154, 155, 156, **157**, 158, 159, 160, 161, 162,
163, 164, 165, 166, **167**, 168, 169, 170, 171, 172, **173**, 174, 175, 176, 177, 178, **179**, 180, **181**, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189,
190, **191**, 192, **193**, 194, 195, 196, **197**, 198, **199**, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, **211**, 212, 213, 214, 215, 216,
217, 218, 219, 220, 221, 222, **223**, 224, 225, 226, **227**, 228, **229**, 230, 231, 232, **233**, 234, 235, 236, 237, 238, **239**, 240, **241**, 242, 243,
244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, **251**, 252, 253, 254, 255, 256, **257**, 258, 259, 260, 261, 262, **263**, 264, 265, 266, 267, 268, **269**, 270,
271, 272, 273, 274, 275, 276, **277**, 278, 279, 280, **281**, 282, **283**, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, **293**, 294, 295, 296, 297,
298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, **307**, 308, 309, 310, **311**, 312, **313**, 314, 315, 316, **317**, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324,
325, 326, 327, 328, 329, 330, **331**, 332, 333, 334, 335, 336, **337**, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, **347**, 348, **349**, 350, 351,
352, **353**, 354, 355, 356, 357, 358, **359**, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, **367**, 368, 369, 370, 371, 372, **373**, 374, 375, 376, 377, 378,
379, 380, 381, 382, **383**, 384, 385, 386, 387, 388, **389**, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, **397**, 398, 399, 400, **401**, 402, 403, 404, 405,
406, 407, 408, **409**, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, **419**, 420, **421**, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, **431**, 432,
433, 434, 435, 436, 437, 438, **439**, 440, 441, 442, **443**, 444, 445, 446, 447, 448, **449**, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, **457**, 458, 459,
460, **461**, 462, **463**, 464, 465, 466, **467**, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, **479**, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486,
487, 488, 489, 490, **491**, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, **499**, 500, 501, 502, **503**, 504, 505, 506, 507, 508, **509**, 510, 511, 512, 513,
514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, **521**, 522, **523**, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540,
541, 542, 543, 544, 545, 546, **547**, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, **557**, 558, 559, 560, 561, 562, **563**, 564, 565, 566, 567,
568, **569**, 570, **571**, 572, 573, 574, 575, 576, **577**, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, **587**, 588, 589, 590, 591, 592, **593**, 594,
595, 596, 597, 598, **599**, 600, **601**, 602, 603, 604, 605, 606, **607**, 608, 609, 610, 611, 612, **613**, 614, 615, 616, **617**, 618, **619**, 620, 621,
622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, **631**, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, **641**, 642, **643**, 644, 645, 646, **647**, 648,
649, 650, 651, 652, **653**, 654, 655, 656, 657, 658, **659**, 660, **661**, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, **673**, 674, 675,
676, **677**, 678, 679, 680, 681, 682, **683**, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, **691**, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, **701**, 702,
703, 704, 705, 706, 707, 708, **709**, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, **719**, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, **727**, 728, 729,
730, 731, 732, **733**, 734, 735, 736, 737, 738, **739**, 740, 741, 742, **743**, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, **751**, 752, 753, 754, 755, 756,
757, 758, 759, 760, **761**, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, **769**, 770, 771, 772, **773**, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783,
784, 785, 786, **787**, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, **797**, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, **809**, 810,
811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, **821**, 822, **823**, 824, 825, 826, **827**, 828, **829**, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837,
838, **839**, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, **853**, 854, 855, 856, **857**, 858, **859**, 860, 861, 862, **863**, 864,
865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, **877**, 878, 879, 880, **881**, 882, **883**, 884, 885, 886, **887**, 888, 889, 890, 891,
892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, **907**, 908, 909, 910, **911**, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918,
919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, **929**, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, **937**, 938, 939, 940, **941**, 942, 943, 944, 945,
946, **947**, 948, 949, 950, 951, 952, **953**, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, **967**, 968, 969, 970, **971**, 972,
973, 974, 975, 976, **977**, 978, 979, 980, 981, 982, **983**, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, **991**, 992, 993, 994, 995, 996, **997**, 998, 999

1899

El teorema de Pick

Georg Alexander Pick (1859–1942)

La maravillosa sencillez del teorema de Pick permite que pueda visualizarse con un lapicero y un poco de papel pautado. Dibuje un polígono simple en una cuadrícula regular, de modo que todos los vértices del polígono coincidan con puntos de intersección de la cuadrícula. El teorema de Pick afirma que el área A de este polígono, en unidades cuadradas, puede calcularse contando el número de puntos de la cuadrícula (i) localizados en el interior del polígono y el número de puntos de la cuadrícula (b) localizados en el perímetro, según la formula $A = i + b/2 - 1$. El teorema de Pick no puede aplicarse a polígonos con agujeros.

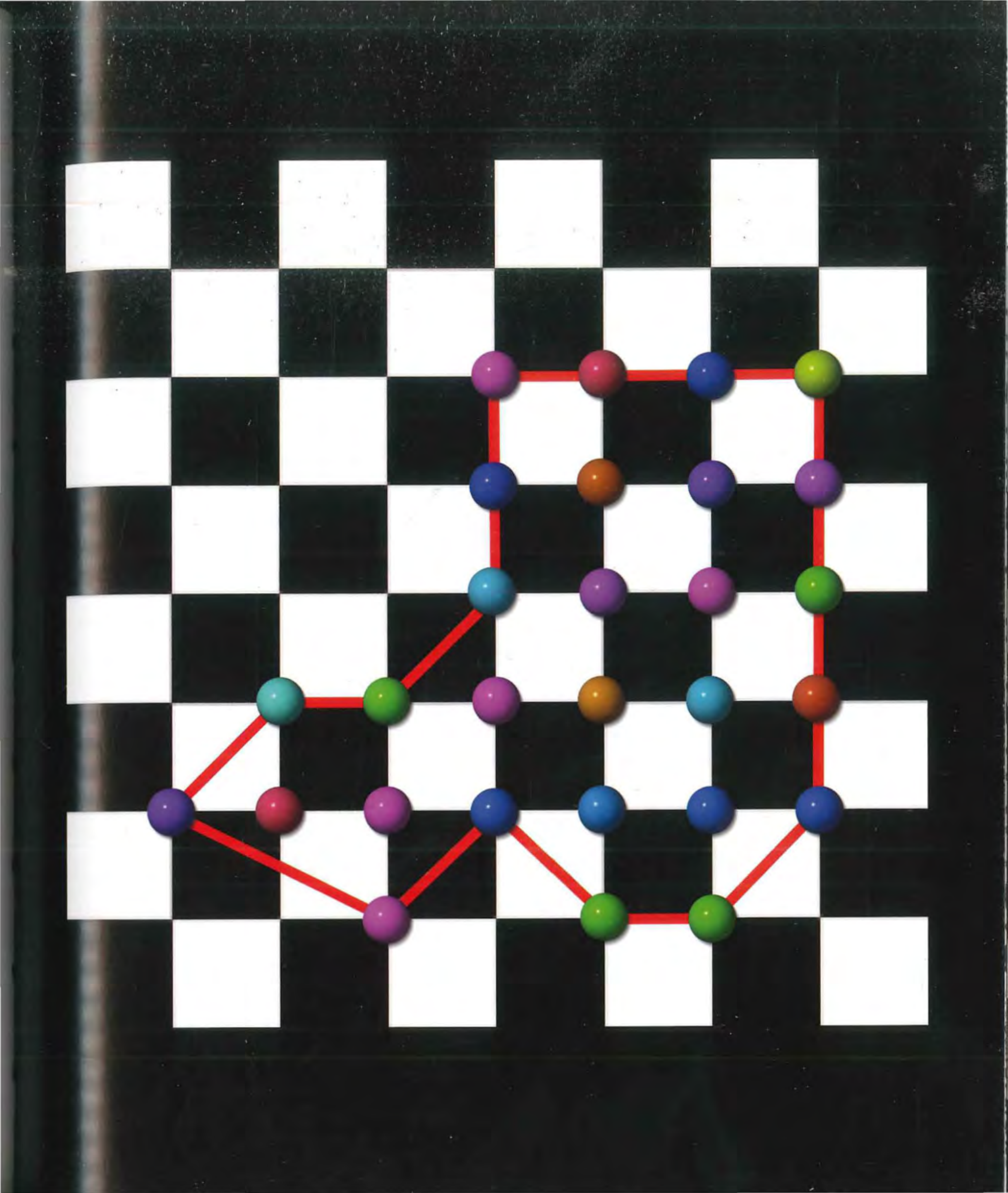
El matemático austriaco Georg Pick dio a conocer este teorema en 1899. En 1911, Pick introdujo a Albert Einstein en el trabajo de algunos matemáticos relevantes. Gracias a ello, Einstein pudo desarrollar la teoría general de la relatividad. Cuando las tropas de Hitler invadieron Austria en 1938, Pick, que era judío, tuvo que escapar a Praga. Por desgracia, no fue suficiente para salvar su vida. En 1942 los nazis invadieron Checoslovaquia y lo enviaron al campo de concentración de Theresienstadt, donde murió. De los 144.000 judíos enviados a Theresienstadt, una cuarta parte murió en el mismo campo; un 60% terminó en Auschwitz o en otros campos de exterminio.

Los matemáticos han descubierto después que no existe ningún teorema análogo al de Pick que permita calcular el volumen de un politopo (por ejemplo un poliedro) en tres dimensiones contando los puntos interiores y los puntos del contorno.

El papel pautado permite utilizar el teorema de Pick para estimar las áreas de las regiones de un mapa: basta con aproximar la región a un polígono. Según el divulgador científico británico Davis Darling, «en las últimas décadas se han hecho varias extensiones del teorema de Pick a polígonos más generales, a poliedros en más dimensiones y a armazones que no sean cuadrículas. El teorema vincula la geometría euclidiana tradicional y la moderna geometría digital (discreta)».

VÉASE TAMBIÉN Los sólidos platónicos (350 a. C.), Los *Elementos* de Euclides (300 a. C.) y Los poliedros arquimedianos (c. 240 a. C.).

El teorema de Pick afirma que el área A *de este polígono es* $A = i + b/2 - 1$*, donde* i *es el número de puntos del interior del polígono y* b *el número de puntos del perímetro.*



1899

El teorema de las trisectrices de Morley

Frank Morley (1860–1937)

En 1899 el matemático angloestadounidense Frank Morlet, un experto jugador de ajedrez, dio a conocer el teorema que lleva su nombre, que afirma que, en un triángulo *cualquiera*, los puntos de intersección entre trisectrices adyacentes definen *siempre* un triángulo equilátero. Las *trisectrices* son las rectas que dividen los ángulos interiores en tres ángulos iguales; estas rectas se cortan en seis puntos: tres de ellos formando un triángulo equilátero. Existen varias demostraciones, aunque algunas de las más antiguas resultan bastante complejas.

Este resultado tan hermoso y sorprendente hizo que sus colegas llegaran a conocerlo como «el milagro de Morley». Según Richard Francis, «al parecer, los antiguos geómetras lo pasaron por alto; después, las incertidumbres acerca de la trisección de un ángulo hicieron que se abandonara con rapidez, de modo que este problema vio la luz hace tan sólo un siglo. Frank Morley lo conjeturó en torno a 1900, pero su demostración, o al menos una demostración más rigurosa, no ha llegado hasta hace poco. Este bello y elegante teorema euclidiano, misteriosamente desconocido durante eras, pertenece por tanto al siglo XX».

Morley fue profesor en el Quaker College de Haverford, en Pensilvania y en la Universidad Johns Hopkins. En 1933 publicó *Inversive Geometry* en colaboración con su hijo Frank V. Morley. En la obra *One Contribution to Chess*, el hijo escribió lo siguiente sobre su padre: «Comenzaba a rebuscar un lápiz casi gastado en el bolsillo del pantalón y después en la chaqueta hasta encontrar un pedazo de papel... entonces se levantaba a hurtadillas y se dirigía al estudio. Mi madre le gritaba: "¡Frank, no te pongas a trabajar ahora!" La respuesta era siempre la misma: "¡Sólo un poco!" Y la puerta del estudio se cerraba».

El teorema de Morley sigue fascinando a los expertos. En 1998 Alain Connes, galardonado con la medalla Fields, dio a conocer una nueva demostración del teorema.

VÉASE TAMBIÉN Los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), Teorema del coseno (c. 1427), El teorema de Viviani (1659), El problema de la división del polígono de Euler (1751) y Selección de triángulos en una esfera (1982).

Según el teorema de Morley (también conocido como el milagro de Morley), dado cualquier triángulo, los puntos de intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos forman siempre un triángulo equilátero.



1900

Los veintitrés problemas de Hilbert

David Hilbert (1862–1943)

El matemático alemán David Hilbert escribió: «Una rama de la ciencia está viva si ofrece problemas en abundancia; la escasez de problemas indica que está muerta». En el año 1900 dio a conocer una lista de veintitrés problemas matemáticos esenciales que debían resolverse en el siglo XX. El prestigio de Hilbert hizo que los matemáticos dedicaran mucho tiempo a trabajar en estos problemas con el devenir de los años. Su discurso al respecto, de una influencia extrema, comenzaba así: «¿Quién de nosotros no se alegraría si lograra apartar el velo tras el que se oculta el futuro para echar un vistazo a los avances científicos de los siglos venideros y a los secretos de su desarrollo? ¿Contra qué objetivos particulares tendrán que luchar los mejores espíritus matemáticos de las próximas generaciones?»

Desde entonces, se han resuelto limpiamente unos diez problemas, y muchos otros han encontrado soluciones que algunos expertos aceptan, pero para los que todavía queda alguna controversia. Por ejemplo, la demostración de la **conjetura de Kepler** (parte del Problema 18), que aborda la optimización del empaquetamiento de esferas, incluye una prueba asistida por ordenador que resulta muy difícil de verificar.

La hipótesis de Riemann, uno de los problemas más célebres de entre los que siguen sin solución, está relacionada con la distribución de ceros en la ondulada función zeta de Riemann. David Hilbert señaló que «si despertara después de dormir durante mil años, mi primera pregunta sería: ¿se ha demostrado ya la hipótesis de Riemann?»

Según Ben Yandell, «la resolución de uno de los problemas de Hilbert ha sido el sueño romántico de muchos matemáticos. Durante los últimos cien años, las soluciones y los resultados parciales significativos han llegado de todo el mundo. Los problemas de Hilbert, tan bien seleccionados, tienen tanta belleza que, junto a su atractivo romántico e histórico, los han convertido en una fuerza organizadora de las matemáticas».

VÉASE TAMBIÉN La conjetura de Kepler (1611), La hipótesis de Riemann (1859) y El hotel infinito de Hilbert (1925).

Esta fotografía de David Hilbert en 1912 aparecía en postales de la Universidad de Göttingen. Los estudiantes solían comprarlas.



1900

Chi-cuadrado

Karl Pearson (1857–1936)

No es raro que los científicos obtengan resultados experimentales que no concuerdan con los que anticipan las leyes de la probabilidad. Al tirar un dado, por ejemplo, si la desviación respecto de lo esperado es muy grande, podemos pensar que el dado está trucado, como sería el caso de un dado cuyas caras tuvieran pesos distintos.

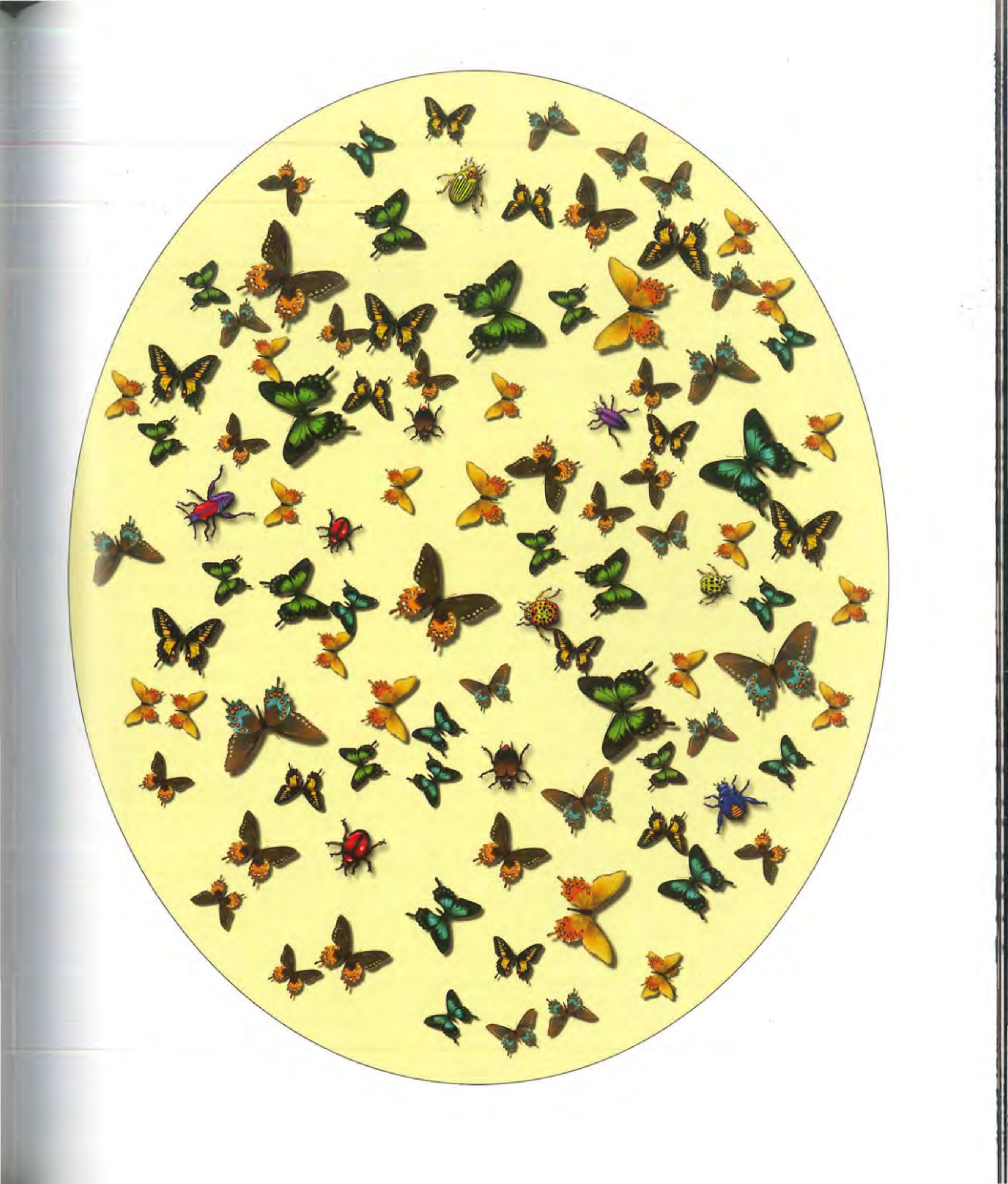
La prueba chi-cuadrado se publicó en 1900. Se trata de un método utilizado en innumerables campos, desde la criptografía y las pruebas de fiabilidad en ingeniería hasta el análisis estadístico deportivo. Su autor fue el matemático británico Karl Pearson. Al aplicar esta prueba se da por supuesto que los acontecimientos son independientes (como en el caso del dado). El valor de chi-cuadrado puede calcularse si conocemos todas las frecuencias observadas O_i, y las frecuencias teóricas, y por tanto esperadas, E_i. La formula puede escribirse como $\chi^2 = \Sigma(O_i - E_i)^2/E_i$. Si la frecuencia teórica y la observada coinciden exactamente, entonces $\chi^2 = 0$. Cuanto mayor sea la diferencia, más grande será χ^2. En la práctica, el significado de esta diferencia se determina mediante tablas de chi-cuadrado que ayudan a valorar si la desviación es significativa. Los investigadores pueden sospechar de valores de χ^2 demasiado próximos a cero, por supuesto, y buscar valores que sean muy bajos o muy altos. Evidentemente, valores de χ^2 muy próximos a cero pueden resultar sospechosos; lo mismo puede parecer con valores de χ^2 demasiado grandes o demasiado pequeños.

Valoremos la hipótesis de una muestra aleatoria de cien insectos extraída de una población en la que mariposas y escarabajos tienen la misma frecuencia. Si tenemos 10 escarabajos y 90 mariposas, entonces $\chi^2 = (10 - 50)^2/50 + (90 - 50)^2/50 = 64$, un valor alto que sugiere que nuestra hipótesis inicial (que hemos extraído individuos al azar de una población con el mismo número de mariposas y escarabajos) es probablemente incorrecta.

Pearson recibió muchos premios por su trabajo, aunque no podemos dejar de señalar que era un racista que abogaba por una «guerra» contra «las razas inferiores».

VÉASE TAMBIÉN Dados (3000 a. C.), La ley de los grandes números (1713), La curva de distribución normal (1733), Mínimos cuadrados (1795) y La *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace (1812).

Los valores de chi-cuadrado nos ayudan a valorar la hipótesis de aleatoriedad de una muestra de cien insectos extraída de una población en la que mariposas y escarabajos tienen la misma frecuencia. Para este caso, el valor $\chi^2 = 64$ *sugiere que nuestra hipótesis es probablemente incorrecta.*



1901

La superficie de Boy

Werner Boy (1879–1914), **Bernard Morin** (nacido en 1931)

La superficie de Boy fue descubierta en 1901 por el matemático alemán Werner Boy. Como la **botella de Klein**, este objeto es una superficie de una única cara y sin bordes. La superficie de Boy también es una superficie no orientable, lo que significa que una criatura bidimensional podría recorrer la superficie y encontrar caminos que invertirían su izquierda y su derecha al regresar al punto de partida. **La cinta de Möbius** y la botella de Klein son también superficies no orientables.

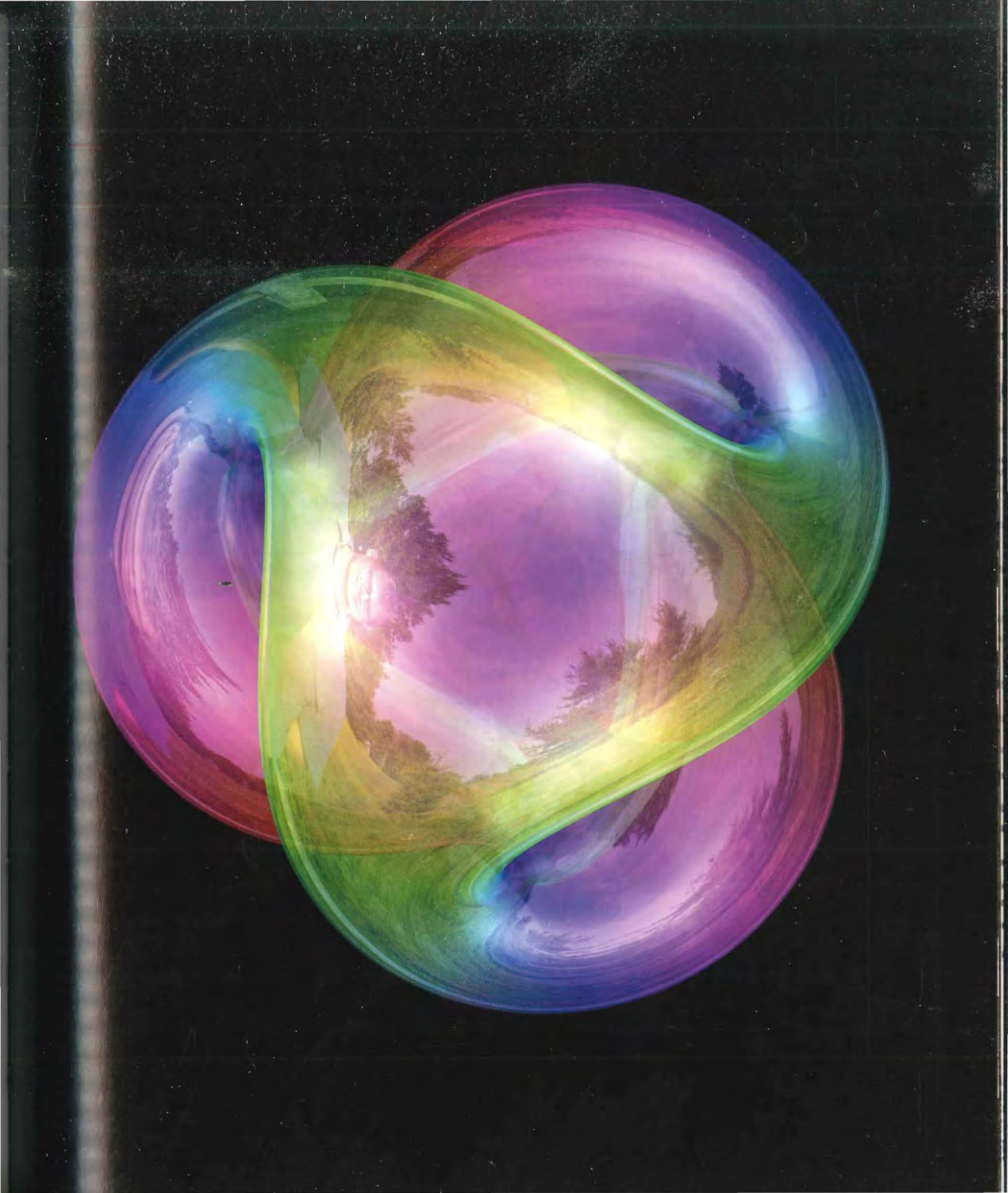
Hablando formalmente, la superficie de Boy es una inmersión del plano proyectivo en el espacio tridimensional sin puntos singulares (pinzamientos). Existen métodos geométricos para su construcción y algunos de ellos incluyen el estiramiento de un disco y el encolado del borde del disco al borde de una cinta de Möbius. Durante el proceso, la superficie puede pasar a través de sí misma, pero sin desgarros o pinzamientos. La superficie de Boy es muy difícil de visualizar, aunque los gráficos por ordenador ayudan a los investigadores a hacerse una mejor idea de la figura.

La superficie de Boy tiene simetría de triradial. En otras palabras, existe un eje alrededor del cual la figura puede rotar 120° y quedar igual. Curiosamente, Boy era capaz de dibujar diferentes modelos de la superficie, pero no pudo determinar las ecuaciones (un modelo paramétrico) para describirlos. En 1978, el matemático francés Bernard Morin encontró la primera parametrización usando ordenadores. Morin, ciego desde la infancia, ha tenido una exitosa carrera como matemático.

La periodista especializada en matemáticas Allyn Jackson, escribió: «Lejos de reducir su extraordinaria habilidad para la visualización, la ceguera de Morin puede haberla mejorado... Algo que es difícil cuando se trata de visualizar objetos es que tendemos a ver únicamente su exterior, no el interior, que puede ser muy complicado... Morin ha desarrollado la habilidad de pasar del exterior al interior... Como está tan acostumbrado a la información táctil, Morin puede, después de haber manipulado un modelo manejable durante un par de horas, conservar el recuerdo de su forma durante años».

VÉASE TAMBIÉN Superficie Mínima (1774), La cinta de Möbius (1858), La botella de Klein (1882), Cómo evertir una esfera (1958), y La variedad de Weeks (1985).

Superficie de Boy, interpretación de Paul Nylander. Este objeto es una superficie de una sola cara y sin bordes.



1901

La paradoja del barbero

Bertrand Russell (1872-1970)

En 1901 el filósofo y matemático inglés Bertrand Russell descubrió una posible paradoja o aparente contradicción que llevó a una modificación de la teoría de conjuntos. Una versión de la paradoja de Russell, también conocida como paradoja del barbero, habla de una ciudad con un barbero que, todos los días, afeita a todos los hombres que no se afeitan a sí mismos y a nadie más. ¿Se afeita el barbero a sí mismo?

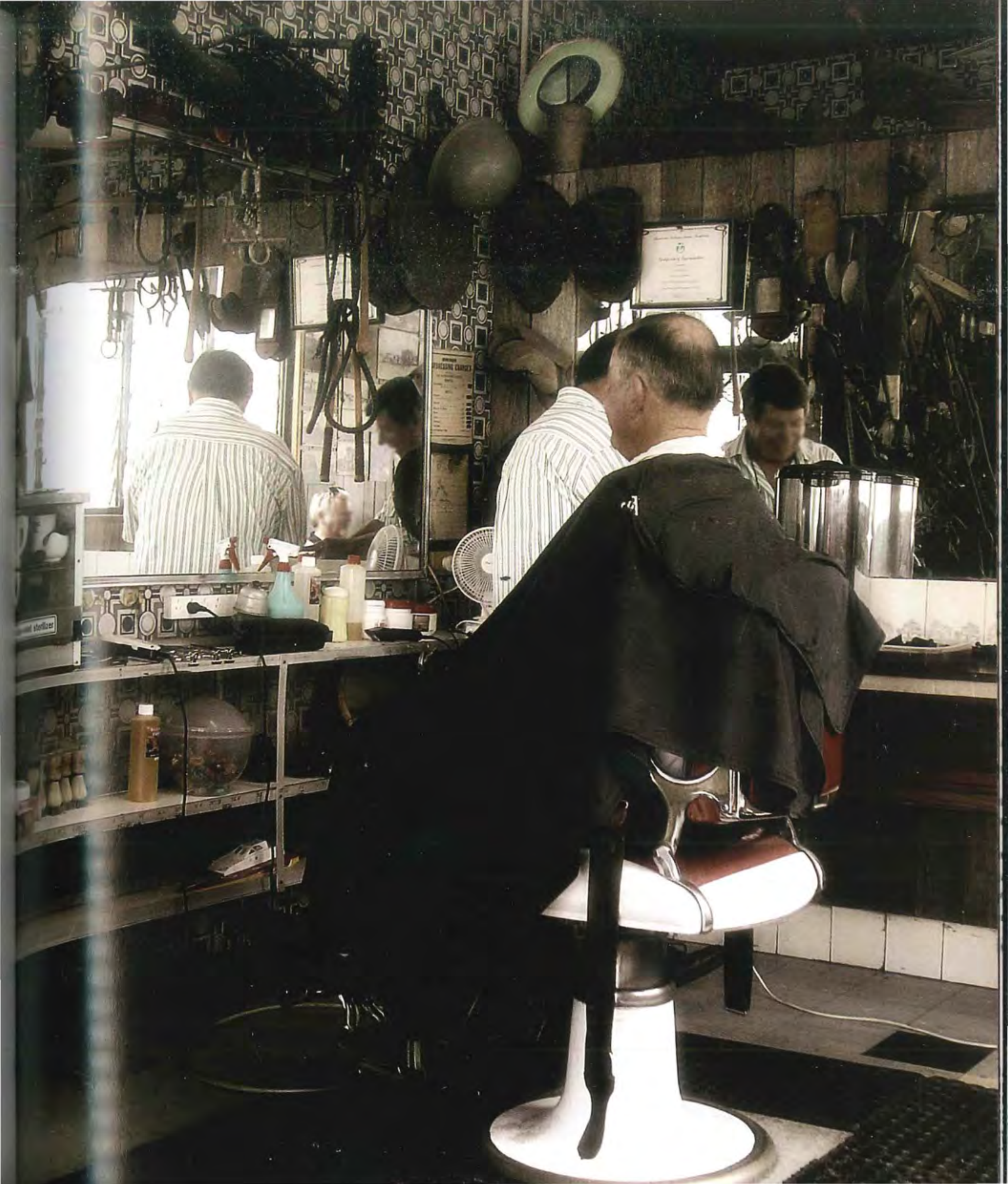
El argumento parece exigir que el barbero se afeita a sí mismo si, y solo si, no se afeita a sí mismo. Helen Joyce escribió: «La paradoja plantea la aterradora perspectiva de que todas las matemáticas están construidas sobre bases endebles y que no nos podemos fiar de ninguna demostración».

La paradoja de Russell, en su forma original, trata sobre el conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos. Muchos conjuntos *R* no son miembros de sí mismos –por ejemplo, el conjunto de cubos no es un cubo. Ejemplos de conjuntos *T* que sí se contienen a sí mismos son el conjunto de todos los conjuntos, o el conjunto de todas las cosas que no sean cubos. Todos los conjuntos parecen ser de uno de los dos tipos, *R* o *T*, y ningún conjunto puede ser de los dos. Sin embargo, Russell se preguntó acerca del conjunto *S* de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos. De algún modo, *S* no es ni miembro de sí mismo, ni no miembro de sí mismo. Russell se dio cuenta de que tenía que modificar la teoría de conjuntos de modo que se evitaran tales confusiones y posibles contradicciones.

Una posible refutación de la paradoja del barbero puede ser decir que simplemente un barbero así no puede existir. Con todo, la paradoja de Russell desembocó en una forma más diáfana de la teoría de conjuntos. El matemático alemán Kart Gödel hizo uso de observaciones parecidas cuando trabajaba en su teorema de incompletitud. El matemático británico Alan Turing también encontró útil el trabajo de Russell cuando estudiaba la indecibilidad del «problema de la parada», que trata de la evaluación de si un programa de ordenador se detendrá o no al cabo de un número finito de pasos.

VÉASE TAMBIÉN Las paradojas de Zenón (c. 445 a. C), La paradoja de la rueda de Aristóteles (c. 320 a. C), La paradoja de San Petersburgo (1738), El axioma de elección de Zermelo (1904), *Principia Mathematica* (1910-1913), La paradoja de Banach-Tarski (1924), El hotel infinito de Hilbert (1925), El teorema de Gödel (1931), Las máquinas de Turing (1936), La paradoja del cumpleaños (1939), La paradoja de Newcomb (1960), La constante Omega de Chaitin (1974), La paradoja de Parrondo (1999).

La paradoja del barbero habla de una ciudad con un barbero que, todos los días, afeita a todos los hombres que no se afeitan a sí mismos y a nadie más. ¿Se afeita el barbero a sí mismo?


sterilizer

1901

El teorema de Jung

Heinrich Wilhelm Ewald Jung (1876–1953)

Imagine un conjunto finito de puntos dispersos como podría ser un mapa de las constelaciones del cielo o gotas de tintas dispuestas al azar en una página. Trace una línea entre los dos puntos más alejados. Esta mayor distancia posible d entre dos puntos se llama diámetro geométrico del conjunto de puntos. El teorema de Jung dice que, independientemente de cómo estén dispuestos los puntos, seguro que están contenidos en un círculo de radio no mayor que $d/\sqrt{3}$. En el caso de puntos distribuidos sobre los lados de un triángulo equilátero, con lados de longitud 1, el circulo pasa por los tres vértices (esquinas) del triángulo y tiene un radio igual a $1/\sqrt{3}$.

El teorema de Jung puede generalizarse a tres dimensiones y entonces el conjunto de puntos puede encerrarse en una esfera de radio no mayor que $\sqrt{6}d/4$. Esto significa, por ejemplo, que si tenemos una colección de objetos puntuales en el espacio, como una bandada de pájaros o un banco de peces, podemos asegurar que pueden encerrarse en una esfera así. A partir de aquí, el teorema de Jung se ha ampliado a diversos espacios y geometrías no euclídeas.

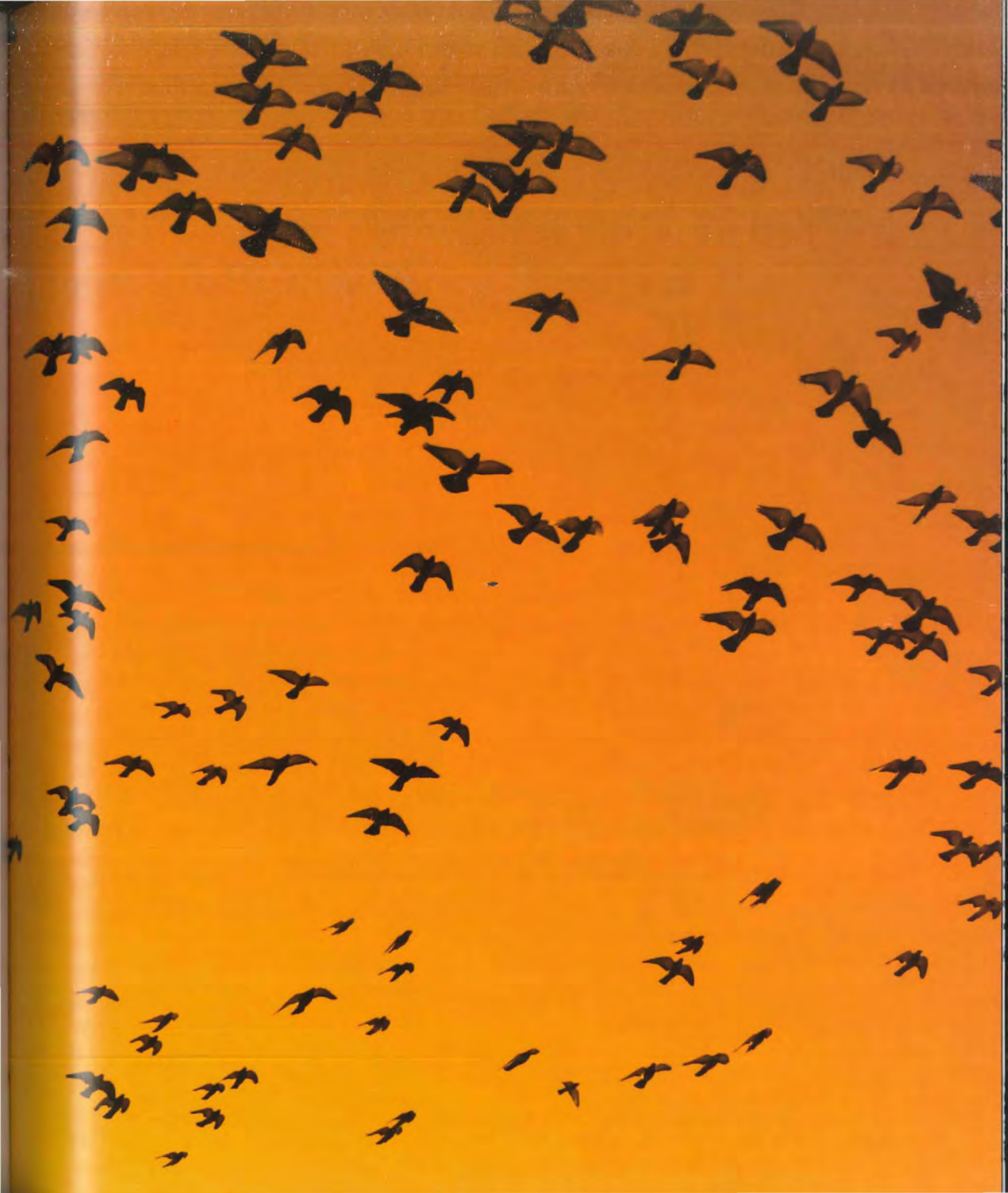
Si queremos llevar el teorema a escenarios alucinantes, como pájaros encerrados en esferas multidimensionales de dimensión n, podemos recurrir a la sorprendentemente compacta fórmula:

$$r \leq d\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$$

que nos dice que podemos asegurar que una hiperesfera de dimensión 4 y de radio $d\sqrt{2/5}$ englobará a una bandada de estorninos que tengan la capacidad de volar en la cuarta dimensión. El matemático alemán Heinrich Jung estudió matemáticas, física y química en la Universidad de Marburgo y en la Universidad de Berlín desde 1895 hasta 1899 y publicó su teorema en 1901.

VÉASE TAMBIÉN Los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), Geometría no euclídea (1829) y El problema de la recta de Sylvester (1893).

Una bandada de pájaros, no importa lo complicada que sea, puede encerrarse en una esfera de radio no mayor que $\sqrt{6}$d/4 si consideramos cada pájaro como un punto en el espacio. ¿Qué podemos decir sobre una bandada de estorninos en un espacio de dimensión 4?



1904

La conjetura de Poincaré

Henri Poincaré (1854–1912), **Grigori Perelman** (nacido en 1966)

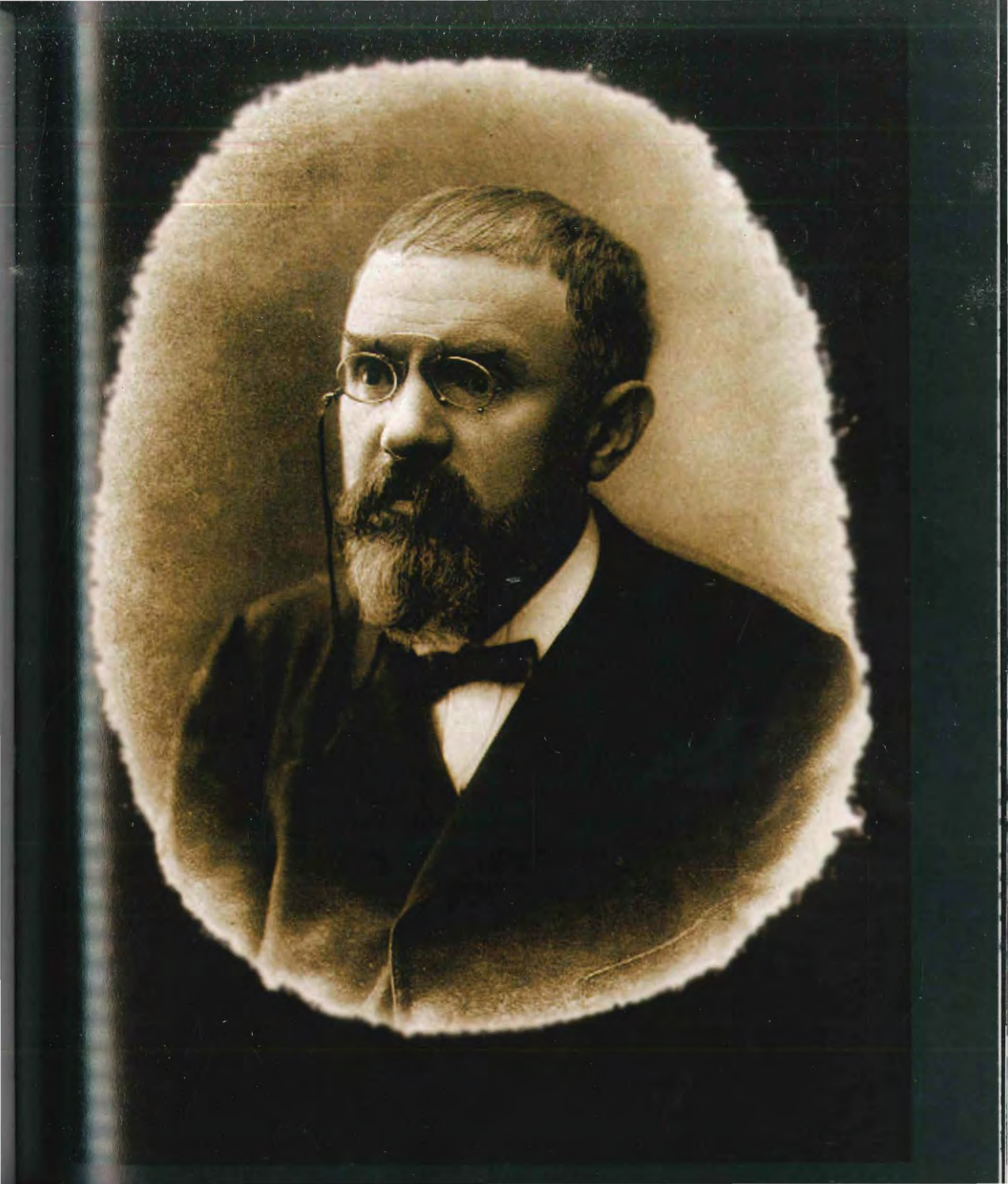
La conjetura de Poincaré, formulada en 1904 por el matemático francés Henri Poincaré, pertenece al campo de la topología, la rama de las matemáticas que trata del estudio de las formas y sus interrelaciones. El año 2000 el Instituto Clay de Matemáticas ofreció un millón de dólares por una demostración de la conjetura, que podemos concebir conceptualmente a grandes rasgos por medio de naranjas y rosquillas. Imagine una goma de pelo rodeando una naranja. En teoría podemos contraer lentamente la goma a un punto sin romperla ni dañar la naranja; sin embargo, si una goma rodea una rosquilla a través de su agujero, no podremos reducir la goma a un punto sin romper la goma o la rosquilla. Contrariamente a la superficie de la rosquilla, la superficie de la naranja se dice simplemente conexa. Poincaré comprendió que una estructura esférica bidimensional (representada, por ejemplo, por la superficie de la naranja) es simplemente conexa y se preguntó si una esfera tridimensional (conjunto de puntos en un espacio de dimensión cuatro que están a igual distancia de un punto dado) tendría la misma propiedad.

Finalmente, en 2002 y 2003, el matemático ruso Grigori Perelman, probó la conjetura. Por extraño que parezca, Perelman mostró poco interés por cobrar el premio y simplemente colgó su demostración en Internet en vez de publicarla en una revista importante. En 2006 Perelman fue premiado con la prestigiosa **medalla Fields** por su demostración, pero rechazó el premio diciendo que era «completamente irrelevante». Para Perelman, si la demostración era correcta, «no necesitaba ningún otro reconocimiento».

La revista *Science* informaba en 2006: «La demostración de Perelman ha modificado profundamente dos diferentes ramas de las matemáticas. Primero, resuelve un problema que llevaba más de un siglo siendo "la piedra en el zapato" de la topología...[Segundo], su trabajo dará lugar a un resultado mucho más amplio....una "tabla periódica" que aporta claridad al estudio de los espacios tridimensionales, como la tabla de Mendeleiev hizo con la química».

VÉASE TAMBIÉN Los puentes de Königsberg (1736), La botella de Klein (1882), La medalla Fields (1936), y La variedad de Weeks (1985).

El matemático francés Henri Poincaré lanzó la conjetura que lleva su nombre en 1904. La conjetura permaneció sin demostrar hasta 2002 y 2003 cuando el matemático ruso Grigori Perelman ofreció finalmente una demostración válida.



1904

El copo de nieve de Koch

Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924)

El copo de nieve de Koch es uno de los primeros objetos fractales que se enseña a los estudiantes y está también entre los primeros fractales descritos en la historia de las matemáticas. La intrincada figura apareció en el artículo del matemático sueco Helge von Koch "On a Continuous Curve without Tangents, Constructible from Elementary Geometry". En la curva de Koch, una estructura relacionada, el proceso de generación de la curva comienza con un segmento en lugar de un triángulo equilátero.

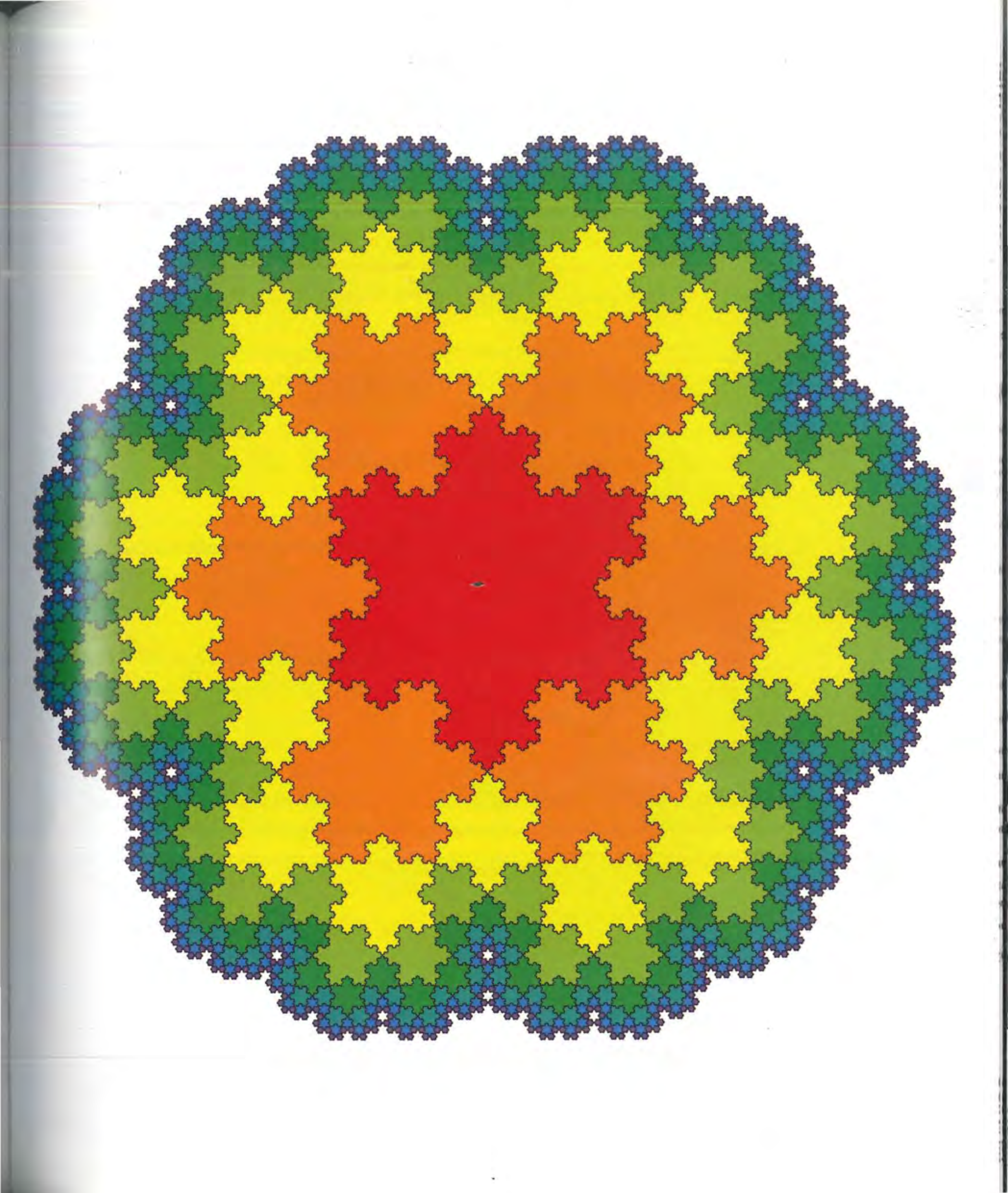
Para crear la retorcida curva de Koch, podemos modificar recursivamente un segmento, observando cómo brotan una cantidad infinita de aristas en el proceso. Imagine un segmento dividido en tres partes iguales. Luego, sustituya el tramo central por dos líneas, ambas de igual longitud que las tres primeras, de tal forma que formen una cuña en forma de V (los lados superiores de un triángulo equilátero). La forma consta ahora de cuatro líneas rectas. Para cada una de esas líneas repita el proceso de división y formación de las cuñas.

Comenzando con una línea de una pulgada de longitud, la longitud de la curva creciente en el paso n del procedimiento es $(4/3)^n$ pulgadas. Después de unos pocos cientos de iteraciones, la longitud de la curva se hace mayor que el diámetro del universo visible. De hecho, la curva de Koch final tiene una longitud infinita y una dimensión fractal aproximadamente igual a 1,26 porque llena parcialmente el plano bidimensional en el que está dibujada.

Aunque la figura final de un copo de nieve de Koch tiene longitud infinita, encierra un área finita $(2\sqrt{3}s^2)/5$, donde l es la longitud del segmento inicial, o de otro modo, el área es sencillamente 8/5 veces el área del triángulo inicial. Teniendo en cuenta que una función no tiene tangente definida en un vértice, lo que implica que la función no es diferenciable (no tiene derivadas únicas) en los vértices, la curva de Koch no es diferenciable en ningún punto (por ser tan puntiaguda), aunque la curva es continua.

VÉASE TAMBIÉN La función de Weierstrass (1872), La curva de Peano (1890), La dimensión Hausdorff (1918), La esponja de Menger (1926), La paradoja de la línea de costa (1950) y Los fractales (1975).

Embaldosado con el copo de nieve de Koch. Para crear este diseño, el artista y matemático Robert Fathauer utiliza diferentes tamaños de copos de nieve.



1904

El axioma de elección de Zermelo

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953)

David Darling llama a este axioma de la teoría de conjuntos «uno de los más controvertidos axiomas de las matemáticas». El axioma fue formulado en 1904 por el matemático alemán Ernst Zermelo, quien más tarde fue nombrado catedrático honorario de la Universidad de Friburgo, puesto al que renunció como protesta por el régimen de Hitler.

Aunque complejo de escribir matemáticamente, el axioma de elección puede visualizarse intuitivamente considerando una larga estantería de peceras con peces de colores. Cada pecera contiene al menos un pez. El axioma de elección (AE) dice simplemente que siempre podremos elegir, teóricamente, un pez de cada pecera, aunque haya *infinitas* peceras, aunque no haya una regla que indique qué peces tomar de cada pecera e incluso aunque no se puedan diferenciar unos peces de otros.

Usando lenguaje matemático, si S es una colección de conjuntos no vacíos y sin elementos en común, entonces existe un conjunto que tiene exactamente un elemento en común con cada conjunto de S. Viéndolo de otro modo, existe una función de elección f con la propiedad de que para cada conjunto s de la colección S, $f(s)$ es un elemento de s.

Antes del AE, no había razón para creer que siempre se podía encontrar un razonamiento matemático para determinar qué pez coger de las peceras si algunas de las peceras tenían infinitos peces o al menos no había razón para pensar que siempre se podría encontrar un razonamiento lógico que pudiera aplicarse en menos de una cantidad infinita de tiempo. Resulta que el AE está en el fondo de muchos teoremas importantes del álgebra y la topología y muchos matemáticos lo aceptan porque es *muy útil*. Eric Schecter escribió: «Cuando aceptamos el AE, aceptamos la convención de autorizarnos a nosotros mismos a usar una hipotéticamente supuesta función de elección f, como si existiese en algún sentido, incluso en casos en los que no podemos dar un ejemplo o un algoritmo explícito».

VÉASE TAMBIÉN Los axiomas de Peano (1889), La paradoja del barbero (1901) y El hotel infinito de Hilbert (1925).

Teóricamente, aunque tengamos infinitas peceras, podremos elegir un pez de cada una de ellas, incluso si no tenemos ninguna regla que nos indique qué pez tomar de cada pecera e incluso si no podemos diferenciar unos peces de otros.



1905

El teorema de la curva de Jordan

Marie Ennemond Camille Jordan (1838–1922), **Oswald Veblen** (1880–1960)

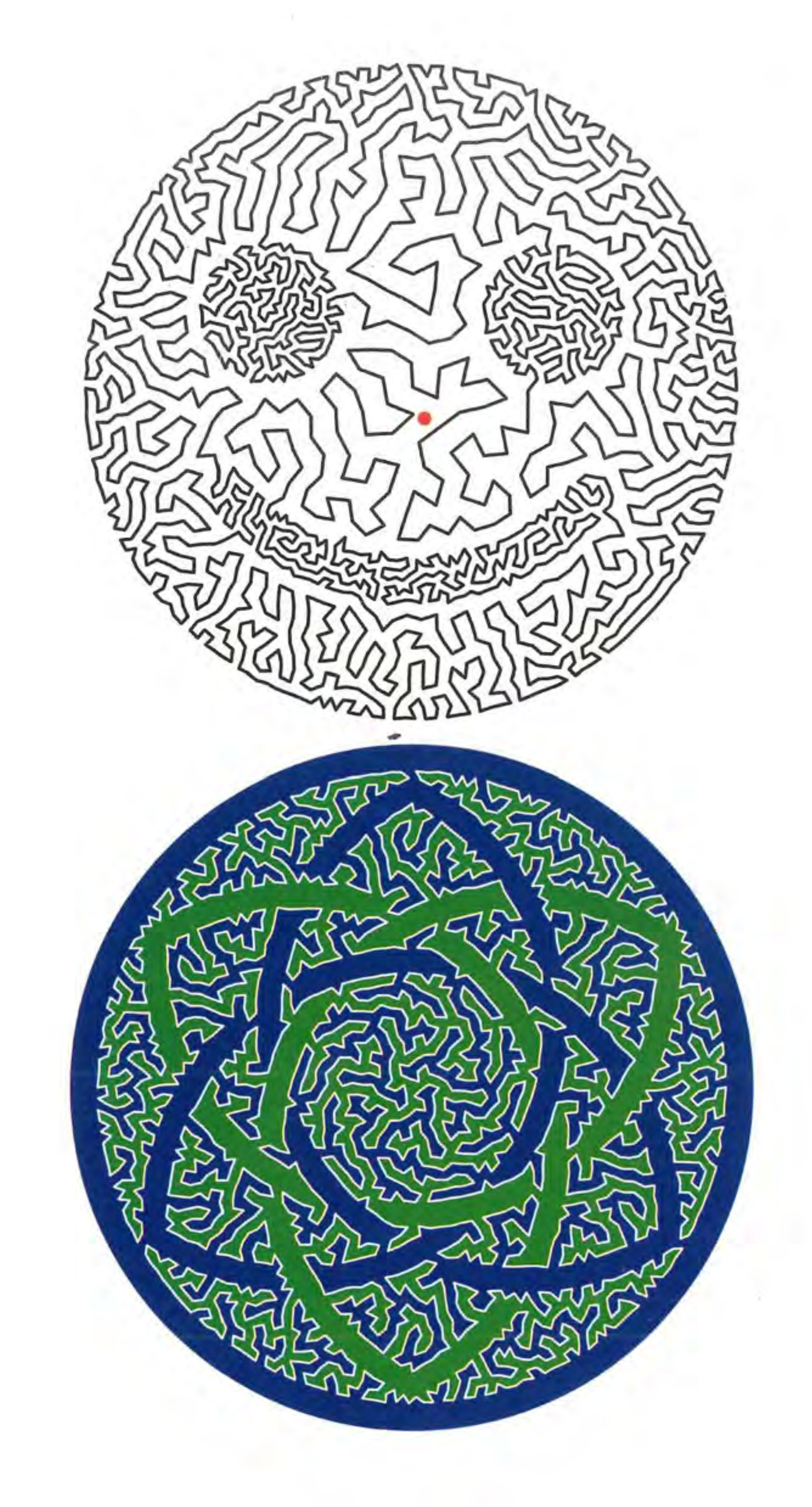
Encuentre un aro de alambre, retuérzalo bien sin que se cruce consigo mismo y déjelo sobre una mesa formando una especie de laberinto. Introduzca una hormiga en la estructura. Si el laberinto es lo bastante complejo, se hará difícil determinar si la hormiga se encuentra dentro o fuera del aro. Una forma de saber si la hormiga está en el interior del aro es contar el número de veces que cruza el alambre una línea recta imaginaria que va desde la hormiga hasta el exterior. Si la línea cruza la curva un número par de veces, la hormiga está fuera del laberinto; si el número es impar, está dentro.

El matemático francés Camille Jordan investigó este tipo de reglas para distinguir el interior y el exterior de una curva; debe su fama, sobre todo, al teorema que afirma que una curva simple y cerrada divide un plano en dos zonas: una exterior y una interior. Aunque la afirmación parece obvia, Jordan se dio cuenta de que exigía una demostración rigurosa que entrañaba cierta dificultad. El trabajo de Jordan sobre curvas apareció en su obra *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (Curso de análisis de la escuela politécnica), publicada en tres volúmenes entre 1882 y 1887. El teorema de la curva de Jordan apareció en la tercera edición del texto, publicada entre 1909 y 1915. Suele atribuirse al matemático estadounidense Oswald Veblen el mérito de la primera demostración precisa de este teorema, en 1905.

Nótese que una curva de Jordan es una curva plana que se puede generar deformando una circunferencia. Debe ser simple (no puede cruzarse consigo misma) y cerrada (sin extremos, de modo que limite por completo un área). Las curvas de Jordan en un plano o esfera tienen un interior y un exterior, y para pasar de una zona a otra hay que cruzar al menos una línea. En un toro, sin embargo (una rosquilla, por ejemplo), las curvas de Jordan no presentan siempre esta propiedad.

VÉASE TAMBIÉN Los puentes de Königsberg (1736), El teorema de Holditch (1858), La conjetura de Poincaré (1904), La esfera cornuda de Alexander (1924) y El juego del drago (1967).

Curvas de Jordan, por el matemático y artista Robert Bosch. ARRIBA: *¿Está el punto rojo dentro o fuera de la curva?* ABAJO: *La línea blanca es una curva de Jordan, las regiones verde y azul son su interior y exterior respectivamente.*



1906

La secuencia de Thue-Morse

Axel Thue (1863–1922), **Marston Morse** (1892–1977)

La secuencia Thue-Morse es una secuencia binaria que comienza 01101001... En mi libro *Mazes for the Mind*, cuando la secuencia se transforma en sonidos, un personaje señala: «Es la cosa más rara que hayas escuchado jamás. No es del todo irregular ni del todo regular, es otra cosa». El nombre de la secuencia hace honor al matemático noruego Axel Thue y al matemático americano Marston Morse. En 1906 Thue introdujo la secuencia como ejemplo de cadena de símbolos no periódica y recursivamente computable. En 1921 Morse la aplicó en sus estudios sobre geometría diferencial y desde entonces se han descubierto numerosas y fascinantes propiedades y aplicaciones.

Una forma de generar la secuencia es comenzar con un cero y realizar repetidamente las siguientes situaciones $0 \rightarrow 01$ y $1 \rightarrow 10$ produciéndose la siguiente sucesión de generaciones: 0, 01, 0110, 01101001, 0110100110010110... Nótese que algunos términos, como el tercer término 0110, son palíndromos (secuencias que se leen igual hacia adelante o hacia atrás).

Podemos generar la secuencia de otra manera: cada generación se obtiene de la anterior añadiéndole su complemento. Por ejemplo, si tenemos 0110 añadimos 1001. También podemos generar la secuencia empezando con los números 0, 1, 2, 3... y escribiéndolos en notación binaria: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111... A continuación, para cada número binario, calculamos la suma de sus dígitos módulo 2, esto es, dividiendo la suma por 2 y quedándonos con el resto. Así, obtenemos la secuencia TM: 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1...

La secuencia es autosemejante. Por ejemplo, eliminando términos alternativos de la secuencia infinita se reproduce la secuencia. Eliminando pares alternativos se reproduce la secuencia. En otras palabras, tome los dos primeros números, elimine los siguientes dos números, y así sucesivamente. Aunque es no periódica, la secuencia es cualquier cosa menos aleatoria. Tiene destacadas estructuras de rango corto y de rango largo. Por ejemplo, nunca hay más de dos términos adyacentes que sean iguales.

VÉASE TAMBIÉN El álgebra de Boole (1854), Las teselas de Penrose (1973), Los fractales (1975) y La sucesión audioactiva (1986).

Trabajo artístico de Mark Dow confeccionado con baldosas cuadradas que contienen un conjunto de espirales simétricas. Los unos y ceros de la secuencia Thue-Morse controlan las dos orientaciones de las baldosas a medida que estas éstas llenan una superficie con forma de tablero de ajedrez.



El teorema del punto fijo de Brouwer

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966)

David Darling se refiere al teorema del punto fijo de Brouwer como «un resultado topológico asombroso y uno de los teoremas matemáticos más útiles que existen». Max Bernan afirma que se trata de un teorema que «me deja sin respiración». Imagine, para visualizar mejor este teorema, que usted tiene dos hojas de papel pautado del mismo tamaño, una sobre la otra. Un compañero de piso travieso le quita una, la estruja hasta formar una bola y la arroja sobre la otra hoja de modo que ninguna parte de la hoja arrugada sobrepase el borde de que está sin arrugar. El teorema afirma que existe al menos un punto de la bola de papel que está exactamente encima de la misma posición de la hoja sin arrugar, es decir, donde estaba al principio. (Damos por supuesto que el compañero de habitación no desgarra el papel.)

Este teorema funciona también en más dimensiones. Imaginemos un bol de limonada. El compañero de piso remueve la bebida. Aunque se muevan todos los puntos del líquido, el teorema de Brouwer insiste en que debe haber algún punto de la limonada que esté en el mismo lugar que antes de removerla.

El teorema afirma, en lenguaje matemático más preciso, que una función continua de una n-bola a una n-bola (n, mayor que cero, es la dimensión) debe tener un punto fijo.

El matemático holandés Luitzen Brouwer lo demostró en 1909 para $n = 3$. Su colega francés Jacques Hadamard demostró el caso general en 1910. Según Martin Davis, Brouwer solía ser combativo, y al final de su vida se aisló «obsesionado por problemas financieros inexistentes y por un miedo paranoico a la bancarrota, a la persecución y a la enfermedad». En 1966 un coche lo atropelló mientras cruzaba la calle. Murió.

VÉASE TAMBIÉN La geometría proyectiva (1639), Los puentes de Königsberg (1736), El teorema de la bola peluda (1912), Hex (1942) y El atractor de Ikeda (1979).

Los papeles arrugados y arrojados al azar ayudan a visualizar el teorema del punto fijo de Luitzen Brouwer «un resultado topológico asombroso y uno de los teoremas matemáticos más útiles que existen».



1909

Números normales

Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956)

La búsqueda de patrones en las cadenas de dígitos de ciertos números (por ejemplo π) parece una tarea matemática interminable. Los matemáticos conjeturan que π es «normal», es decir, que cualquier patrón finito de dígitos se da con la misma frecuencia en π que en una sucesión aleatoria.

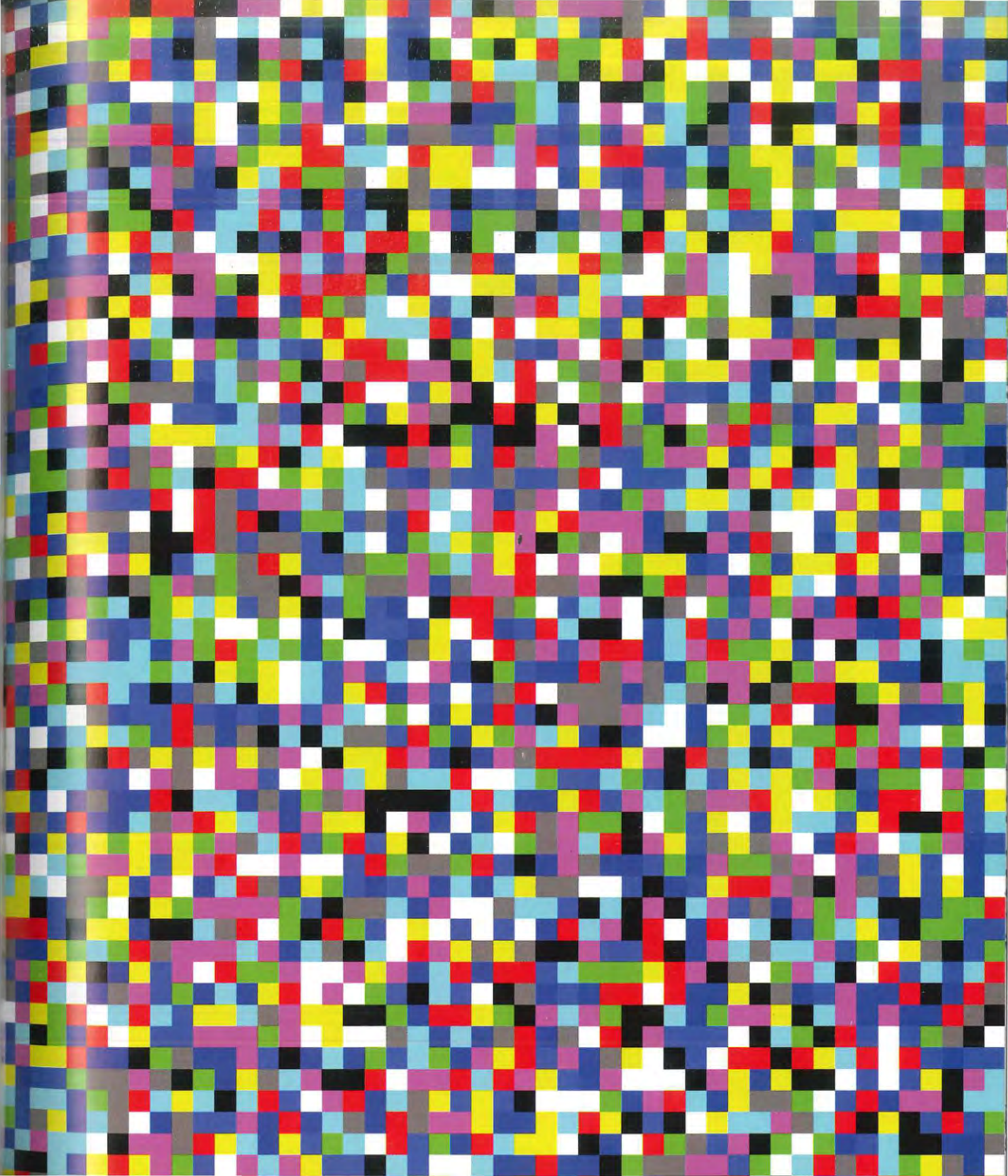
La búsqueda de patrones en π desempeñaba un papel esencial en la novela *Contact*, de Carl Sagan, en la que los alienígenas codificaban la imagen de una circunferencia en los dígitos de π. Las implicaciones teológicas, inquietantes, hacen que el lector se pregunte si es posible que el universo se construyera para enviar mensajes mediante las constantes de la naturaleza. De hecho, si π es un número normal, en algún lugar del interior de sus interminables dígitos existe, casi con toda certeza, una representación acertada de cada uno de nosotros: las coordenadas atómicas de todos nuestros átomos, nuestro código genético, nuestros pensamientos, nuestros recuerdos. ¡Qué felicidad! ¡π nos hace inmortales!

A veces los matemáticos dicen «absolutamente normal» para referirse a una normalidad en cualquier base y «simplemente normal» si el número es normal en una base particular. (Nuestro sistema decimal, por ejemplo, es «base 10» porque se sirve de diez dígitos, desde el 0 hasta el 9.) La normalidad implica que todos los dígitos son igualmente posibles, y lo mismo para todas las parejas de dígitos, y para tres dígitos, y así sucesivamente. El dígito 7, por ejemplo, tendría que aparecer un millón de veces en los diez primeros millones de dígitos de la expansión decimal de π. De hecho, la cifra exacta es 1.000.207, muy cerca del valor esperado.

El matemático y político francés Émile Borel dio a conocer el concepto de número normal en 1909 como forma de caracterizar los dígitos de π, que parecen mostrar las propiedades de una sucesión aleatoria. En 1933 se construyó de forma artificial el **número de Champernowne**, uno de los primeros números normales en base 10. El primer número absolutamente normal se construyó en 1916; su creador fue Wacław Sierpiński. Se cree que los números $\sqrt{2}$, e y $ln(2)$ son normales, pero, como sucede en el caso de π, no se ha demostrado, son sólo conjeturas.

VÉASE TAMBIÉN π (c. 250 a. C.), El número de Euler, e (1727), Los números trascendentes (1844) y El número de Champernowne (1933).

Parte de π, *obra creada a partir de algunos de los interminables dígitos de ese número y en la que cada dígito corresponde a un color. Se cree que el número* π *es «normal» y tiene las características de una sucesión completamente aleatoria.*



1909

Filosofía y diversión del álgebra de Boole

Mary Everest Boole (1832–1916)

Mary Everest Boole, matemática autodidacta, debe su fama a un misterioso libro del año 1909, *Philosophy and Fun of Algebra*. Además, fue la responsable de la edición de *Laws of Thought*, obra monumental de su marido George Boole (1815–1864), el matemático y filósofo británico que inventó el **álgebra de Boole** (la base de la moderna aritmética computacional). Su propio libro *Philosophy and Fun of Algebra* es una ayuda para los historiadores interesados por saber cómo era la educación matemática a comienzos del siglo XX.

Mary trabajó en el Queens College, el primer college femenino de Inglaterra. Vivió en una época en la que las mujeres no podían titularse ni dar clases en la universidad. Su gran vocación era la enseñanza, pero tuvo que aceptar un puesto en la biblioteca, donde daba consejo a los estudiantes. Su perseverancia y entusiasmo por las matemáticas y la educación la han convertido en una heroína para las feministas modernas.

En la parte final de su libro estudia los números imaginarios ($\sqrt{-1}$,por ejemplo), a los que trata con un respeto casi místico: «Uno de los mejores alumnos de Cambridge se puso a pensar en la raíz cuadrada de menos uno como si fuera una realidad; se obsesionó tanto que soñó que él era la raíz cuadrada de menos uno y no podía extraerse a sí mismo; enfermó de tal modo que no pudo asistir al examen». Escribe, además, que «los ángeles y la raíz cuadrada de las cantidades negativas son mensajeros de lo Desconocido, que vienen a contarnos dónde debemos ir a continuación, y el camino más corto para llegar allí, y qué lugares no debemos visitar de momento».

Da la impresión de que llevaba las matemáticas en la sangre. La hija mayor de Mary se casó con Charles Howard Hinton (1853–1907), que también proporcionó interpretaciones místicas de los **hipercubos**, así como herramientas para visualizar la cuarta dimensión. Otra de sus hijas, Alicia, debe su fama a su trabajo con politopos, un término que ella misma acuñó y que hace referencia a la generalización de los polígonos a más dimensiones.

VÉASE TAMBIÉN Los números imaginarios (1572), El álgebra de Boole (1572), El hipercubo (1888) y El doctorado de Kovalevskaya (1874).

Mary Everest Boole, autora de Philosophy and Fun of Algebra, *fue además la esposa del matemático George Boole, el inventor del álgebra de Boole.*



Principia Mathematica

Alfred North Whitehead (1861–1947), **Bertrand Russell** (1872–1970)

Los filósofos y matemáticos británicos Bertrand Russell y Alfred North Whitehead colaboraron durante ocho años en los tres volúmenes de *Principia Mathematica,* casi dos mil páginas publicadas entre 1910 y 1913 que pretendían demostrar que las matemáticas pueden formulares mediante conceptos lógicos como «clase» y «pertenencia a una clase». Los *Principia* pretendían deducir las verdades matemáticas a partir de los axiomas y las reglas de inferencia de la lógica simbólica.

La editorial Modern Library colocó esta obra en el puesto veintitrés de los libros más importantes del siglo XX, en el apartado de no ficción, en una lista que incluía *The Double Helix* de James Watson y *The Varieties of Religious Experience* de William James. Según la Enciclopedia Stanford de Filosofía, «escrita como una defensa del logicismo (la creencia en que las matemáticas son reducibles a la lógica de un modo significativo), se trata de una obra decisiva en el desarrollo y la popularización de la lógica matemática moderna. Fue, además, un empujón para las investigaciones acerca de los cimientos de las matemáticas a lo largo del siglo XX. Sigue siendo, junto al ***Órganon* de Aristóteles,** el libro de lógica más influyente de la historia».

Los *Principia* cumplieron su objetivo de recuperar muchos de los grandes teoremas de las matemáticas, pero ciertos críticos no aceptaron algunas de las presuposiciones del libro, por ejemplo el axioma de infinitud (que afirma que existe un número infinito de objetos), que les pareció una suposición empírica, y no lógica. Por lo tanto, la cuestión de si las matemáticas pueden reducirse a lógica sigue abierta. En cualquier caso, la influencia decisiva de los los *Principia* se debe al énfasis en los vínculos entre el logicismo y la filosofía tradicional, que actuó como catalizador en investigaciones en áreas diversas de la filosofía, las matemáticas, la economía, la lingüística y la computación.

En los *Principia* los autores demuestran, después de unos cuantos cientos de página, que 1 + 1 = 2. Cambridge University Press calculó que la publicación de los *Principia* les haría perder unas seiscientas libras. El libro se publicó después de que los autores accedieran a colaborar con algo de dinero.

VÉASE TAMBIÉN El *Órganon* de Aristóteles (c. 350 a. C.), Los axiomas de Peano (1889), La paradoja del barbero (1901) y El teorema de Gödel (1931).

En el primer volumen de Principia los autores señalan, después de unos cuantos cientos de página, que 1 + 1 = 2. La demostración se completa en el segundo volumen con el siguiente comentario: «La proposición anterior puede resultar útil en alguna ocasión».

$\ast 54\cdot 43.\quad \vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$$\vdash . \ast 54\cdot 26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$$

$$[\ast 51\cdot 231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$$

$$[\ast 13\cdot 12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$$

$$\vdash . (1) . \ast 11\cdot 11\cdot 35 . \supset$$

$$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$$

$$\vdash . (2) . \ast 11\cdot 54 . \ast 52\cdot 1 . \supset \vdash . \text{Prop}$$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that **$1 + 1 = 2$.**

1912

El teorema de la bola peluda

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966)

En 2007 el científico especialista en materiales Francesco Stellacci del Instituto de Tecnología de Massachusetts utilizó el teorema matemático de la bola peluda (TBP) con el fin de conseguir que cadenas de nanopartículas pudieran mantenerse unidas formando largas estructuras. Según una visión muy ilustrativa del teorema, que fue demostrado por primera vez en 1912 por el matemático holandés Luitzen Brouwer, si se cubre una esfera con pelo y se intenta cepillar de forma suave para que se alise, como mínimo siempre quedará algún pelo hacia arriba o un agujero (como, por ejemplo, una calva).

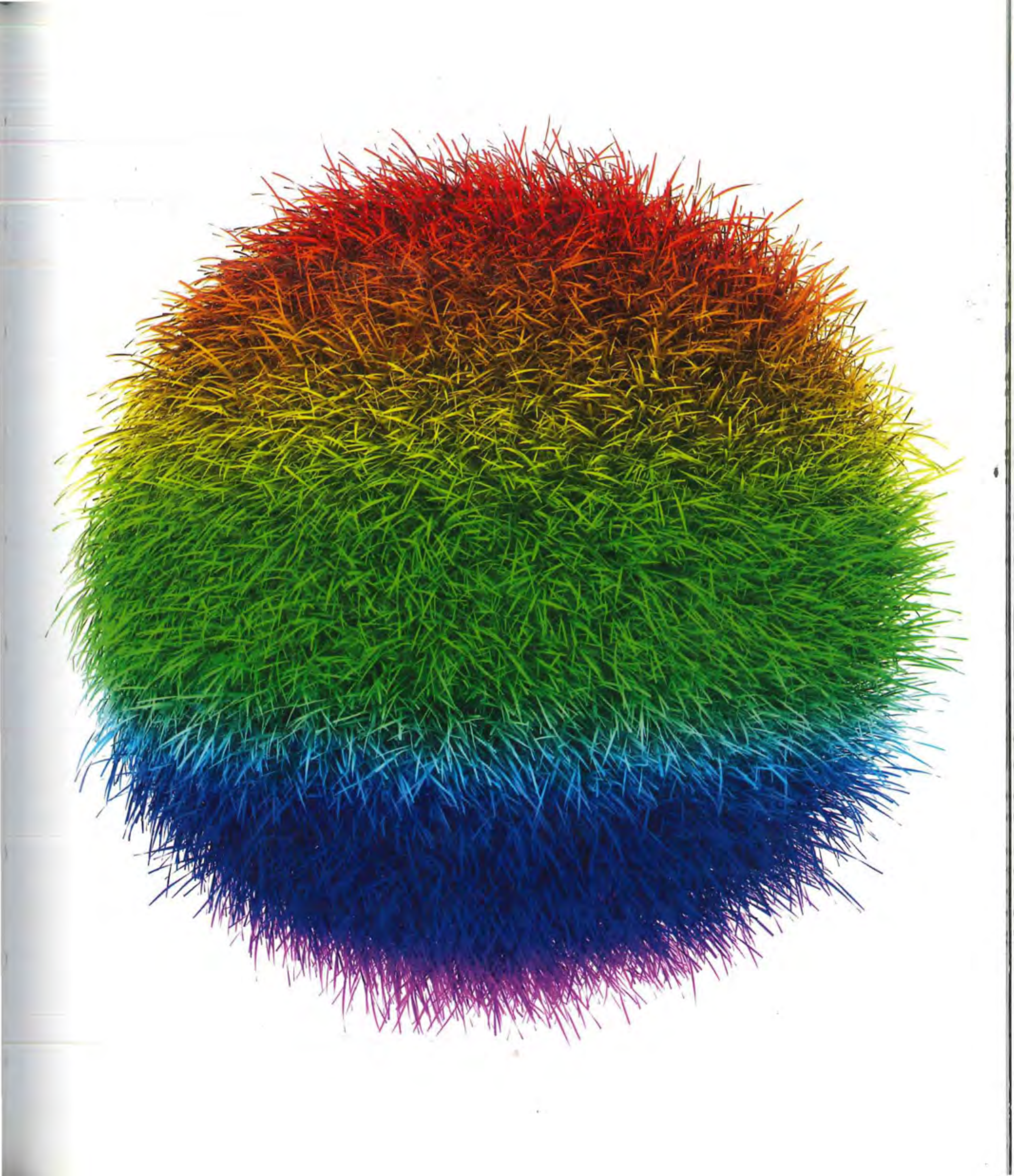
El equipo de Stellacci cubrió nanopartículas de oro con fibras de moléculas sulfurosas. Según el TBP, los filamentos sobresaldrían en una o más zonas, convirtiéndose en irregularidades inestables en la superficie de las partículas. Sería entonces fácil sustituir estos resaltes por sustancias químicas que se comportaran como asideros para que las partículas pudieran unirse unas a otras y quizás, con el tiempo, ser utilizadas para formar nanocables en dispositivos electrónicos.

Mediante el uso de lenguaje matemático, el TBP establece que cualquier campo vectorial tangente continuo en la esfera debe presentar al menos un punto donde el campo vectorial sea cero. Si se toma una función continua f que asigne un vector del espacio tridimensional a cada punto p de una esfera de tal manera que $f(p)$ isiempre sea tangente a la esfera en p, entonces como mínimo existe un p de modo que $f(p) = 0$. En otras palabras, «el cabello de una bola peluda no puede cepillarse y mantenerse liso en todos sus puntos».

Las implicaciones de este teorema son interesantes. Por ejemplo, puesto que el viento puede considerarse un conjunto de vectores con magnitudes y direcciones, el teorema afirma que en algún lugar de la superficie de la Tierra, la velocidad horizontal del viento debe ser cero, independientemente del viento que haga en otra zona. Curiosamente, el teorema de la bola peluda no se cumple en la superficie de un toro (como, por ejemplo, la superficie de una rosquilla) y, de este modo, es teóricamente posible crear una rosquilla de pelo, por otro lado muy poco apetitosa, en el que todos los pelos se mantengan lisos.

VÉASE TAMBIÉN El teorema del punto fijo de Brouwer (1909).

Si se intenta cepillar suavemente el pelo de una esfera peluda para que este se alise, siempre se quedará, como mínimo algún pelo hacia arriba o un agujero (por ejemplo, una calva).



1913

El teorema de los infinitos monos

Félix Édouard Justin Émile Borel (1871–1956)

El teorema de los infinitos monos afirma que es prácticamente seguro que un mono que pulse teclas al azar del teclado de una máquina de escribir durante un periodo de tiempo infinito escriba un texto finito particular, como la Biblia. Tomemos una única frase de la Biblia: «En el principio, Dios creó el cielo y la tierra.» ¿Cuánto tiempo tardaría un mono en escribir esta frase? Asumamos que haya 93 símbolos en un teclado. La frase, escrita en inglés "In the begining, God create the heavens and the Earth" contiene 56 caracteres (teniendo en cuenta los espacios y el punto final). Si la probabilidad de darle a la tecla correcta en la máquina de escribir es de $1/n$, donde n es el número de teclas posibles, la probabilidad de que el mono escriba correctamente 56 caracteres consecutivos en la frase final es $1/93^{56}$, lo que significa que el mono tendrá que intentarlo, de media, más de 10^{100} veces hasta hacerlo bien. Si el mono pulsara una tecla por segundo, podría pasarse tecleando perfectamente la edad actual del universo.

Curiosamente, si tuviéramos que reservar los caracteres que se teclean bien, el mono requeriría muchas menos pulsaciones. El análisis matemático revela que el mono, tras sólo 407 intentos, tendría una probabilidad del 50% de escribir la frase correcta. Esto ilustra de forma rudimentaria cómo la evolución puede dar lugar a unos resultados extraordinarios cuando se utilizan cambios no aleatorios mediante la conservación de características útiles y la eliminación de las que no se adaptan.

El matemático francés Émile Borel habló de los monos «dactilográficos» (los que escriben a máquina) en un artículo de 1913, en el que divagó sobre la posibilidad de que un millón de monos escribiendo a máquina durante 10 horas al día creara libros en una biblioteca. El físico Arthur Eddington escribió en 1928 que: «Si una legión de monos estuviese escribiendo en máquinas de escribir, *podría* escribir todos los libros del Museo Británico. La probabilidad es más favorable que la probabilidad de que las moléculas contenidas en un recipiente ocupasen sólo la mitad del mismo».

VÉASE TAMBIÉN La ley de los grandes números (1713), La *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace (1812), Chi-cuadrado (1900) y El desarrollo de las máquinas de aleatorización (1938).

El teorema de los infinitos monos afirma que es prácticamente seguro que un mono que pulse teclas al azar del teclado de una máquina de escribir durante un periodo infinito de tiempo pueda escribir un texto finito particular, como la Biblia.



1916

La conjetura de Bieberbach

Ludwig Georg Elias Moses Bieberbach (1886–1982), **Louis de Branges de Bourcia** (nacido en 1932)

La conjetura de Bieberbach se asocia con dos personalidades pintorescas: el despiadado matemático nazi Ludwig Bieberbach, que elaboró la conjetura en 1916, y el franco-estadounidense Louis de Branges, un matemático solitario que demostró la conjetura en 1984, a pesar de que, en un principio, algunos matemáticos se mostraron escépticos por el trabajo de Branges debido a que anteriormente había anunciado unos resultados falsos. Karl Sabbagh escribió sobre De Branges: «Puede que no sea un excéntrico, pero es excéntrico. "Las relaciones que mantengo con mis compañeros son desastrosas", me dijo. Y en efecto parece haber dejado una ristra de compañeros descontentos, irritados e incluso desdeñosos a su paso, aunque solo sea por no hacer concesiones a estudiantes y compañeros que no estén familiarizados con el campo en el que trabaja».

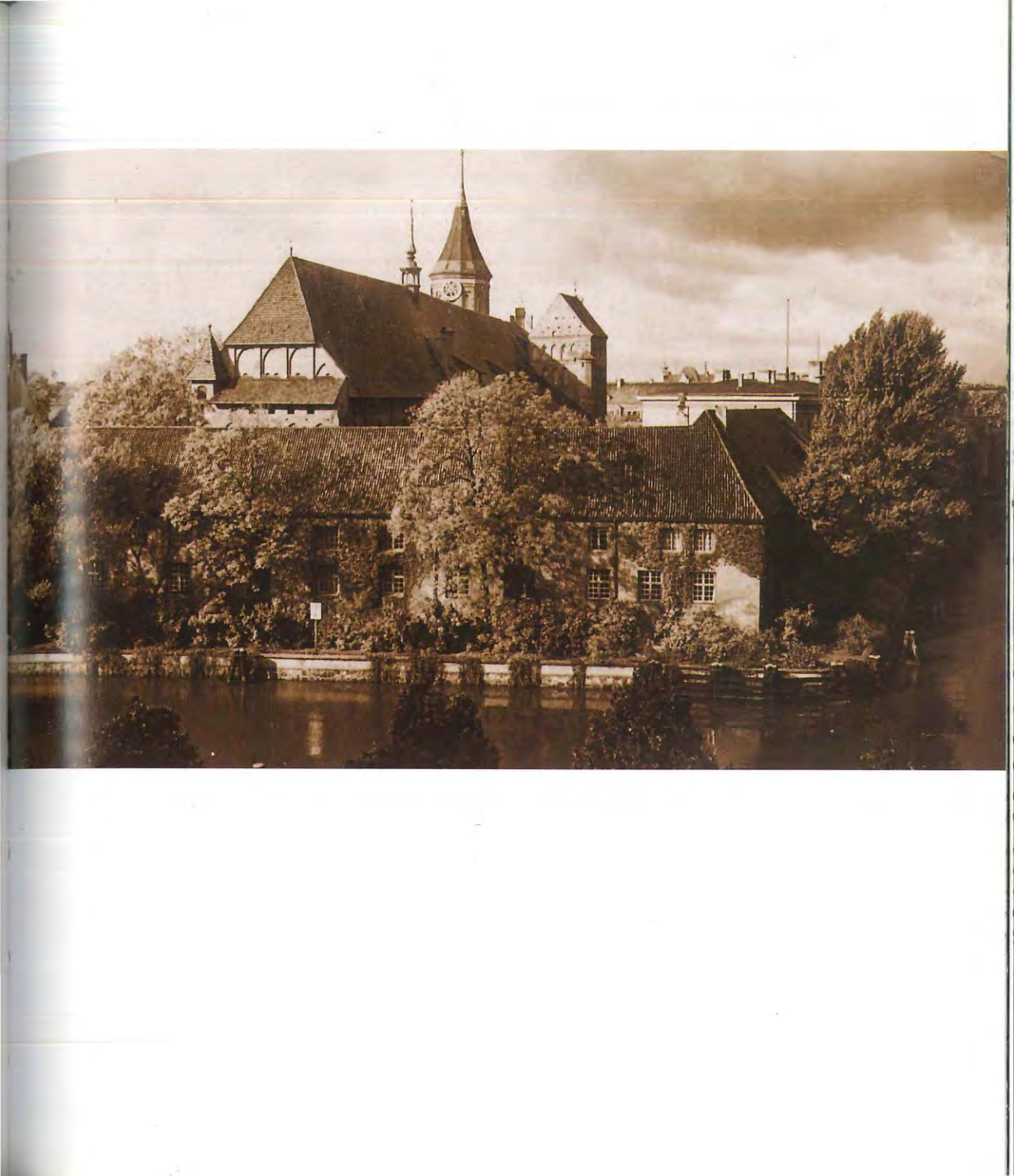
Bieberbach fue un nazi activo que participó en la represión de colegas judíos, incluyendo a los matemáticos alemanes Edmund Landau e Issai Schur. Bieberbach dijo que «los representantes de razas demasiado diferentes no se mezclan, como los estudiantes y profesores... Considero que es sorprendente que los judíos todavía sean miembros de las comisiones académicas».

La conjetura de Bieberbach afirma que si una función ofrece una asociación uno-a-uno entre los puntos del círculo unidad y los de una región del plano simplemente conexa, los coeficientes de la serie de potencias que representa a la función nunca serán más grandes que la potencia correspondiente. En otras palabras, si tenemos $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots$ Si $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$, entonces $|a_n| \leq n$ para cada $n \geq 2$. Una «región simplemente conexa» puede ser bastante complicada, pero no puede contener ningún agujero.

En relación con este enfoque matemático, De Branges afirma: «Mi mente no es muy flexible. Me concentro en una cosa y soy incapaz de mantener una imagen global. [Si omito algo] tengo que ser muy cuidadoso conmigo mismo para no caer en ningún tipo de depresión...». La conjetura de Bieberbach es importante en parte porque supuso un desafío para los matemáticos durante sesenta y ocho años, dando lugar durante ese tiempo a importantes investigaciones.

VÉASE TAMBIÉN La hipótesis de Riemann (1859) y La conjetura de Poincaré (1904).

Bieberbach empezó a trabajar como profesor adjunto en la Universidad de Kaliningrado (la actual Königsberg) en 1910. En la imagen uno de los antiguos edificios de la universidad, destruido en la Segunda Guerra Mundial, con la catedral de la ciudad al fondo.



1916

El teorema de Johnson

Roger Arthur Johnson (1890–1954)

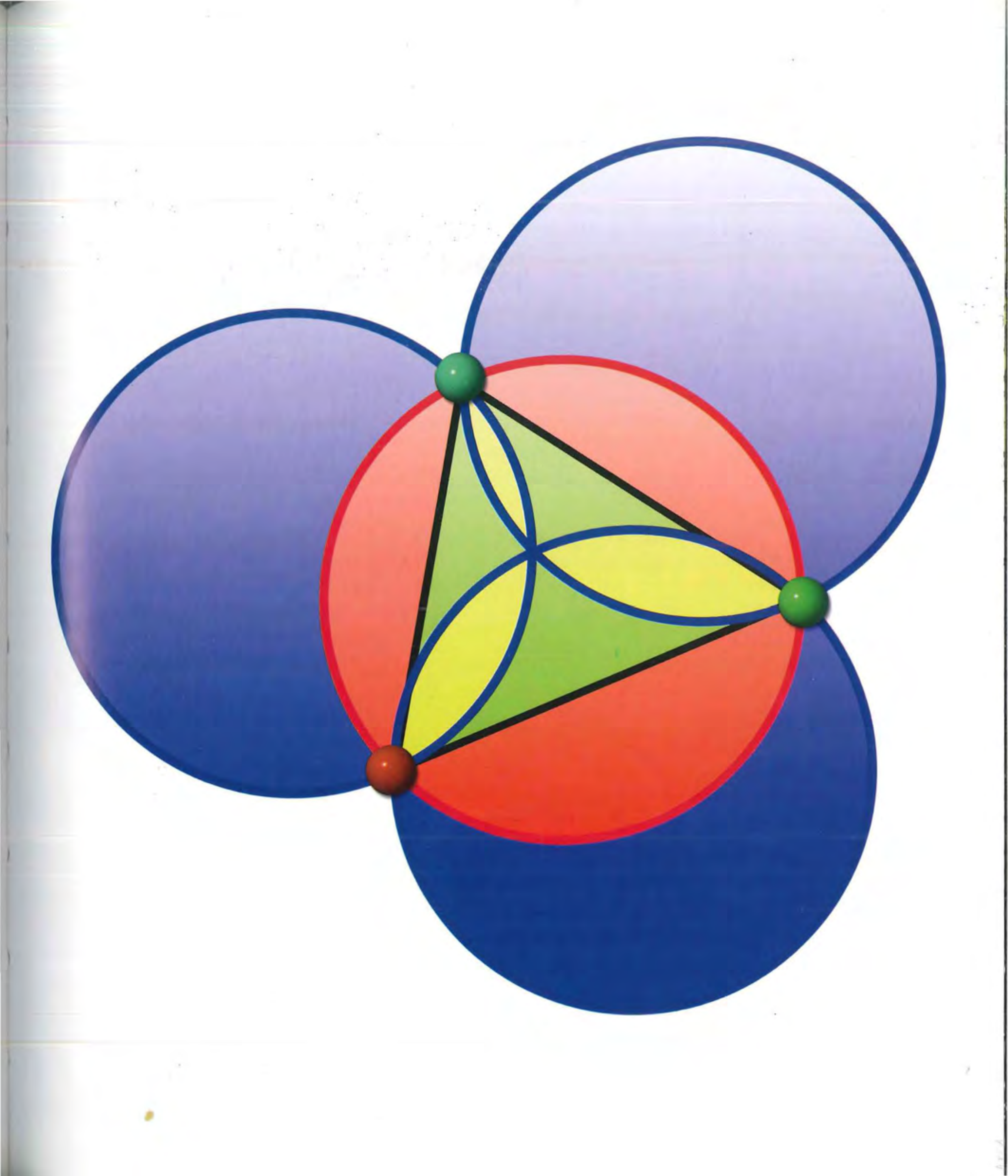
El teorema de Johnson afirma que si tres circunferencias idénticas se cortan en un punto, sus otras tres intersecciones deben situarse en otra circunferencia que sea del mismo tamaño que las tres circunferencias originales. El teorema destaca no solo por su sencillez, sino también porque, por lo que parece, no se «descubrió» hasta 1916, gracias al geómetra estadounidense Roger Johnson. Según David Wells este descubrimiento, relativamente reciente en la historia de las matemáticas, «sugiere una profusión de propiedades geométricas que todavía no han salido a la luz y esperan ser descubiertas».

Johnson es el autor de *Johnson's Modern Geometry: An Elementary Treatise on the Geometry of the Triangle and the Circle*. Obtuvo su doctorado en Harvard en 1913 y de 1947 a 1952 ocupó el puesto de presidente del Departamento de Matemáticas de la delegación de Brooklyn de la Escuela Universitaria Hunter, que más tarde pasó a ser la Escuela Universitaria de Brooklyn.

La idea de que incluso en la actualidad pueden descubrirse matemáticas muy sencillas, aunque profundas, no es tan rocambolesca como podría parecer. Por ejemplo, el matemático Stanislaw Ulam, entre mediados y finales de la década de 1900, parecía rebosar ideas sencillas pero novedosas que inmediatamente dieron lugar a nuevas ramas de las matemáticas, como las que incluyen la teoría de los **autómatas celulares** y el método de Montecarlo. Otro ejemplo de sencillez y profundidad son las **teselas de Penrose**, el patrón de recubrimientos con teselas que Roger Penrose descubrió hacia 1973. Estas teselas pueden cubrir completamente una superficie infinita con un patrón no repetitivo (aperiódico). La teselación aperiódica se consideró en un principio simplemente una curiosidad matemática, aunque posteriormente se descubrieron materiales físicos en los que los átomos se disponían siguiendo el patrón de una teselación de Penrose, por lo que en la actualidad este campo desempeña un importante papel en química y física. También se debería tener en cuenta el complejo y sorprendentemente hermoso comportamiento del **conjunto de Mandelbrot**, un complicado objeto fractal descrito a través de una sencilla fórmula, $z = z^2 + c$, que se descubrió hacia finales del siglo XX.

VÉASE TAMBIÉN Los anillos de Borromeo (834), La aguja de Buffon (1777), La geometría de los *sangaku* (c. 1789), Los autómatas celulares (1952), Las teselas de Penrose (1973), Los fractales (1975) y El conjunto de Mandelbrot (1980).

El teorema de Johnson afirma que si tres circunferencias idénticas se cortan en un punto, sus otras tres intersecciones debe situarse en otra circunferencia que sea del mismo tamaño que las tres circunferencias originales.



1918

La dimensión de Hausdorff

Felix Hausdorff (1868–1942)

El matemático Felix Hausdorff introdujo en 1918 la dimensión de Hausdorff, que puede utilizarse para medir las dimensiones fraccionarias de los conjuntos fractales. En nuestra vida diaria, solemos pensar en las dimensiones topológicas enteras de objetos lisos. Por ejemplo, un plano presenta dos dimensiones, debido a que un punto del plano puede describirse a través de dos parámetros independientes, por ejemplo, distancias medidas en un par de ejes *x* e *y*. Una línea recta tiene una sola dimensión.

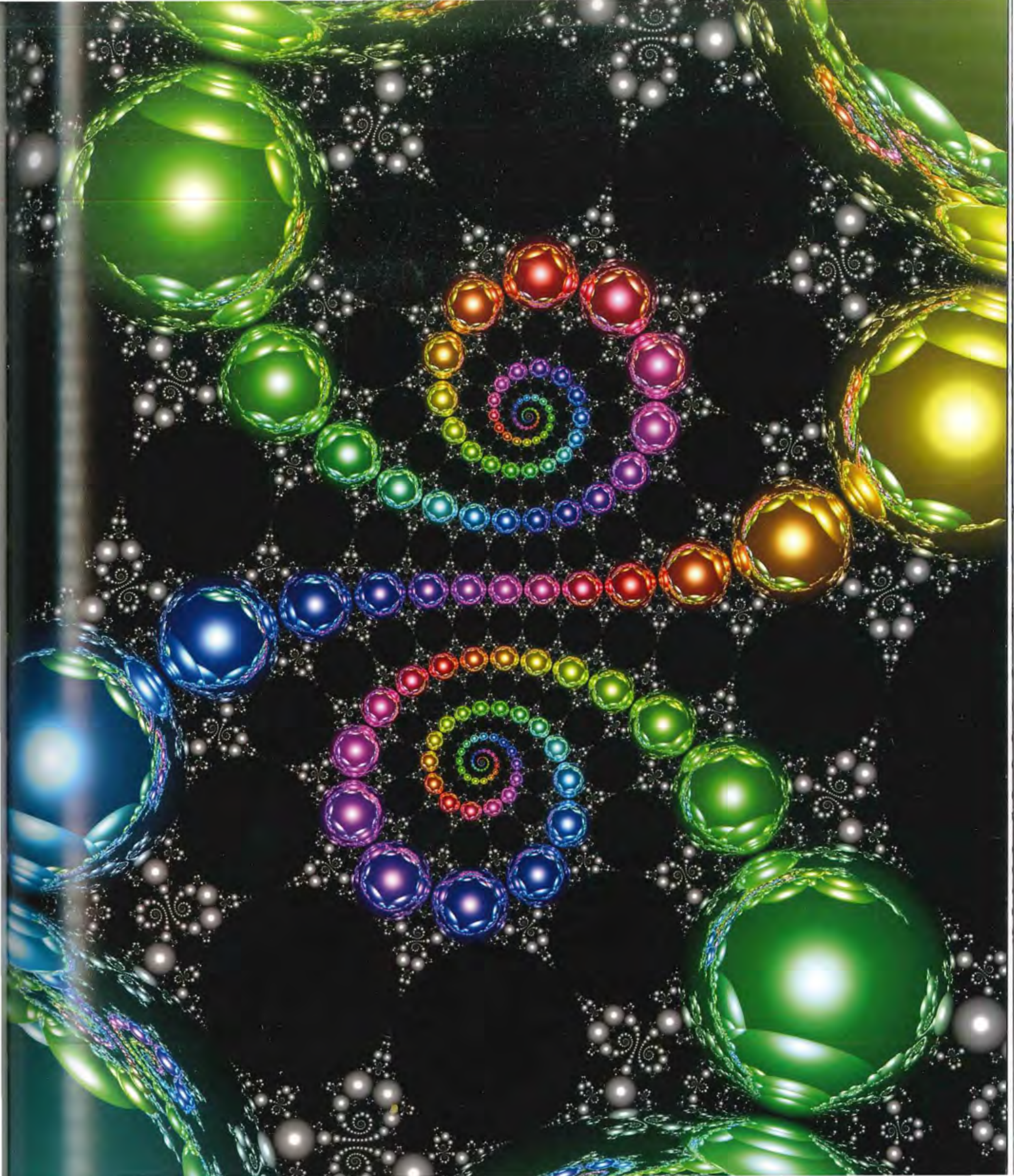
En relación con algunos conjuntos y curvas más complicados, la dimensión de Hausdorff aporta otra forma de definir la dimensión. Imaginemos una línea que describa un patrón zigzagueante y se enrosque de una forma tan complicada que cubra de forma parcial el plano. Su dimensión de Hausdorff va más allá de 1 y adopta valores que se acercan cada vez más a 2 conforme la línea cubre más el plano.

Las curvas que llenan espacios como las **curvas de Peano**, infinitamente complicadas, tienen una dimensión de Hausdorff de 2. Las dimensiones de Hausdorff de las líneas costeras van desde 1,02 en la costa de Sudáfrica, hasta 1,25 en la costa occidental de Gran Bretaña. En realidad, una de las definiciones de fractal es «conjunto en relación con el cual la dimensión de Hausdorff supera la dimensión topológica». La utilidad de las dimensiones fraccionarias para cuantificar la irregularidad, las pautas de crecimiento y la complejidad se ha demostrado en diversas áreas como el arte, la biología y la geología.

Hausdorff, de origen judío, fue profesor de matemáticas en la Universidad de Bonn y uno de los fundadores de la topología moderna, célebre por su trabajo en el análisis funcional y la teoría de conjuntos. En 1942, a punto de ser enviado a un campo de concentración nazi, se suicidó junto a su mujer y su cuñada. El día de antes, Hausdorff escribió a un amigo lo siguiente: «Perdónanos. Te deseamos a ti y a todos nuestros amigos mejores tiempos». Muchos de los enfoques utilizados para calcular la dimensión de Hausdorff en relación con conjuntos complicados fue formulada por otro judío, el matemático ruso Abram Samoilovitch Besicovitch (1891–1970), por eso a veces se utiliza el término de la dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

VÉASE TAMBIÉN La curva de Peano (1890), El copo de nieve de Koch (1904), La paradoja de la línea de costa (c. 1950) y Los fractales (1975).

La dimensión de Hausdorff puede utilizarse para medir las dimensiones fraccionarias de conjuntos fractales, como este complicado diseño fractal de Paul Nylander.



1919

La constante de Brun

Viggo Brun (1885–1978)

Según Martin Gardner: «Ninguna rama de la teoría de números está más saturada de misterio que la del estudio de los números primos: esos exasperantes y rebeldes números enteros que se niegan a dividirse en partes iguales por cualquier número entero salvo por sí mismos y por 1. Algunos de los problemas que plantean son tan sencillos que incluso un niño podría llegar a entenderlos y, al mismo tiempo, son tan profundos y queda tanto para resolverlos que en la actualidad muchos matemáticos sospechan que no tienen solución... Quizás la teoría de números, al igual que la mecánica cuántica, posee su propio principio de incertidumbre que, en relación con algunas áreas, obliga a dejar de lado la exactitud para realizar formulaciones probabilísticas».

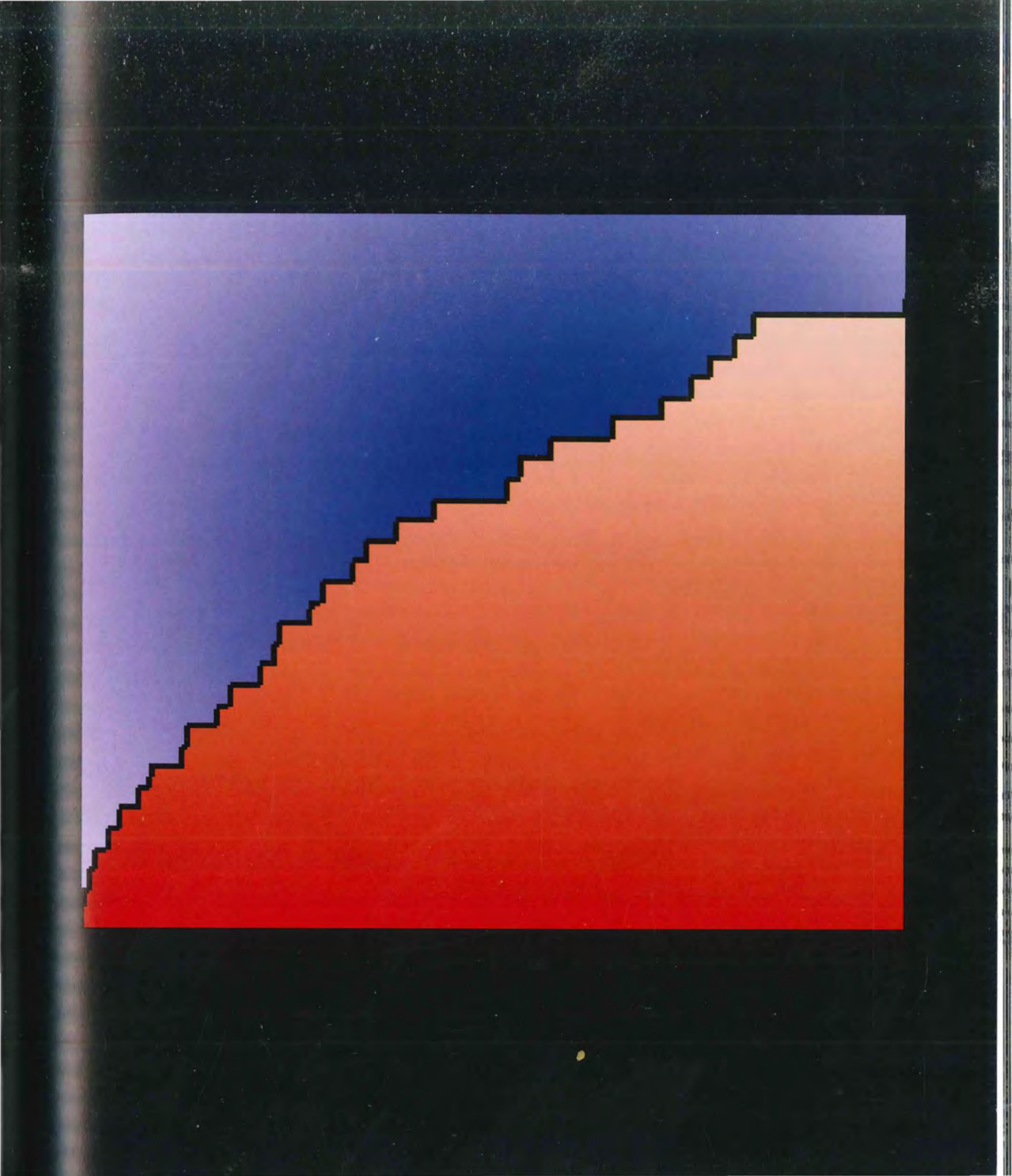
Los primos se presentan a menudo como parejas de enteros impares consecutivos, como 3 y 5. En 2008 los mayores *primos gemelos* conocidos tenían más de 58.000 dígitos cada uno. Aunque pueden existir infinitos números primos gemelos, esta conjetura sigue sin demostrarse. Puede que, debido a que la conjetura de los números primos gemelos es uno de los principales problemas no resueltos, la película *El amor tiene dos caras* presente a un profesor de matemáticas, interpretado por Jeff Bridges, que explica la conjetura a Barbra Streisand.

En 1919 el matemático noruego Viggo Brun demostró que si sumamos juntos los inversos de los primos gemelos sucesivos, la suma converge a un valor numérico concreto, $B = (1/3 + 1/5) + (1/5 + 1/7) + \ldots \approx 1.902160\ldots$, que en la actualidad se denomina constante de Brun. Dado que la suma de los inversos de todos los números primos diverge hacia infinito, resulta fascinante que la suma de números primos gemelos converja, es decir, se acerque, a un valor finito definido. Esto a su vez indica la relativa «rareza» de los primos gemelos, incluso cuando un conjunto infinito de primos gemelos pueda existir. En la actualidad, la búsqueda de números primos gemelos, así como la de un valor cada vez más preciso de B, todavía se realiza en varias universidades. Al margen de la primera pareja, todas las parejas de primos gemelos presentan la siguiente forma $(6n - 1, 6n + 1)$.

Andrew Granville apunta: «Los números primos son los objetos más básicos en matemáticas. También se encuentran entre los más misteriosos, debido a que tras siglos de estudio, la estructura del conjunto de números primos todavía no acaba de entenderse...».

VÉASE TAMBIÉN Números primos generados por cigarras (c. 1 millón a. C.), La criba de Eratóstenes (c. 240 a. C.), La serie armónica diverge (c. 1350), La conjetura de Goldbach (1742), La construcción de un heptadecágono regular (1796), Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801), La demostración del teorema de los números primos (1896), Circunscripción de polígonos (c. 1940), La conjetura de Gilbreath (1958), La espiral de Ulam (1963) y La conjetura de Andrica (1985).

Gráfica del número de primos gemelos menores que x. *El intervalo del eje* x *va de 0 a 800 y la altura de la meseta más a la derecha, en la parte superior de la gráfica, se corresponde con el valor 30.*



1920

El número gúgol

Milton Sirotta (1911–1981), **Edward Kasner** (1878–1955)

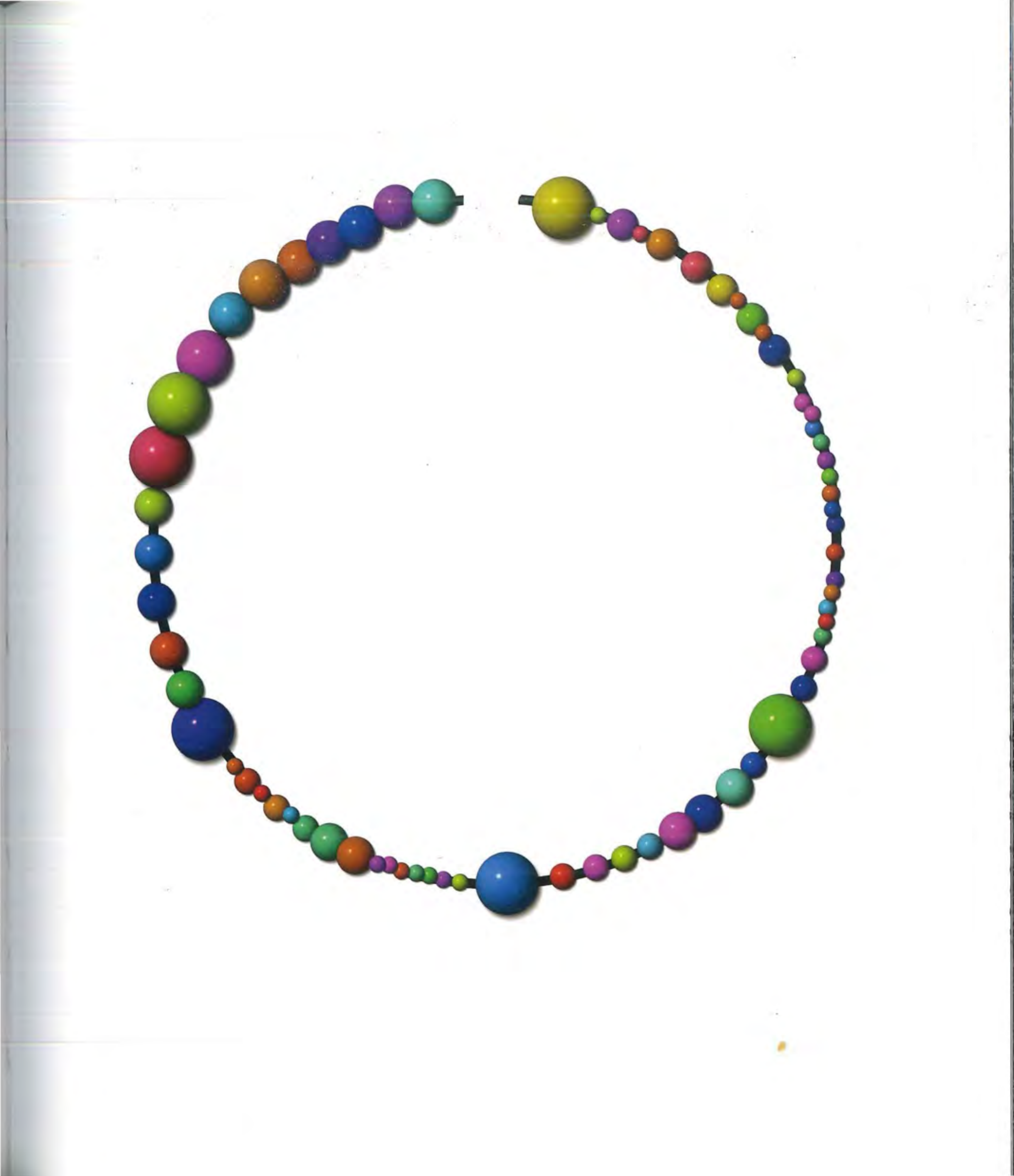
El término «gúgol», que representa al número 1 seguido de 100 ceros, fue acuñado por un niño de nueve años, Milton Sirotta. Milton y su hermano Edwin trabajaron durante la mayor parte de sus vidas en la fábrica de su padre en Brooklyn, Nueva York, pulverizando huesos de albaricoque para crear un producto abrasivo utilizado con fines industriales. Sirotta era sobrino del matemático estadounidense Edward Kasner, que popularizó el término tras pedirle a Milton que se inventara una palabra para un número muy grande. La primera vez que apareció la palabra «gúgol» en publicaciones impresas fue en 1938.

Kasner es célebre por haber sido el primer judío llamado a ocupar un puesto en el cuerpo docente de ciencias de la Universidad de Columbia y por ser el coautor del libro *Mathematics and the Imagination*, en el que introdujo el término gúgol para el público general y profano. Aunque gúgol no tiene una relevancia especial en matemáticas, ha demostrado ser muy útil para comparar grandes cantidades y generar respeto en la mente del público con respecto a las maravillas de las matemáticas y al vasto universo en el que vivimos. También ha cambiado el mundo en otros sentidos. A Larry Page, uno de los fundadores del motor de búsqueda en Internet, Google, le fascinaban las matemáticas y el nombre de su empresa procede de «gúgol», tras pronunciarlo mal de forma involuntaria.

Existen algo más de un gúgol de formas diferentes de disponer 70 elementos en una secuencia, como 70 personas que esperan en fila para acceder a una entrada. La mayoría de los científicos están de acuerdo en que si pudiéramos contar todos los átomos de todas las estrellas que podemos ver, obtendríamos bastante menos de un gúgol de átomos. Se requiere un gúgol de años para que todos los agujeros negros del universo se esfumen. Sin embargo, el número de partidas de ajedrez posibles es superior a un gúgol. El término «gúgolplex» es igual a 1 seguido de un gúgol de ceros. Tiene más *dígitos* que átomos en las estrellas del universo visible.

VÉASE TAMBIÉN Arquímedes: arena, ganado y el *stomachion* (c. 250 a. C.), Los números transfinitos de Cantor (1874), y El hotel infinito de Hilbert (1925).

Existe algo más de un gúgol de formas diferentes de disponer de forma secuencial 70 cuentas, asumiendo que cada cuenta sea diferente y que el collar se deje abierto.



1920

El collar de Antoine

Louis Antoine (1888–1971)

El collar de Antoine es un espléndido objeto matemático que puede describirse como cadenas dentro de cadenas dentro de cadenas... El collar puede construirse partiendo de un toro sólido (o rosquilla). Dentro del toro construimos una cadena C de n componentes (eslabones). A continuación, modificamos cada eslabón de la cadena C de manera que en realidad se forme otra cadena C_1 de n toros sólidos. En cada eslabón de C_1, construimos una cadena más pequeña de toros sólidos incrustados en cada eslabón. El proceso continúa de forma infinita hasta crear el delicado collar de toros con diámetros que van decreciendo hasta llegar a cero.

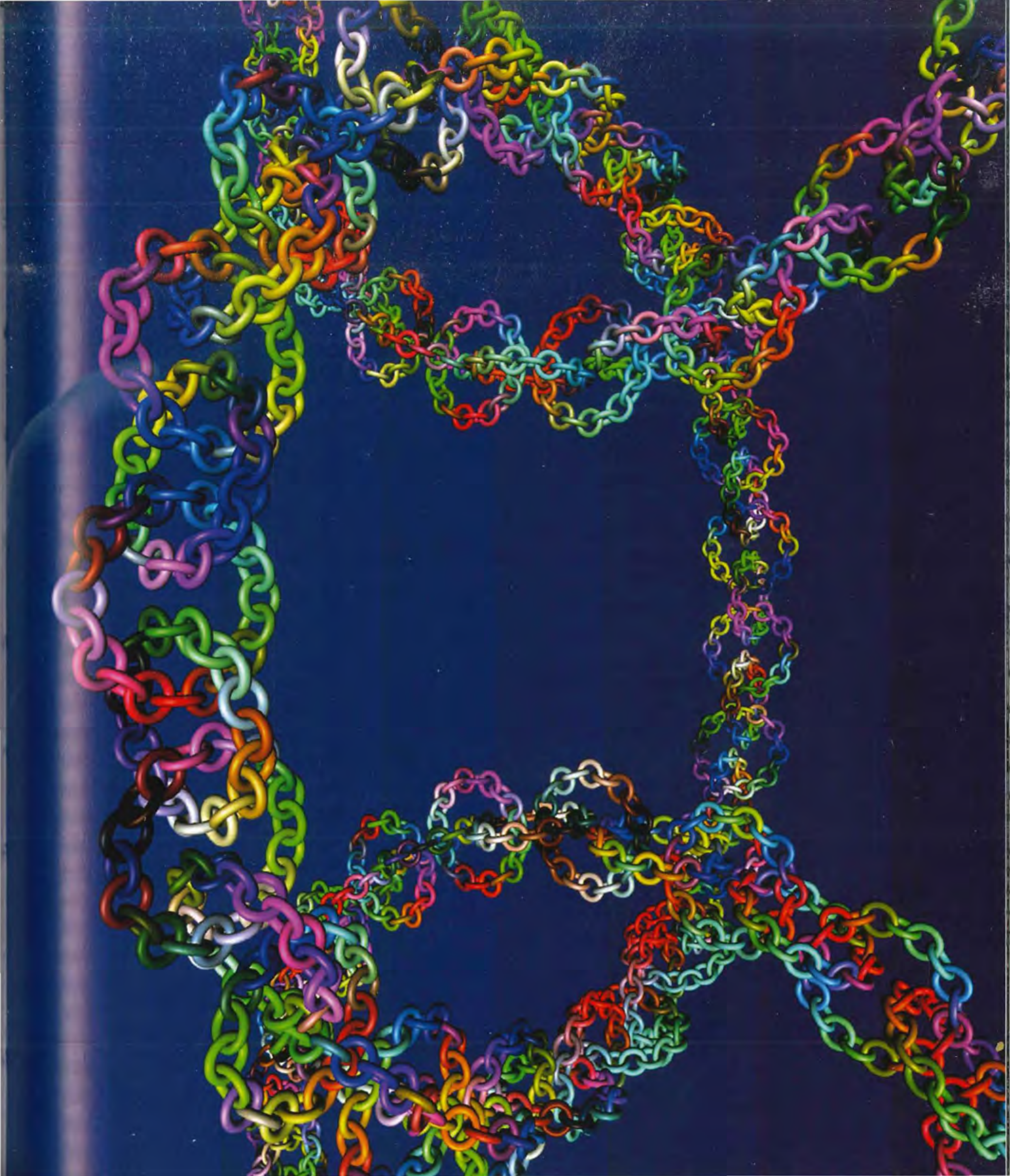
Los matemáticos se refieren al collar de Antoine como homeomorfo al conjunto de Cantor. Dos objetos geométricos se dicen homeomorfos si el primero puede transformarse en el segundo estirándose y doblándose. Por ejemplo, podemos transformar suavemente una rosquilla de arcilla maleable en la forma de una taza de café sin llegar a fragmentar la arcilla ni pegar las partes de nuevo. El agujero de la rosquilla pasa a ser el espacio en el asa de la taza de café. El conjunto de Cantor, presentado por el matemático alemán Georg Cantor en 1883, es un conjunto especial de puntos con infinitos huecos entre estos.

El matemático francés Louis Antoine perdió la vista en la Primera Guerra Mundial, a la edad de 29 años. El matemático Henri Lebesgue aconsejó a Antoine que estudiara la topología bidimensional y tridimensional porque «en dicho estudios, los ojos de la mente y la fuerza de la concentración sustituirán a la visión perdida». El collar de Antoine es notable porque es la primera «inmersión salvaje» de un conjunto en un espacio tridimensional. Con las ideas de Antoine, James Alexander inventó su famosa **esfera cornuda**.

Según escriben Beverly Brechner y John Mayer: «Los toros se utilizan para construir el collar de Antoine, a pesar de que, en realidad, *no hay ningún toro en el collar* de Antoine. Tan solo quedan las "cuentas", las intersecciones de los (infinitos) toros sólidos. El collar de Antoine es totalmente inconexo... ya que, para cada par de puntos diferentes, existe alguna fase de la construcción en la que los dos puntos están en diferentes toros...».

VÉASE TAMBIÉN Los puentes de Königsberg (1736), La esfera cornuda de Alexander (1924), La esponja de Menger (1926) y Los fractales (1975).

Versión del collar de Antoine del científico informático y matemático Robert Scharein. En la siguiente fase de la construcción, cada anillo componente se sustituiría por una cadena unida de anillos. Con un número infinito de fases, el resultado es el collar de Antoine.



1921

La teoría de ideales de Noether

Amalie Emmy Noether (1882–1935)

A pesar de los terribles prejuicios a los que se enfrentaron, algunas mujeres lucharon contra las ideas establecidas y prosperaron en el mundo de las matemáticas. Albert Einstein se refirió a la matemática alemana Emma Noether del siguiente modo: «Es el genio matemático creativo más importante que se ha dado desde que las mujeres comenzaron a cursar estudios superiores».

En 1915, mientras se encontraba en la Universidad de Göttingen (Alemania), el primer avance significativo de Noether en matemáticas se produjo en física teórica. En particular, el teorema de Noether trataba de relaciones simétricas en física y su relación con las leyes de conservación. Este y otros trabajos relacionados fueron de gran ayuda para Einstein cuando desarrolló su teoría general de la relatividad, que se centró en la naturaleza de la gravedad, el espacio y el tiempo.

Tras doctorarse, Noether intentó impartir clases en Göttingen, pero sus detractores dijeron que los hombres no querrían aprender «a los pies de una mujer». Su colega David Hilbert respondió a sus detractores: «No veo por qué el sexo del candidato tiene que obstaculizar su admisión como *privatdozent* [profesor universitario autorizado para ejercer]. Al fin y al cabo, el rectorado de la universidad no son unos baños públicos».

Noether también es conocida por sus contribuciones al álgebra no conmutativa, donde el orden de operación de los elementos afecta a los resultados. Pero es aún más célebre por su estudio de las «condiciones de cadena en ideales de anillos». En 1921 publicó *Idealtheorie in Ringbereichen*, que goza de una importancia primordial en el desarrollo del álgebra abstracta moderna. Esta área de las matemáticas examina las propiedades generales de las operaciones y en general unifica la teoría de números y la lógica con las matemáticas aplicadas. Lamentablemente, en 1933, sus logros matemáticos fueron totalmente rechazados cuando los nazis la expulsaron de la Universidad de Göttingen por ser judía.

Huyó de Alemania y se incorporó al rectorado de la Escuela Universitaria de Bryn Mawr, en Pensilvania. Según la periodista Siobhan Roberts, Noether «hacía viajes semanales para dar clase en el Instituto de Princeton y para visitar a sus amigos Einstein y Herman Weyl». Su influencia fue extraordinaria y muchas de sus ideas aparecieron en trabajos de estudiantes y colegas.

VÉASE TAMBIÉN La muerte de Hipatia (415) y El doctorado de Kovalevskaya (1874).

Amalie Emmy Noether, autora de Idealtheorie in Ringbereichen *(Teoría de ideales en dominios de integridad), que tuvo una gran importancia en el desarrollo del álgebra abstracta moderna. Noether también desarrolló una parte de las matemáticas de la relatividad general, a menudo laboriosamente y sin remuneración.*



1921

Perdido en el hiperespacio

George Pólya (1887–1985)

Imagínese un escarabajo robótico dentro de un tubo retorcido. La criatura mantiene un desplazamiento aleatorio infinito, moviéndose eternamente ya que, de forma aleatoria, da un paso hacia adelante o un paso hacia atrás en el tubo. Si asumimos que el tubo es infinitamente largo, ¿qué probabilidad hay de que el desplazamiento aleatorio haga que el escarabajo vuelva, con el tiempo, a su punto de partida?

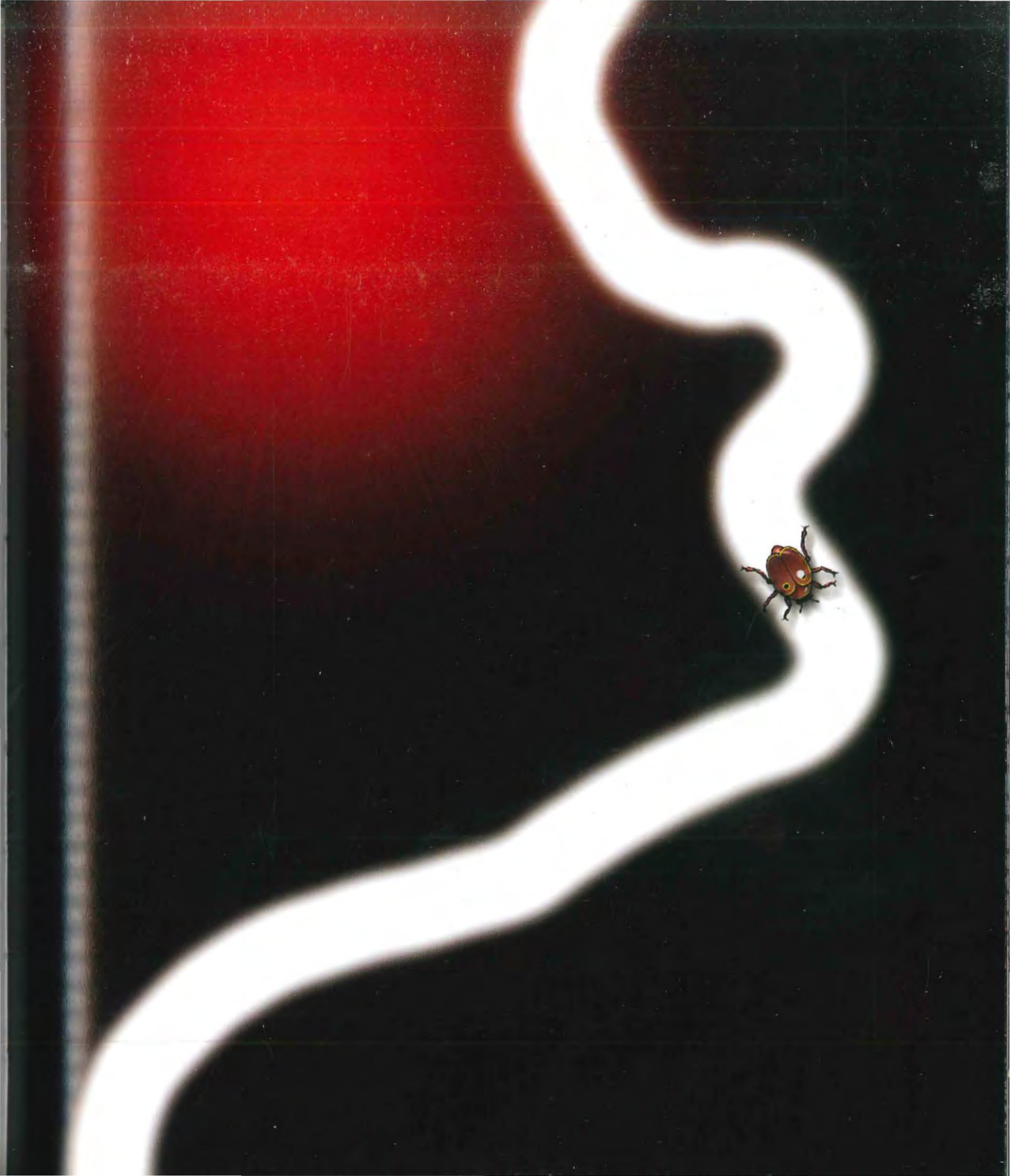
En 1921 el matemático húngaro George Pólya demostró que solo hay una respuesta: la probabilidad infinita de retorno durante un movimiento aleatorio unidimensional. Si el escarabajo se colocara en el origen de un universo bidimensional (un plano) y ejecutara un movimiento aleatorio infinito dando un paso aleatorio hacia el norte, sur, este u oeste, la probabilidad de que el movimiento aleatorio hiciera regresar al escarabajo al punto de partida es también uno.

Pólya también demostró que nuestro mundo tridimensional es especial. El espacio tridimensional es el primer espacio euclídeo en el que el escarabajo puede perderse completamente. El escarabajo, al ejecutar un movimiento aleatorio infinito en un universo tridimensional, regresará de forma eventual al punto de partida con una probabilidad igual a 0,34 (porcentualmente, 34%). En dimensiones superiores, las probabilidades de volver son incluso más escasas, sobre $1/(2n)$ para dimensiones n grandes. Esta probabilidad de $1/(2n)$ es la misma que la probabilidad de que el escarabajo vuelva al punto de partida en su segundo paso. En caso de que no regrese en sus primeros intentos, probablemente se perderá en el espacio para siempre.

Los padres de Pólya eran judíos aunque se convirtieron al catolicismo un año antes de su nacimiento. Nació en Budapest (Hungría) y en los años cuarenta pasó a ser profesor en la Universidad de Stanford. Su libro *How to Solve It* vendió más de un millón de copias. Está considerado por muchos uno de los matemáticos más influyentes del siglo XX.

VÉASE TAMBIÉN Dados (3000 a. C.), La ley de los grandes números (1713), La aguja de Buffon (1777), *La Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace (1812) y La ley de Murphy y los nudos (1988).

Un insecto se desplaza de forma aleatoria, un paso hacia adelante o un paso hacia atrás, en un tubo infinito. ¿Qué probabilidad existe de que, con el tiempo, un desplazamiento aleatorio haga volver al insecto a su punto de partida?



1922

La cúpula geodésica

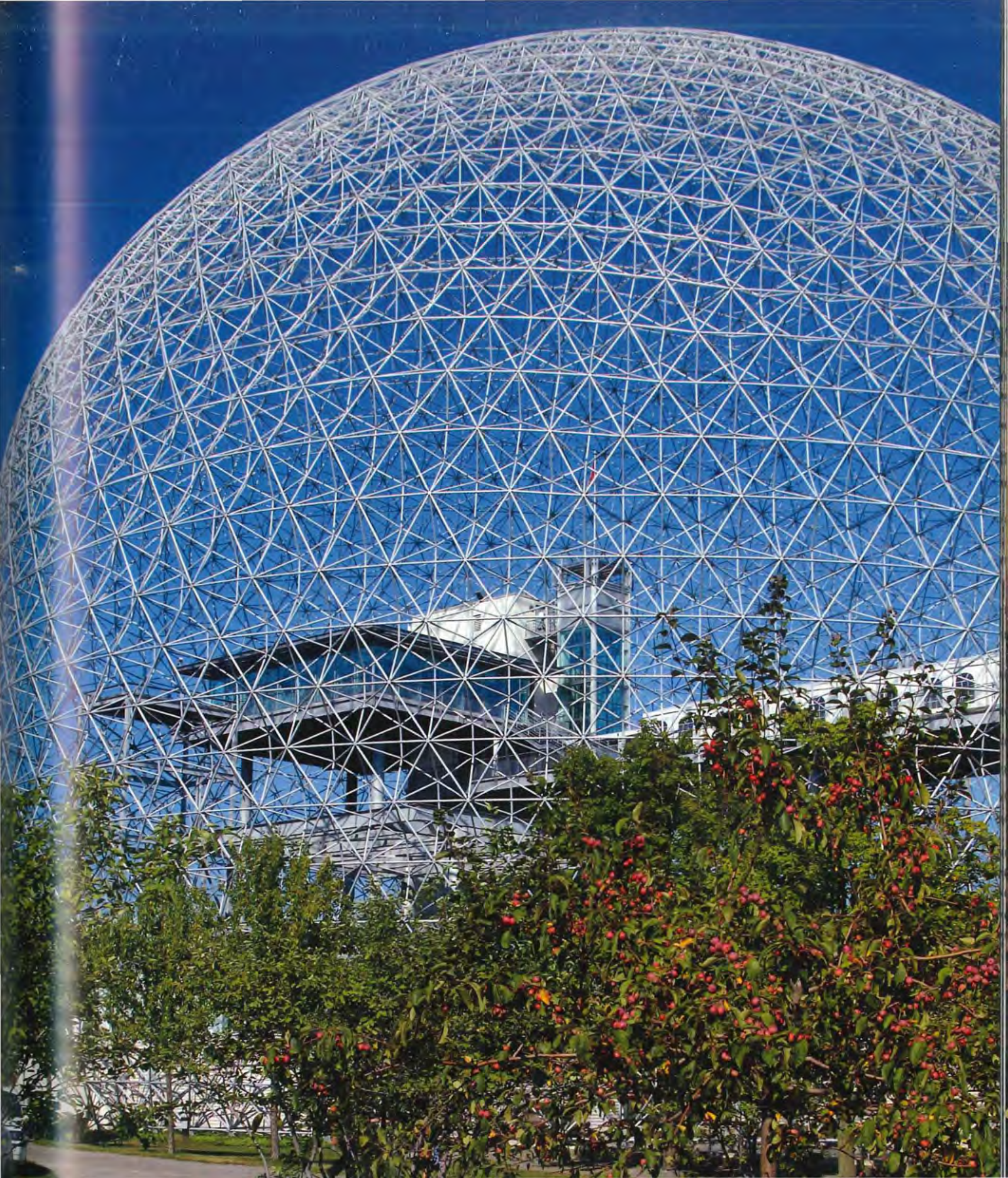
Walther Bauersfeld (1879–1959), **Richard Buckminster «Bucky» Fuller** (1895–1983)

Una cúpula geodésica puede crearse mediante la triangulación de un **sólido platónico** u otro poliedro de manera que posea caras planas triangulares y pueda así aproximarse más a una esfera o semiesfera. Existen varios diseños para este tipo de cúpulas. Como ejemplo, consideremos un dodecaedro regular con sus doce caras pentagonales. Coloquemos un punto en medio de cada pentágono y conectémoslo con cinco líneas hacia los vértices del pentágono. Se alza el punto hasta que toque una esfera imaginaria alrededor del dodecaedro. Habremos creado un nuevo poliedro con sesenta caras triangulares, un sencillo ejemplo de una esfera geodésica. Pueden crearse aproximaciones más cercanas a la esfera dividiendo las caras en más triángulos.

Las caras triangulares distribuyen la tensión por toda la estructura y, en teoría, las cúpulas pueden extenderse hasta alcanzar tamaños extremadamente grandes debido a su resistencia y rigidez. La primera cúpula geodésica fue diseñada por el ingeniero alemán Walther Bauersfeld para un planetario en Jena (Alemania) que se abrió al público en 1922. A finales de los años cuarenta, el arquitecto estadounidense R. Buckminster Fuller inventó la cúpula geodésica y recibió la patente estadounidense por su diseño. El ejército estadounidense quedó tan impresionado con sus estructuras que le encargaron que supervisara el diseño de cúpulas para su uso con fines militares. Aparte de su resistencia, las cúpulas resultaban construcciones atractivas porque albergan un gran volumen con poca superficie, lo que las hacía muy eficientes en cuanto a materiales de construcción y reducían la pérdida de calor. El propio Fuller vivió en una cúpula geodésica durante parte de su vida y se dio cuenta de que su baja resistencia al aire le ayudaría a soportar huracanes. Eterno soñador, Fuller formuló el ambicioso plan de colocar una cúpula geodésica de 3,2 kilómetros de diámetro y 1,6 kilómetros de altura desde su centro, en la ciudad de Nueva York que pudiera regular las condiciones meteorológicas y proteger a los habitantes de la lluvia y la nieve.

VÉASE TAMBIÉN Los sólidos platónicos (c. 350 a. C.), Los poliedros arquimedianos (c. 240 a. C.), La fórmula de Euler para los poliedros (1751), El juego icosiano (1857), El teorema de Pick (1899), El poliedro de Császár (1949), El poliedro de Szilassi (1977), Spidrones (1979) y La solución del holiedro (1999)

El Pabellón de Estados Unidos con su cúpula geodésica, presentado en la Exposición Universal de 1967 («Expo 67») en Montreal, Canadá. La esfera presentaba un diámetro de 76 metros.



1924

La esfera cornuda de Alexander

James Waddell Alexander (1888-1971)

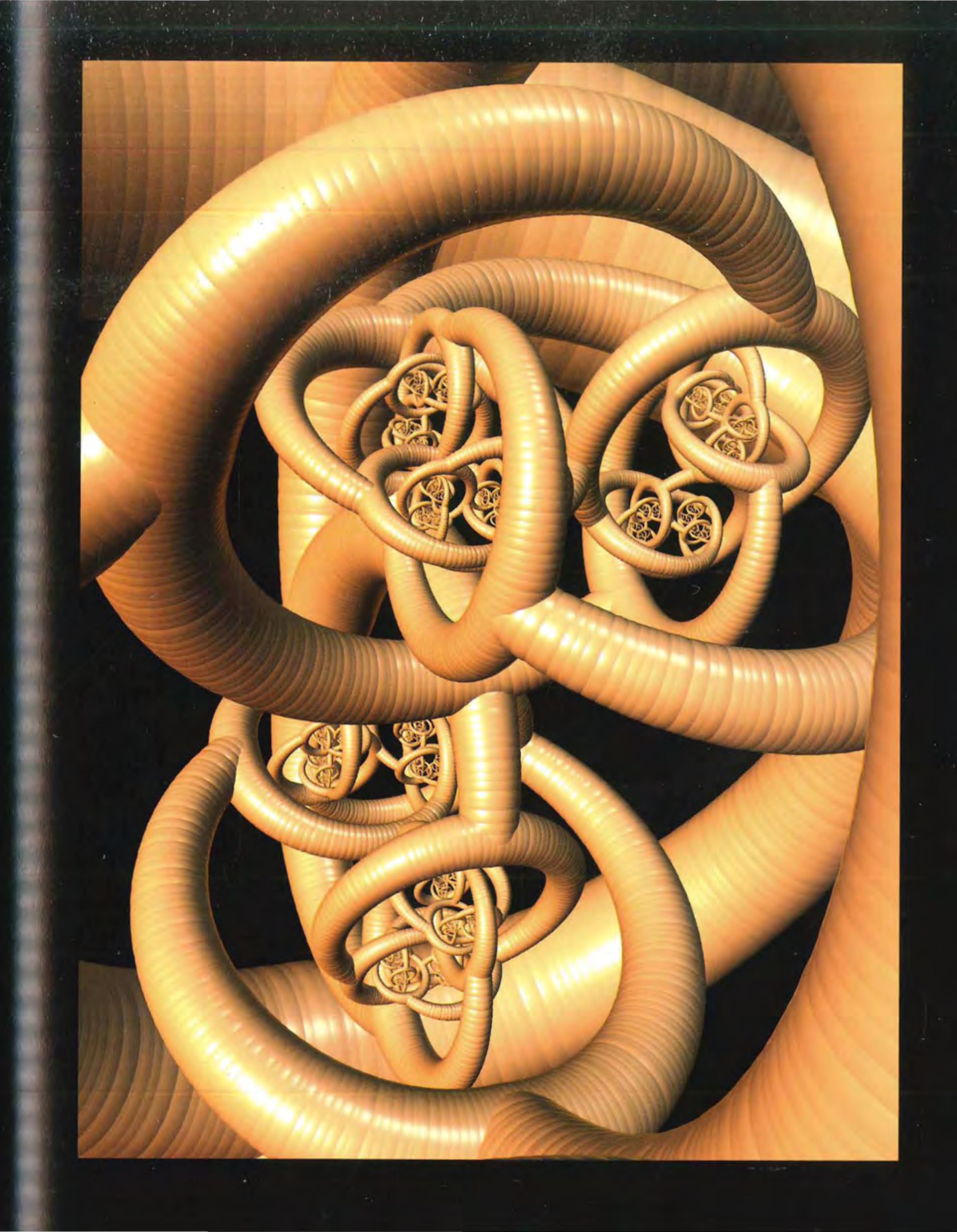
La esfera cornuda de Alexander es un ejemplo de superficie complicada y entrelazada para la cual resulta difícil definir una parte interior y exterior desde un punto de vista visual. Presentada por el matemático James Waddell Alexander en 1924, la esfera cornuda de Alexander está formada por una sucesión de pares de cuernos con puntas muy próximas, que van surgiendo en cada uno de los extremos de los cuernos precedentes y que están prácticamente entrelazados. Los pasos iniciales de la construcción pueden visualizarse con los dedos. Coloque los dedos pulgar e índice de una mano muy próximos uno del otro y luego imagine un pulgar y un índice más pequeños brotando de los extremos de cada uno de los dedos, entrelazándose. Continúe con estos brotes de forma indefinida. El objeto es un fractal, compuesto de pares entrelazados de «dedos» que dibujan círculos ortogonales (perpendiculares) de radios decrecientes.

Aunque su visualización resulta complicada, la esfera cornuda de Alexander (junto con su parte interior) es homeomorfa a una esfera. (Dos objetos geométricos se denominan homeomorfos si el primero puede transformarse en el segundo estirándose y doblándose.) De este modo, la esfera cornuda de Alexander puede deformarse hasta convertirse en una esfera sin pincharse ni romperse. Martin Gardner escribe: «El cuerno entrelazado y en retrogresión infinita forma, llevado al límite, lo que los topólogos denominan una "estructura salvaje"... Aunque es equivalente a la superficie simplemente conexa de una esfera, delimita una región que no es simplemente conexa. Una lazada de cuerda elástica alrededor de la base de uno de los cuernos no puede retirarse de la estructura ni siquiera en un número infinito de pasos».

La esfera cornuda de Alexander es algo más que una curiosidad asombrosa: se trata de una demostración concreta e importante de que el teorema de Jordan-Schönflies no se extiende a dimensiones mayores. Este teorema afirma que las curvas simples cerradas dividen el plano en una región interior delimitada y una región exterior no delimitada y que estas regiones son homeomorfas al interior y al exterior de un círculo, respectivamente. El teorema no es válido en tres dimensiones.

VÉASE TAMBIÉN El teorema de la curva de Jordan (1905), El collar de Antoine (1920) y Los fractales (1975).

Parte de la esfera cornuda de Alexander, según Cameron Browne. Presentada en 1924 por James Waddell Alexander, la esfera cornuda de Alexander es un fractal, compuesto de un número infinito de pares de «dedos» entrelazados.



1924

La paradoja de Banach-Tarski

Stefan Banach (1892–1945), **Alfred Tarski** (1902–1983)

La famosa y aparentemente singular paradoja de Banach-Tarski (BT) fue planteada por primera vez por los matemáticos polacos Stefan Banach y Alfred Tarski en 1924. La paradoja (que actualmente cuenta con una demostración) demuestra que es posible realizar una representación matemática de una bola, dividirla en varias piezas y, a continuación, volver a unir dichas piezas para crear dos copias idénticas de la bola. Además, probó que se puede descomponer una bola del tamaño de un guisante y volver a unir las piezas para componer otra bola del tamaño de la luna. (En 1947 Robinson demostró que cinco es el número mínimo de piezas necesarias.)

Esta paradoja, basada en los primeros trabajos de Felix Hausdorff, muestra que las magnitudes que pueden medirse en nuestro universo físico no siempre se conservan cuando una bola, según la definición de los matemáticos, con un conjunto infinito de puntos, se corta en varias piezas y se vuelve a unir de un modo diferente, utilizando simplemente translaciones y rotaciones. En la paradoja de BT, los subconjuntos no medibles (piezas) que participan son muy complicados e intrincados, sin elementos homólogos en lo relativo a límites y volumen en el mundo físico. La paradoja no se mantiene en dos dimensiones, aunque sí que lo hace en el resto de dimensiones superiores a dos.

La paradoja de BT depende del **axioma de elección** (AE). Debido a que el resultado de la paradoja parece demasiado extraño, algunos matemáticos han sugerido que el AE debe ser erróneo. Por otro lado, la aceptación del AE es tan útil en tantas ramas de las matemáticas que los matemáticos suelen utilizarlo discretamente al realizar sus demostraciones y teoremas.

En 1939 el brillante Banach fue elegido presidente de la Sociedad Polaca de Matemáticas. Sin embargo, unos cuantos años más tarde, en un estudio alemán sobre las enfermedades infecciosas realizado durante la ocupación nazi, Banach fue obligado a alimentar piojos con su propia sangre. Tarski se había convertido al catolicismo porque para un judío hubiera resultado difícil alcanzar un puesto de prestigio en las universidades polacas. Durante la Segunda Guerra Mundial, los nazis asesinaron a casi toda su familia.

VÉASE TAMBIÉN Las paradojas de Zenón (c. 445 a. C.), La paradoja de la rueda de Aristóteles (c. 320 a. C.), La paradoja de San Petersburgo (1738), La paradoja del barbero (1901), El axioma de elección de Zermelo (1904), La dimensión de Hausdorff (1918), El hotel infinito de Hilbert (1925), La paradoja del cumpleaños (1939), La paradoja de la línea de costa (c. 1950), La paradoja de Newcomb (1960) y La paradoja de Parrondo (1999).

La paradoja de Banach-Tarski muestra que es posible realizar una representación matemática de una bola, dividirla en varias piezas y volver a unirlas para componer dos copias idénticas de la misma.



1925

La cuadratura del rectángulo

Zbigniew Moroń (1904–1971)

Uno de los complicados rompecabezas que ha cautivado a los matemáticos durante al menos un siglo está relacionado con la operación de «cuadricular» un rectángulo y un cuadrado, esto último conocido también como una «disección cuadrada perfecta». El problema general es recubrir un rectángulo o un cuadrado utilizando teselas cuadradas, todas ellas de diferente tamaño y expresadas en unidades enteras. Aunque esto pueda parecer fácil e incluso podamos probar con un lápiz y un papel cuadriculado, el caso es que muy pocas disposiciones de teselas funcionan.

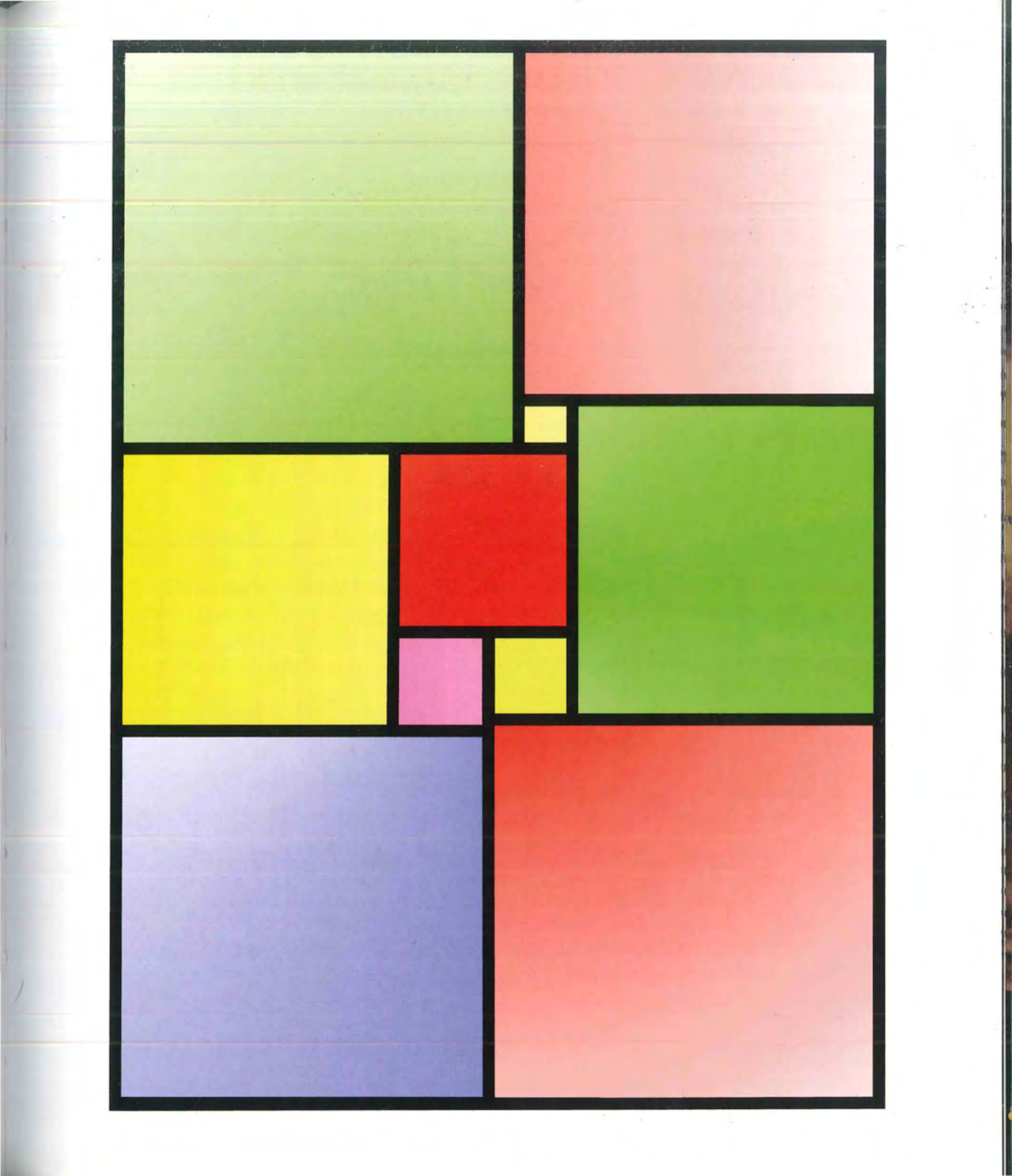
El primer *rectángulo* cuadrado fue descubierto en 1925 por el matemático polaco Zbigniew Moroń. En particular, Moroń descubrió un rectángulo 33 x 32 que puede recubrirse con nueve cuadrados diferentes, de lados 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, y 18. También descubrió un rectángulo 65 x 47 recubierto con 10 teselas cuadradas de lados 3, 5, 6 11, 17, 19, 22, 23, 24 y 25. Durante años, los matemáticos pretendieron que era imposible construir disecciones cuadradas perfectas de cuadrados.

En 1936 cuatro estudiantes de la Escuela Universitaria Trinity (R. L. Brooks, C. A. B. Smith, A. H. Stone y W. T. Tutte) se quedaron fascinados con el tema y, finalmente, en 1940, descubrieron el primer cuadrado cuadriculado, formado por 69 teselas. Con un esfuerzo más, Brooks redujo el número de teselas a 39. En 1962, A. W. J. Duivestijn demostró que cualquier cuadrado cuadriculado debe contener como mínimo 21 teselas, y en 1978, descubrió dicho cuadrado y demostró que era el único.

En 1993 S. J. Chapman encontró una teselación de la cinta de Möbius utilizando simplemente 5 teselas cuadradas. Un cilindro también puede recubrirse con cuadrados de diferentes tamaños, aunque necesitaremos como mínimo 9 teselas.

VÉASE TAMBIÉN Los grupos del papel pintado (1891), Las teselaciones de Voderberg (1936) y Las teselas de Penrose (1973).

El matemático polaco Zbigniew Moroń descubrió este rectángulo 65 x 47, recubierto con 10 teselas cuadradas de lados 3, 5, 6 11, 17, 19, 22, 23, 24 y 25.



1925

El hotel infinito de Hilbert

David Hilbert (1862–1943)

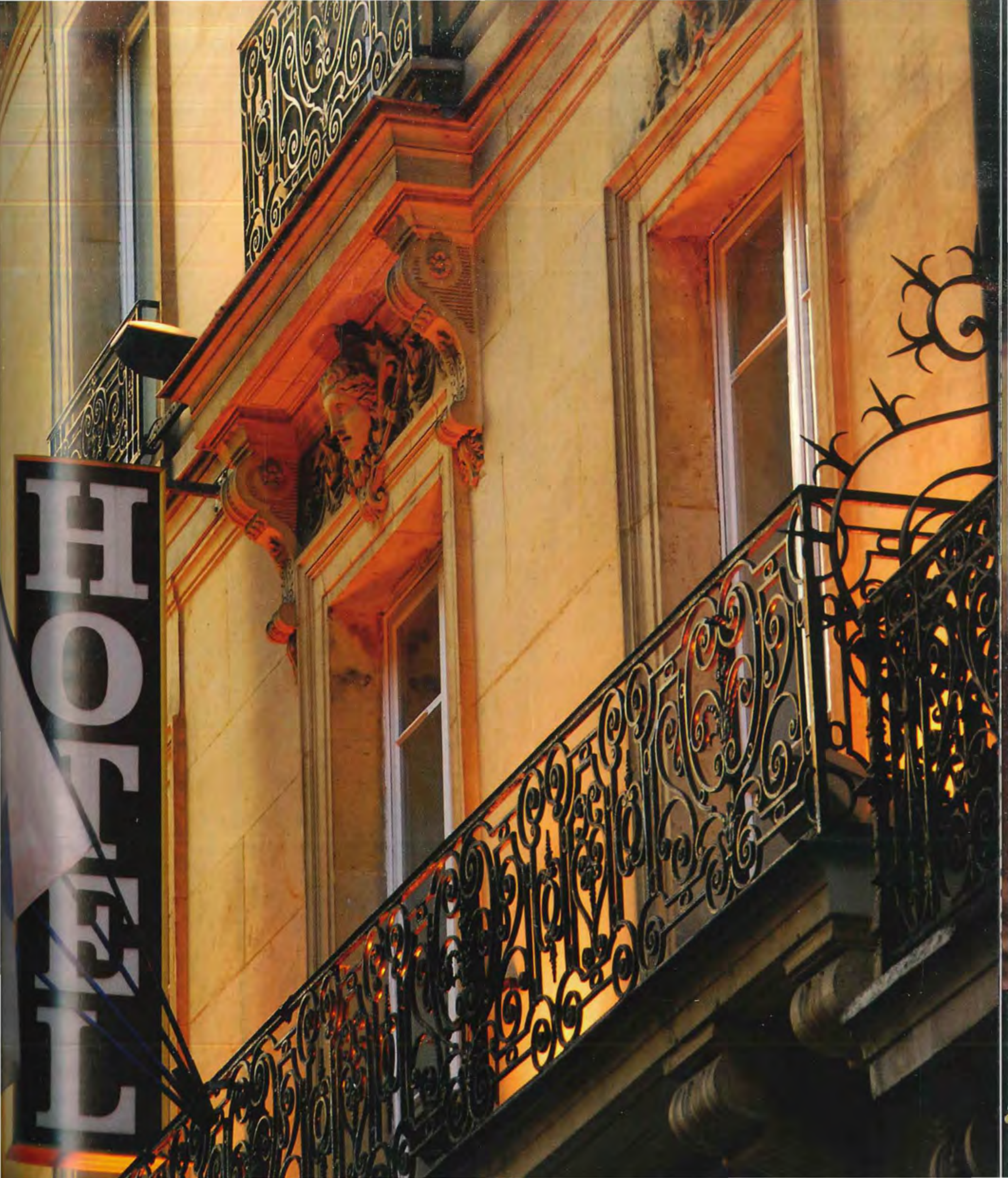
Imagínese un hotel normal y corriente de 500 habitaciones, todas ellas ocupadas por huéspedes. Usted llega por la tarde y le dicen que no quedan habitaciones libres. Se marcha triste. No hay ninguna paradoja en esto. Ahora, imagínese un hotel en el que haya un número infinito de habitaciones, todas ellas ocupadas. Aunque el hotel esté lleno, el recepcionista puede darle una habitación. ¿Cómo es posible? Más tarde, el mismo día, llega una muchedumbre infinita de congresistas y el recepcionista les puede dar habitaciones a todos, amasando una fortuna gracias a ello.

El matemático alemán David Hilbert planteó estas paradojas en la década de 1920 para ilustrar las misteriosas propiedades del infinito. Veamos cómo se consigue una habitación en el hotel infinito de Hilbert. Cuando llega usted solo y el hotel está completo, el recepcionista puede darle una habitación cambiando al huésped que ocupa la habitación 1 a la habitación 2 y, a continuación, llevando al huésped que ocupaba la habitación 2 a la habitación 3, y así sucesivamente. Así, la habitación 1 queda libre para usted. Para alojar a la muchedumbre infinita de congresistas, todos los huéspedes se cambian a habitaciones de número par, llevando al huésped de la habitación 1 a la 2, al huésped de la habitación 2 a la 4, al huésped de la habitación 3 a la 6, y así sucesivamente. El recepcionista puede ahora alojar a los infinitos congresistas en las infinitas habitaciones impares vacías.

La paradoja del hotel infinito de Hilbert puede comprenderse por medio de la teoría de Cantor de los **números transfinitos**. De este modo, mientras que en un hotel normal, el número de habitaciones de número impar es inferior al número total de habitaciones, en un hotel infinito, el «número» de habitaciones de número impar no es inferior al «número» total de habitaciones. (Los matemáticos utilizan el término «cardinalidad» para referirse al tamaño de estos conjuntos de habitaciones.)

VÉASE TAMBIÉN Las paradojas de Zenón (c. 445 a. C.), Los números transfinitos de Cantor (1874), Los axiomas de Peano (1889) y Los veintitrés problemas de Hilbert (1900).

En el hotel infinito de Hilbert, aunque el hotel esté totalmente ocupado, el recepcionista podrá darle una habitación. ¿Cómo es posible?


HOTEL

1926

La esponja de Menger

Karl Menger (1902–1985)

La esponja de Menger es un objeto fractal con un número infinito de «caries», la peor pesadilla para cualquier dentista. El objeto fue descrito por primera vez por el matemático austriaco Karl Menger en 1926. Para construir la esponja, partimos de un «cubo madre» y lo subdividimos en 27 cubos idénticos más pequeños. A continuación, quitamos el cubo del centro y los seis cubos que comparten caras con él. Esto nos deja 20 cubos. Seguimos repitiendo el proceso con el resto de los cubos hasta el infinito. El número de cubos se incrementa en 20^n, donde n es el número de iteraciones realizadas en el cubo madre. La segunda iteración nos da 400 cubos y en el momento en que llegamos a la sexta iteración, tenemos 64.000.000 cubos.

Cada cara de la esponja de Menger se denomina alfombra de Sierpiński. Las antenas fractales obtenidas a partir de la alfombra de Sierpiński suelen utilizarse como eficaces receptores de señales electromagnéticas. Tanto las alfombras como el cubo en su totalidad presentan unas propiedades geométricas fascinantes. Por ejemplo, la esponja tiene una superficie infinita y al mismo tiempo encierra un volumen cero.

Según el Institute for Figuring, con cada repetición, la cara de la alfombra de Sierpiński «se disuelve en una espuma cuya estructura final no presenta ningún tipo de área, aunque sigue presentando un perímetro infinitamente largo. Al igual que el esqueleto de un animal sin carne, la forma final no presenta sustancia, ocupa una superficie plana pero ya no la llena». Este vestigio poroso fluctúa entre una línea y un plano. Mientras que la línea es unidimensional y el plano es bidimensional, la alfombra de Sierpiński cuenta con una dimensión «fraccionaria» de 1,89. La esponja de Menger presenta una dimensión fraccionaria (que técnicamente se denomina «**la dimensión de Hausdorff**») entre un plano y un sólido, de unos 2,73, y se ha utilizado para visualizar ciertos modelos de un espacio-tiempo similar a la espuma. El Dr. Jeannine Mosely ha creado un modelo de esponja de Menger, a partir de más de 65.000 tarjetas comerciales, que pesa aproximadamente 70 kilogramos.

VÉASE TAMBIÉN El triángulo de Pascal (1654), El problema del príncipe Ruperto (1816), La dimensión de Hausdorff (1918), El collar de Antoine (1920), Los círculos de Ford (1938) y Los fractales (1975).

Niño explorando el interior de la esponja de Menger con su infinito número de cavidades. Esta obra de arte realizada por unos apasionados de los fractales, Gayla Chandler y Paul Bourke, utiliza la esponja generada por ordenador de Bourke fusionada con la imagen de un niño.



1927

El analizador diferencial

Vannevar Bush (1890–1974)

Las ecuaciones diferenciales desempeñan un papel fundamental en física, ingeniería, química, economía y en otras muchas disciplinas. Estas ecuaciones relacionan una función de variables independientes y algún tipo de variación de ésta función expresada en forma de derivadas. Tan solo las ecuaciones diferenciales más simples ofrecen soluciones que se expresan por medio de fórmulas compactas y explícitas con un número finito de funciones básicas como senos y **funciones de Bessel**.

En 1927 el ingeniero estadounidense Vannevar Bush y sus compañeros desarrollaron un analizador diferencial (AD), una calculadora analógica con mecanismos de discos y engranajes que podía resolver ecuaciones diferenciales con varias variables independientes usando métodos de integración. El AD se encontraba entre los primeros aparatos de cálculo avanzado que se utilizaron con fines prácticos.

Las versiones anteriores de este tipo de dispositivos se basaban en el trabajo de Lord Kelvin y su **analizador de armónicos** (1876). En Estados Unidos, los investigadores que trabajaban en la base de las fuerzas aéreas Wright-Patterson y la Escuela de Ingeniería Eléctrica Moore en la Universidad de Pensilvania construyeron los dispositivos del AD, en parte para crear tablas de tiro de artillería antes de la invención de **ENIAC** (Calculador e Integrador Numérico Electrónico).

A lo largo de los años, la AD ha tenido muchas aplicaciones que van desde los estudios de la erosión de los suelos y la construcción de proyectos para diques hasta el diseño de bombas utilizadas para destruir los diques alemanes durante la Segunda Guerra Mundial. Estos dispositivos han aparecido en películas de ciencia ficción como el clásico de 1956 *La Tierra contra los platillos volantes*.

En su trabajo de 1945, *As We May Think*, Bush describió su visión del Memex, una máquina futurista que mejoraría la memoria humana permitiendo a los humanos almacenar y recuperar información vinculada mediante asociaciones de una manera similar al actual hipertexto de una página web. Según Bush: «El **ábaco** dista mucho de la máquina calculadora de hoy en día. Lo mismo ocurrirá con la máquina aritmética del futuro [...] Se debe garantizar la ayuda con la manipulación meticulosa y cuidadosa de matemáticas de alto nivel [...] El espíritu del hombre debe encumbrarse [...]».

VÉASE TAMBIÉN El ábaco (c. 1200), Las funciones de Bessel (1817), El armonógrafo (1857), El analizador de armónicos (1876), ENIAC (1946), La calculadora Curta (1948) y El atractor de Ikeda (1979).

Un analizador diferencial en el Laboratorio de propulsión de vuelos Lewis en 1951. El analizador se encontraba entre los primeros dispositivos informáticos avanzados que se utilizaron con fines prácticos, como el diseño de bombas utilizadas para destruir diques alemanes durante la Segunda Guerra Mundial.



1928

La teoría de Ramsey

Frank Plumpton Ramsey (1903–1930)

La teoría de Ramsey tiene que ver con encontrar orden y patrones en sistemas. Según el escritor Paul Hoffman: «La idea que subyace a la teoría de Ramsey es que el caos completo no es posible [...] Cualquier "objeto" matemático puede encontrarse si se busca en un universo lo suficientemente amplio. Los teóricos de Ramsey pretenden conocer el universo más pequeño que garantice la inclusión de un objeto determinado».

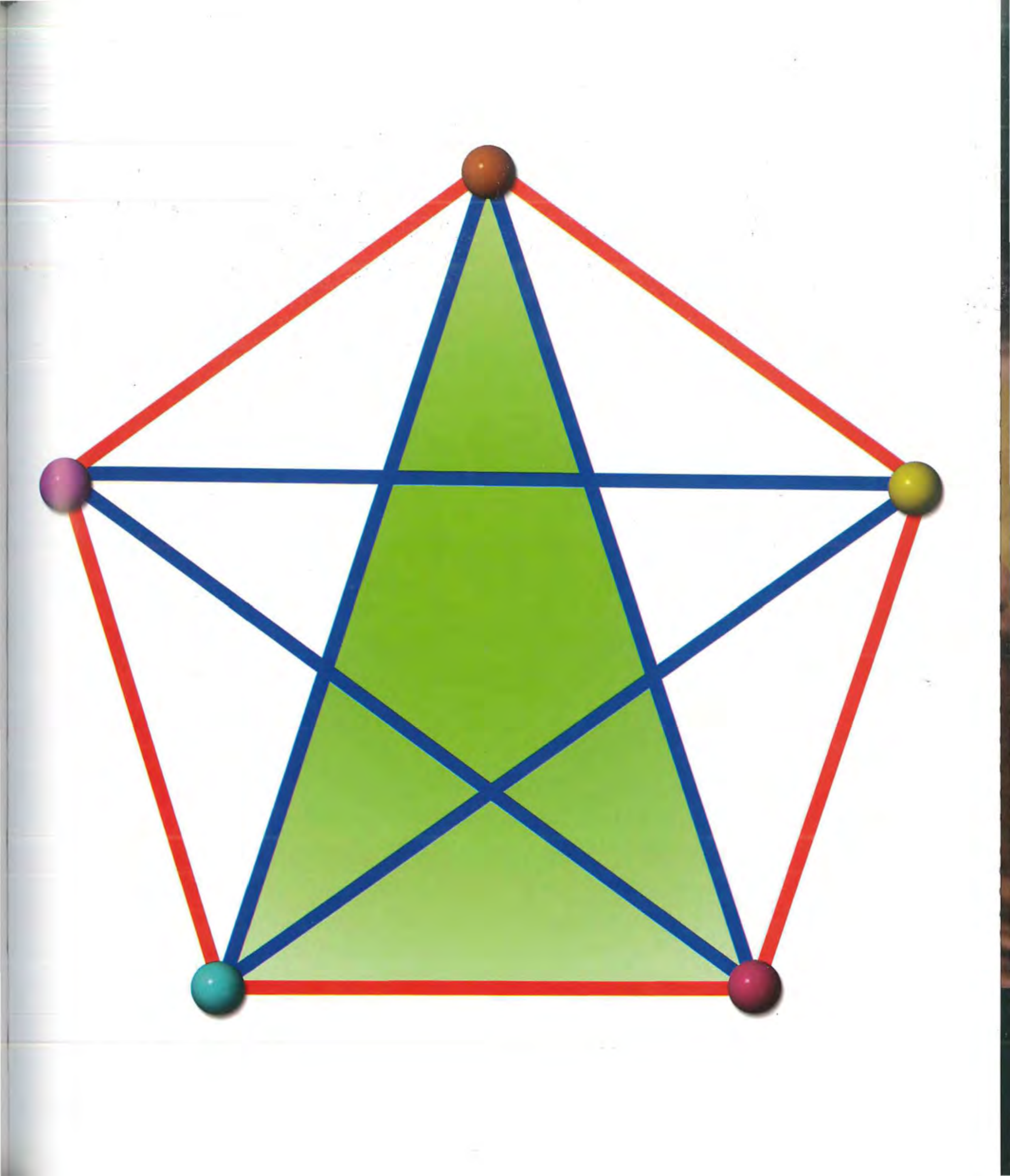
La teoría de Ramsey debe su nombre al matemático inglés Frank Ramsey. Comenzó en esta rama de las matemáticas en 1928 mientras indagaba sobre un problema de lógica. Como sugirió Hoffman, los teóricos de Ramsey suelen buscar el número de elementos de un sistema que son necesarios para que una propiedad particular se cumpla. Salvo algún trabajo de Paul Erdös, hasta finales de los 1950 la investigación relativa a la teoría de Ramsey no empezó a registrar avances rápidos.

Un ejemplo de la aplicación más sencilla de la misma está relacionado con el **principio del palomar,** que establece que si contamos con m nidos y n palomas, podemos estar seguros de que como mínimo un nido alberga más de una paloma si $n>m$. Un ejemplo más complicado sería el considerar una dispersión de n puntos en un papel. Cada punto está conectado a cualquier otro punto con una línea recta roja o azul. El teorema de Ramsey (que es simplemente un resultado subyacente en combinatoria y en la teoría de Ramsey) muestra que n debe ser 6 para garantizar la aparición en el papel de un triángulo azul o de un triángulo rojo.

Otro modo de pensar en la teoría de Ramsey incluye el denominado teorema de la amistad. Por ejemplo, ¿cuál es el número mínimo de asistentes a una fiesta que garantiza que haya al menos tres personas mutuamente extrañas (dos a dos) o al menos tres personas mutuamente conocidas (dos a dos)? La respuesta es 6. La determinación del número necesario de asistentes a una fiesta para garantizar la presencia de un mínimo de 4 conocidos mutuamente o 4 desconocidos mutuamente es mucho más difícil, y puede que las soluciones para agrupaciones superiores nunca se sepan.

VÉASE TAMBIÉN Arquímedes: arena, ganado y el *stomachion* (c. 250 a. C.), El problema de la división del polígono de Euler (1751), El problema de los treinta y seis oficiales (1779), El principio del palomar de Dirichlet (1834), La paradoja del cumpleaños (1939) y El poliedro de Császár (1949).

Cinco puntos conectados unos con otros con líneas rectas rojas o azules. En esta representación, no existen triángulos totalmente rojos ni azules con vértices en los puntos. Se necesitan seis puntos para garantizar que se forma un triángulo azul o uno rojo.



1931

El teorema de Gödel

Kurt Gödel (1906–1978)

El matemático austriaco Kurt Gödel fue un eminente matemático y uno de los lógicos más brillantes del siglo XX. Las implicaciones de su teorema de incompletitud son amplias, ya que se aplica no solamente a las matemáticas, sino también a áreas como la informática, la economía y la física. Cuando Gödel estaba en la Universidad de Princeton, Albert Einstein fue uno de sus amigos más íntimos.

El teorema de Gödel, publicado en 1931, tuvo un efecto demoledor entre lógicos y filósofos porque implica que en un sistema matemático rigurosamente lógico existen propuestas o cuestiones que no pueden probarse ni refutarse a partir de los axiomas básicos de dicho sistema. Por tanto, axiomas básicos como los de la aritmética pueden dar lugar a contradicciones. Esto deja a las matemáticas esencialmente «incompletas». Aun hoy, surgen y se debaten continuamente repercusiones de este hecho. Además, el teorema de Gödel puso punto y final a siglos de intentos de establecer axiomas que dotaran de una base rigurosa a todas las matemáticas.

Hao Wang escribió sobre esta cuestión en su libro *Reflections on Kurt Gödel*: «El impacto de las ideas científicas y las especulaciones filosóficas de Gödel ha ido aumentado y puede seguir haciéndolo del mismo modo el valor de sus posibles implicaciones. Pueden pasar cientos de años hasta que aparezcan confirmaciones o refutaciones más precisas sobre algunas de sus conjeturas principales». Douglas Hofstadter apunta que un segundo teorema de Gödel también sugiere la limitación inherente de los sistemas matemáticos e «implica que las únicas versiones de la teoría formal de números que declaran su propia consistencia son inconsistentes».

En 1970 una demostración matemática de la existencia de Dios hecha por Gödel empezó a circular entre sus colegas. La demostración no llegaba a una extensión superior a una página y causó un gran revuelo. Al final de su vida, Gödel padeció paranoia y pensaba que estaban intentando envenenarle. Dejó de comer y murió en 1978. A lo largo de su vida también sufrió crisis nerviosas e hipocondría.

VÉASE TAMBIÉN El *Órganon* de Aristóteles (c. 350 a. C.), El álgebra de Boole (1854), Los diagramas de Venn (1880), *Principia Mathematica* (1910–1913) y La lógica difusa (1965).

Albert Einstein y Kurt Gödel. Fotografía de Oskar Morgenstern, Archivos del Instituto de Estudios Avanzados, Princeton, 1950.





El número de Champernowne

David Gawen Champernowne (1912-2000)

Si uniésemos o concatenásemos los números enteros positivos (1, 2, 3, 4...) con un punto decimal por delante, obtendríamos el número de Champernowne: 0,1234567891011121314... Al igual que π, y e, el número de Champernowne es **transcendente**; a saber, no es raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros. También sabemos que este número es «**normal**» en base 10, lo que significa que cualquier patrón finito de números se produce con la frecuencia prevista para una secuencia totalmente aleatoria. David Champernowne demostró que este número es normal comprobando que no solo los dígitos del 0 al 9 se producen exactamente con una frecuencia porcentual que tiende a 10, sino que cada posible bloque de dos dígitos se producirá con una frecuencia porcentual que tiende a 1, cada bloque de tres dígitos con una frecuencia porcentual de 0,1, y así sucesivamente.

Los criptógrafos han destacado que el número de Champernowne no responde a algunos de los indicadores estadísticos de ausencia de aleatoriedad más sencillos y tradicionales. En otras palabras, los programas informáticos sencillos que intentan encontrar regularidad en secuencias, quizás no «vean» la regularidad en el número de Champernowne. Este déficit refuerza la idea de que los estadísticos deben mostrarse muy cautos al afirmar que una secuencia es aleatoria o que no tiene patrón.

El número de Champernowne es el primer ejemplo elaborado de un número normal. David Champernowne lo obtuvo en 1933 cuando todavía era estudiante en la Universidad de Cambridge. En 1937 el matemático alemán Kurt Mahler demostró que la constante de Champernowne es trascendente. En la actualidad, sabemos que la constante binaria de Champernowne, obtenida de la concatenación de las representaciones binarias (0 y 1) de los números naturales es normal en base 2.

Hans von Baeyer indica que mediante la traducción de los 0 y los 1 al código Morse, «todas y cada una de las secuencias finitas de palabras que se puedan imaginar están ocultas en algún sitio de la tediosa jerigonza encadenada, [...] todas las cartas de amor y todas las novelas que jamás se hayan escrito [...] Se tendría que viajar durante miles de millones de años luz para poder encontrarlas, pero se encuentran ahí, en algún sitio [...]».

VÉASE TAMBIÉN Los números trascendentes (1844) y Números normales (1909).

Los primeros 100.000 dígitos binarios del número de Champernowne en binario, tomados del trabajo de Adrian Belshaw y Peter Borwein. Los 0 de la secuencia se han cambiado por -1, y así los pares de dígitos (±1, ±1) se utilizan para desplazarse (±1, ±1) en el plano. El intervalo del eje x del gráfico es (0, 8.400).



1935

Bourbaki: una sociedad secreta

Henri Cartan (b. 1904), **Claude Chevalley** (1909–1984), **Szolem Mandelbrojt** (1899–1983), **André Weil** (1906–1998), **y otros**

El historiador de ciencias Amir Aczel escribió una vez que Nicolas Bourbaki fue «el mejor matemático del siglo XX» que «cambió nuestro modo de pensar sobre las matemáticas [...] Fue el responsable del surgimiento de las "Nuevas Matemáticas" que se colaron en la educación estadounidense a mediados de siglo [...]». Sus tratados «han constituido una sólida base para la mayoría de los matemáticos modernos [...] En la actualidad, ningún matemático en activo [...] está libre de la influencia del trabajo fundamental de Nicolas Bourbaki».

Sin embargo, Bourbaki, genio matemático y autor de docenas de obras aclamadas, no llegó a existir. Bourbaki no era una sola persona, sino más bien una sociedad secreta de matemáticos, casi todos franceses, que se formó en 1935. El grupo intentó elaborar un tratamiento completamente independiente y extremadamente lógico y riguroso de todas las matemáticas esenciales modernas (de principio a fin) a través de la publicación de libros sobre la teoría de conjuntos, el álgebra, la topología, las funciones, la integración, entre otros. Entre los miembros fundadores del grupo secreto se incluían los brillantes matemáticos Henri Cartan, Jean Coulomb, Jean Delsarte, Claude Chevalley, Jean Dieudonné, Charles Ehresmann, René de Possel, Szolem Mandelbrojt y André Weil. Los miembros creían que los matemáticos de más edad se aferraban innecesariamente a las antiguas prácticas. Por esta razón, los miembros de Bourbaki tenían que abandonar el grupo a la edad de 50 años.

Durante la elaboración de sus libros de colaboración, todos los miembros tenían derecho a vetar cualquier aspecto que consideraran inadecuado. Se producían peleas a gritos. En cada reunión, sus obras eran leídas en voz alta y examinadas línea a línea. En 1983 Bourbaki publicó su último volumen, *Spectral Theory*. En la actualidad, *L'Association des Collaborateurs de Nicolas Bourbaki* todavía organiza anualmente seminarios de Bourbaki.

El autor Maurice Mashaal escribió que «Bourbaki no inventó en ningún momento técnicas revolucionarias ni demostró teoremas grandilocuentes, aunque tampoco intentó hacerlo. Lo que el grupo aportó [...] fue una nueva visión de las matemáticas, una organización y claridad novedosas y profundas de sus componentes, una terminología y notaciones lúcidas y un estilo característico».

VÉASE TAMBIÉN *Principia Mathematica* (1910–1913).

Cementerio de la Primera Guerra Mundial en Francia, cerca de Verdun. La posguerra representó un reto difícil para los aspirantes franceses a matemáticos. Un gran número de estudiantes y profesores jóvenes murieron, lo que impulsó a un grupo de jóvenes estudiantes de matemáticas de París a crear el grupo Bourbaki.



1936

La medalla Fields

John Charles Fields (1863–1932)

La medalla Fields es el galardón más famoso y prestigioso en matemáticas. Al igual que el premio Nobel para otros terrenos de éxito, la medalla Fields surgió de un deseo de ensalzar las matemáticas por encima de las hostilidades nacionales. La medalla se concede cada cuatro años, premia los logros anteriores y estimula la investigación futura.

En ocasiones se hace referencia al premio como el «premio Nobel de las matemáticas» porque en realidad no existe un premio Nobel para las matemáticas. No obstante, la medalla Fields se concede únicamente a matemáticos que no superen los 40 años de edad. La cuantía del premio es relativamente pequeña, únicamente 13.500 dólares en 2006, si se compara con el premio Nobel, que ofrece más de 1 millón de dólares. El premio fue instaurado por el matemático canadiense John Charles Fields y se concedió por primera vez en 1936. Cuando Fields murió, en su testamento se especificaba que se sumaran 47.000 dólares a los fondos destinados a la medalla de oro.

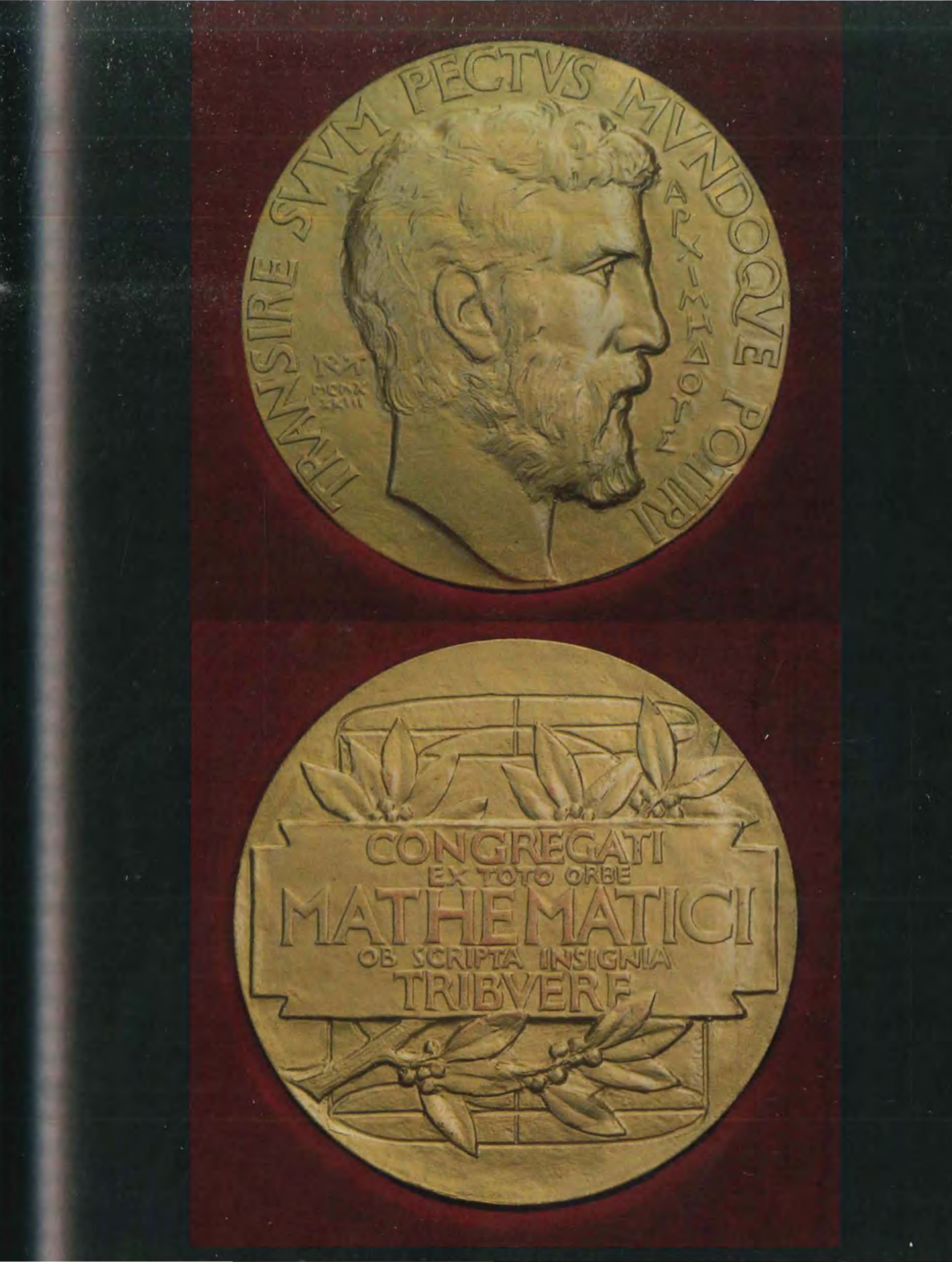
En la parte delantera de la medalla figura el geómetra griego Arquímedes. La frase en latín de la parte trasera dice: *«Los matemáticos de todo el mundo, aquí congregados, conceden [esta medalla] por trabajos relevantes».*

El matemático Alexander Grothendieck boicoteó su propia ceremonia de entrega de la medalla Fields en 1966 porque se celebró en Moscú y quería protestar contra la presencia militar soviética en Europa del Este. En 2006, el matemático ruso Grigori Perelman rechazó el premio cuando se le concedió la medalla por «sus contribuciones a la geometría y sus aportaciones revolucionarias a la estructura analítica y geométrica del flujo de Ricci», que permitieron demostrar la **conjetura de Poincaré.** Lo rechazó por considerar que el premio era irrelevante.

Curiosamente, aproximadamente el 25% de los medallista han sido judíos y casi la mitad han ocupado cargos en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, Nueva Jersey. Alfred Nobel (1833–1896), químico sueco e inventor de la dinamita, fue el creador del premio Nobel. Debido a su condición de inventor e industrial no estableció un premio de matemáticas porque personalmente le interesaban poco las matemáticas o las ciencias teóricas.

VÉASE TAMBIÉN Arquímedes: arena, ganado y el *stomachion* (c. 250 a. C.), La conjetura de Poincaré (1904), El programa de Langlands (1967), La teoría de las catástrofes (1968) y El grupo Monstruo (1981).

La medalla Fields suele denominarse el «premio Nobel de las matemáticas». No obstante, esta medalla tan solo se concede a matemáticos que no superen los 40 años de edad.



TRANSIRE SVVM PECTVS MVNDOQVE POTIRI
ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
CONGREGATI
EX TOTO ORBE
MATHEMATICI
OB SCRIPTA INSIGNIA
TRIBVERE

1936

Las máquinas de Turing

Alan Turing (1912–1954)

Alan Turing fue un brillante matemático y teórico informático al que se le obligó a convertirse en un conejillo de indias humano sometiéndose a experimentos con fármacos para «invertir» su homosexualidad. Esta persecución se produjo a pesar de que su innovador trabajo ayudara a que la Segunda Guerra Mundial acabara antes, razón por la cual se le concedió la Orden del Impero Británico.

Turing llamó a la policía para que investigara sobre un robo que se había producido en su casa de Inglaterra y fue entonces cuando un policía homófobo empezó a tener sospechas de que Turing era homosexual. Turing tuvo que elegir entre ir a la cárcel durante un año o someterse a un tratamiento experimental con fármacos. Para evitar la prisión, aceptó que se le inyectaran estrógenos durante un año. Su muerte a los 42 años de edad, dos años después de su arresto, fue un duro golpe para sus familiares y amigos. Turing fue encontrado en la cama. La autopsia reveló envenenamiento con cianuro. Puede que se suicidara, aunque a día de hoy no se tienen datos definitivos.

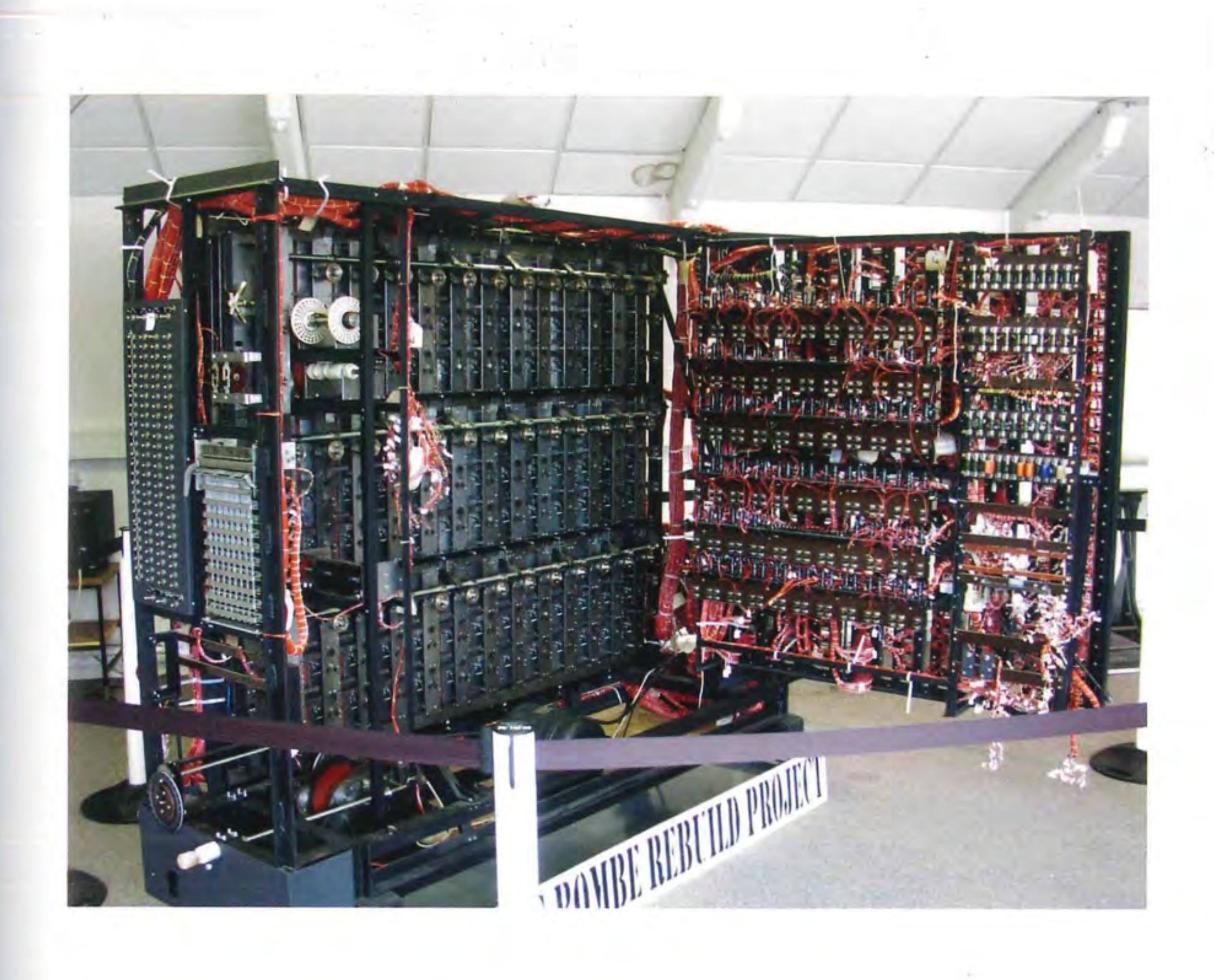
Muchos historiadores consideran a Turing el «padre de la informática moderna». En su principal trabajo, *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungs Problem*, escrito en 1936, demostró que las máquinas de Turing (dispositivos que trabajaban con símbolos abstractos) podrían resolver cualquier problema matemático que se representara con un algoritmo. Las máquinas de Turing ayudaron a los científicos a entender mejor los límites del cálculo.

Turing también es el creador del test de Turing, que permitió a los científicos reflexionar de forma más clara sobre lo que significa la inteligencia artificial y si algún día las máquinas podrían «pensar». Turing creía que con el tiempo las máquinas estarían capacitadas para superar su test, demostrando que podían conversar con las personas de una forma tan natural que éstas no pudieran saber si estaban hablando con una máquina o con un ser humano.

En 1939 Turing inventó una máquina electromecánica que podía ayudar a descifrar los códigos nazis creados por la máquina de codificación Enigma de estos. La máquina de Turing, llamada «Bombe», fue mejorada por el matemático Gordon Welchman y se convirtió en la principal herramienta para descifrar las comunicaciones de Enigma.

VÉASE TAMBIÉN ENIAC (1946), La teoría de la información (1948) y Criptografía de clave pública (1977).

Réplica de una máquina Bombe. Alan Turing inventó este dispositivo electromecánico para ayudar a descifrar los códigos nazis creados por la máquina de codificación Enigma.


BOMBE REBUILD PROJECT

1936

Las teselaciones de Voderberg

Heinz Voderberg (1911–1942)

Una teselación (o teselado) de un plano es una colección de formas más pequeñas, denominadas teselas, que cubre una superficie sin superposiciones ni huecos entre ellas. Puede que las teselaciones más obvias sean las que se pueden observar en los suelos embaldosados en los que las teselas presentan formas cuadrangulares o hexagonales. La teselación hexagonal es la estructura básica de un panal, quizás «útil» para las abejas debido a la eficacia que presenta dicha teselación en lo que respecta al material necesario para crear un entramado de celdas dentro de un área determinada. Existen ocho tipos diferentes de teselaciones del plano que utilizan dos o más polígonos convexos y regulares de manera que los mismos polígonos, en el mismo orden, rodeen cada vértice poligonal.

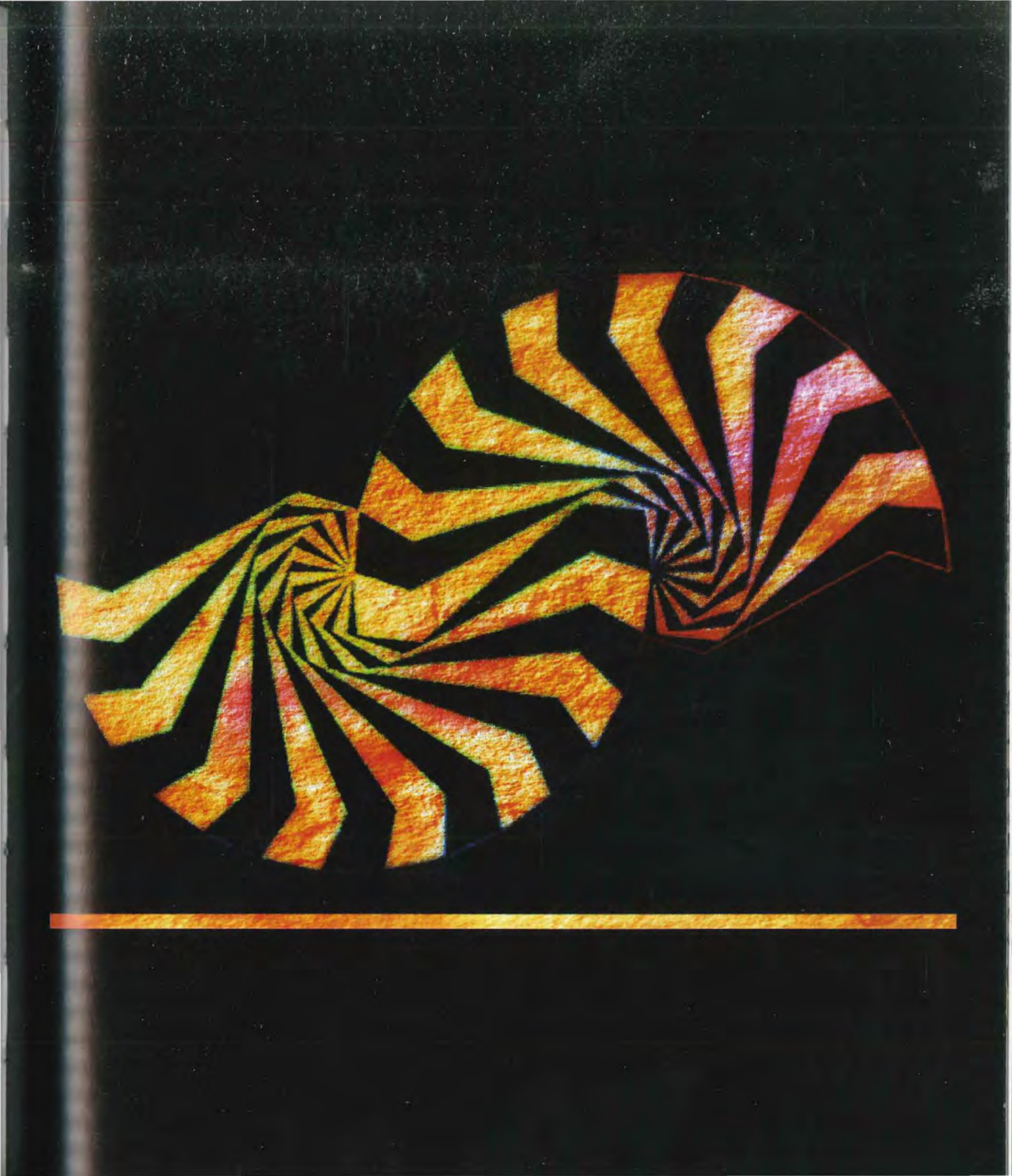
Las teselaciones aparecen de forma habitual en el trabajo artístico del artista holandés M. C. Escher y también en el antiguo arte islámico. En realidad, las teselaciones tienen miles de años de antigüedad y pueden remontarse hasta la civilización sumeria (c. 4000 a. C.), en la que las paredes de los edificios estaban decoradas con diseños de teselas hechas de arcilla.

La teselación de Voderberg, descubierta por Heinz Voderberg en 1936, es especial porque es la primera teselación en espiral del plano de la que se tuvo conocimiento. El atractivo dibujo está realizado a partir de una sola tesela repetida con forma de eneágono (polígono de nueve lados) irregular. La repetición del eneágono forma una tira en espiral infinita que, al unirse a otra tira, cubre el plano sin dejar huecos. La teselación de Voderberg suele denominarse monoédrica debido a que se trata de una teselación en la que todas las teselas son iguales.

En la década de 1970, los matemáticos Branko Grünbaum y Geoffrey C. Shephard debatieron en torno a un nuevo y maravilloso conjunto de teselaciones espirales. Sus teselas podían utilizarse para producir espirales de uno, dos, tres y seis brazos que cubren el plano. En 1980, Marjorie Rice y Doris Schattschneider describieron otras formas para crear teselaciones espirales con múltiples brazos, a partir de teselas pentagonales.

VÉASE TAMBIÉN Los grupos del papel pintado (1891), La cuadratura del rectángulo (1925), Las teselas de Penrose (1973) y Spidrones (1979).

Una teselación de Voderberg en espiral, de Teja Krašek. Este tipo de teselación suele denominarse monoédrica debido a que se trata de una teselación en la que todas las teselas son iguales.



1937

La conjetura de Collatz

Lothar Collatz (1910–1990)

Imagínese caminando en medio de una atroz tormenta de granizo en la que el granizo se dispersa hacia arriba y hacia abajo con las embestidas del viento. A veces el granizo sale disparado hasta donde su vista alcanza y de repente vuelve en picado hacia la Tierra, cayendo al suelo como pequeños meteoritos.

Los problemas de los números-granizo han fascinado a los matemáticos durante décadas y se estudian porque aunque su cálculo es muy sencillo, parecer ser que son inextricablemente difíciles de resolver. Para calcular una secuencia de números-granizo (también denominados números $3n + 1$) se comienza eligiendo un número entero positivo. Si su número es par, divídalo por 2. Si es impar, multiplíquelo por 3 y añada 1. A continuación, tome el resultado y repita el proceso. Por ejemplo, la secuencia granizo para 3 es 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4... (Los puntos suspensivos indican que la secuencia continúa de forma infinita como 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, y así sucesivamente.)

Al igual que los pedriscos de granizo que caen del cielo de las nubes de tormenta, esta secuencia se dispersa hacia arriba y hacia abajo, a veces siguiendo unos patrones aparentemente irregulares. Asimismo, al igual que el granizo, parece que con el tiempo los números-granizo siempre vuelven a caer al «suelo» (el número entero «1»). La conjetura de Collatz se denomina así por el matemático alemán Lothar Collatz, que fue quien la planteó en 1937 y establece que este proceso acabará descendiendo a 1 independientemente del número entero positivo con el que se empiece. Hasta ahora, los matemáticos no han conseguido demostrar esta conjetura aunque sí que se ha comprobado por ordenador para todos los valores iniciales menores que $19 \times 2^{58} \approx 5{,}48 \times 10^{18}$.

Se han establecido diversos premios para quien consiga demostrar o rebatir esta conjetura. El matemático Paul Erdös opinó sobre la complejidad de los números $3n + 1$: «Las matemáticas todavía no están preparadas para estos problemas». El afable y modesto Collatz recibió muchas distinciones por su contribución a las matemáticas y murió en 1990 en Bulgaria, durante su asistencia a una conferencia de matemáticas sobre aritmética computacional.

VÉASE TAMBIÉN Erdös y la colaboración extrema (1971), El atractor de Ikeda (1979) y La enciclopedia on-line de secuencias de números enteros (1996).

Patrón de fractal de Collatz. A pesar de que el estudio del comportamiento de los números 3n+1 se suele limitar a números enteros, el estudio puede extenderse a los números complejos y representar su complicado comportamiento fractal a través de la coloración del plano complejo.



1938

Los círculos de Ford

Sir Lester Randolph Ford (1886–1975)

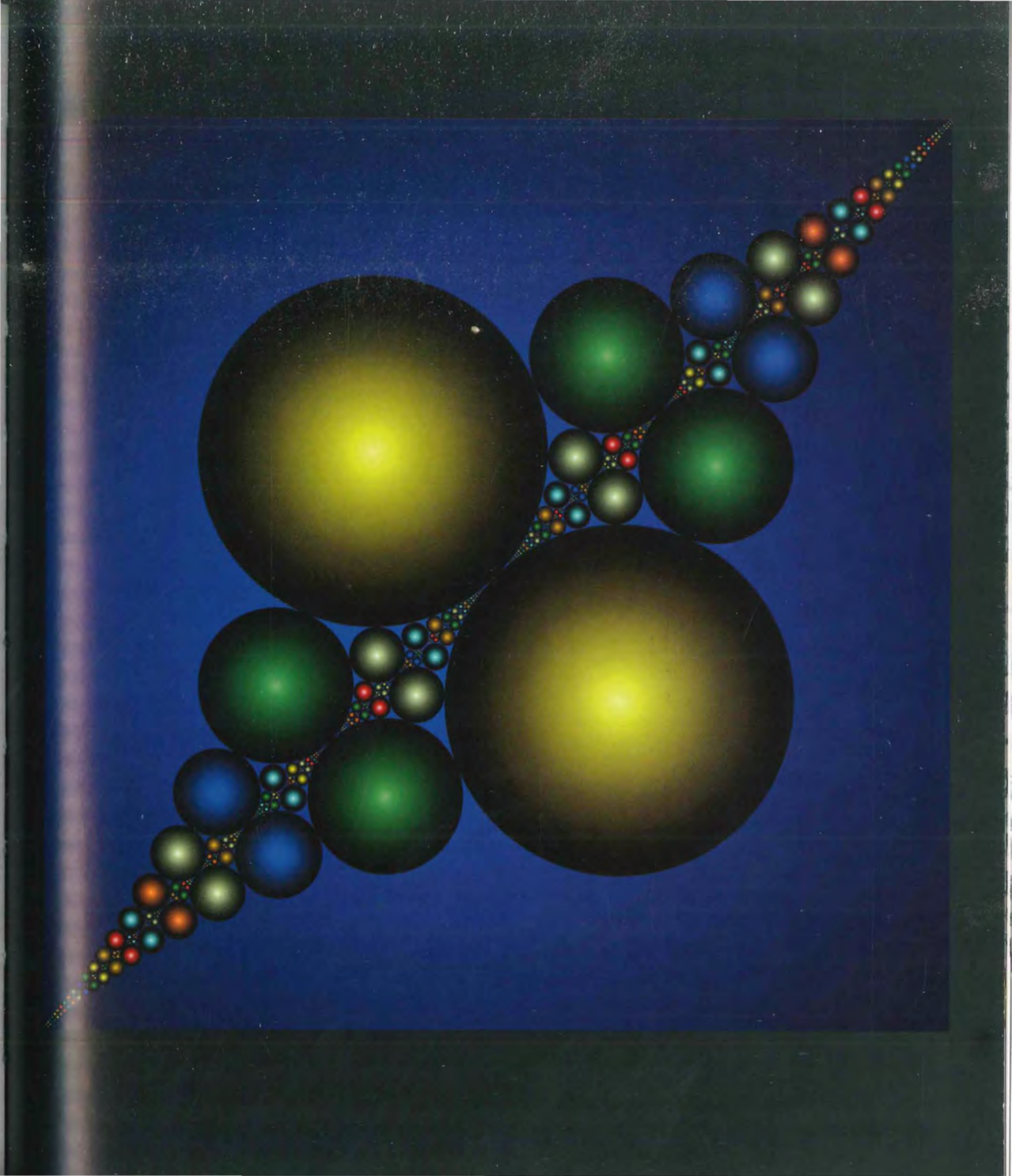
Imagínese un espumoso batido con un infinito número de burbujas de todos los tamaños que están en contacto unas con otras aunque sin irrumpir unas dentro de otras. Las burbujas se hacen cada vez más pequeñas, rellenando completamente las rendijas y los espacios que quedan entre las más grandes. El matemático Lester Ford trató en 1938 algunos aspectos de dicha espuma misteriosa y resultó que ésta se caracteriza por tener la misma trama que nuestro sistema de números «racionales». (Los *números racionales* son números como ½, que pueden expresarse como fracciones.)

Para crear la espuma de Ford, comience eligiendo dos números enteros, h y k. Dibuje un círculo de radio $1/(2k^2)$ y con centro en $(h/k\ ,\ 1/(2k^2))$. Por ejemplo, si selecciona $h = 1$ y $k = 2$, dibujará un círculo con centro en (0,5, 0,125) y de radio 0,125. Continúe colocando círculos con diferentes valores de h y k. Conforme su imagen sea más y más densa, se dará cuenta de que no hay circulos secantes, aunque algunos serán tangentes a otros circulos (en otras palabras, «se besarán»). Todos los círculos contarán con una infinitud de círculos que los «besan».

Considere ahora un arquero divino colocado por encima de la espuma de Ford con un valor y adecuadamente grande. Para simular el disparo de la flecha, dibuje una recta vertical a partir de la ubicación de su arquero (por ejemplo en $x = a$) hacia abajo, hacia el eje x (esta recta es perpendicular al eje x). En caso de que a sea un número racional, la línea debe atravesar alguno de los círculos de Ford y alcanzar el eje horizontal x exactamente en el punto de tangencia del círculo. No obstante, cuando la posición del arquero se encuentre en un número irracional (un valor decimal infinito y no periódico como $\pi = 3{,}1415\ldots$), la flecha debe salir de todos los círculos en los que se introduzca y, a continuación, introducirse en otro círculo. De este modo, la flecha del arquero atravesará una infinidad de círculos. Un estudio matemático más a fondo de los círculos de Ford muestra que estos pueden ofrecer una excelente interpretación de los diferentes grados de infinitud y de los números **transfinitos de Cantor.**

VÉASE TAMBIÉN Los números transfinitos de Cantor (1874), La esponja de Menger (1926) y Los fractales (1975).

Círculos de Ford, de Jos Leys. La imagen se ha girado 45° para que el eje x se extienda desde el lado inferior izquierdo hacia el lado superior derecho. Los círculos se hacen cada vez más pequeños, rellenando las rendijas y los espacios entre los más grandes.



1938

El desarrollo de las máquinas de aleatorización

William Thomson, Baron Kelvin of Largs (1824–1907), **Sir Maurice George Kendall** (1907–1983), **Bernard Babington Smith** (fallecido en 1993), **Leonard Henry Caleb Tippett** (1902–1985), **Frank Yates** (1902–1995), **Sir Ronald Aylmer Fisher, FRS** (1890–1962)

En la ciencia moderna, los generadores de números aleatorios son útiles para la simulación de fenómenos naturales y la obtención de muestras de datos. Antes del desarrollo de los ordenadores electrónicos modernos, los investigadores tenían que ser creativos en sus métodos para obtener números aleatorios. Por ejemplo, en 1901 para generar números aleatorios Lord Kelvin utilizó números escritos en trozos de papel sacados de un recipiente. Sin embargo, este método no le pareció satisfactorio y escribió: «La mejor mezcla que pudimos realizar en el recipiente no parecía suficiente para garantizar las mismas posibilidades a todos los trozos de papel».

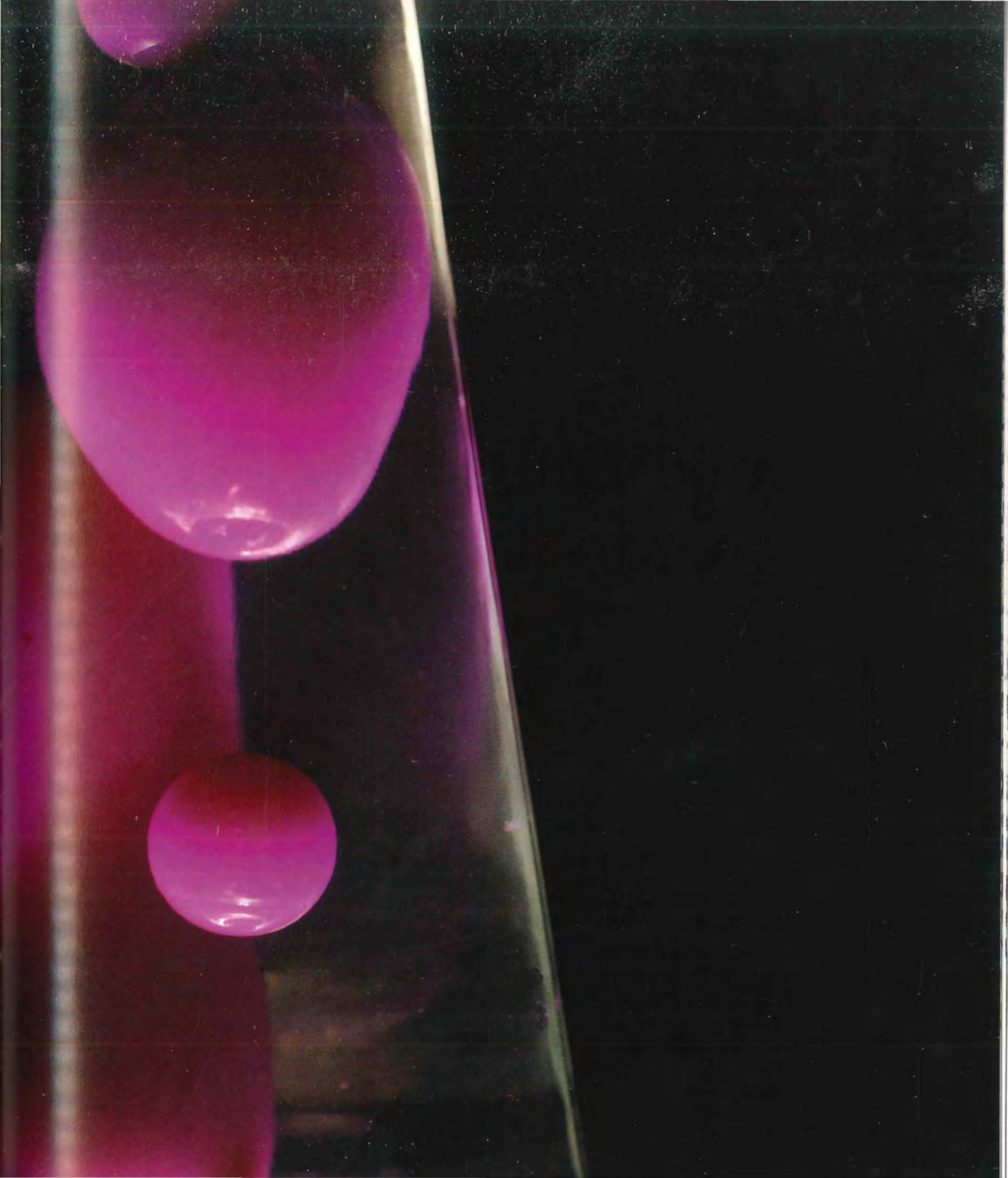
En 1927, el estadístico británico Leonard Tippett facilitó a los investigadores una tabla con 41.600 números aleatorios que había construido tomando los dígitos intermedios de los números que representan el área de los distritos ingleses. En 1938 los estadísticos británicos Ronald Fischer y Frank Yates publicaron otros 15.000 números aleatorios utilizando dos barajas de cartas para seleccionar dígitos en logaritmos.

En 1938 y 1939 el estadístico británico Maurice Kendall llevó a cabo una investigación con el psicólogo británico Bernard Babington Smith para obtener números aleatorios por medio de una máquina. Su máquina de aleatorización fue el primer dispositivo de tales características utilizado para producir una tabla de 100.000 números aleatorios. También formularon una serie de pruebas rigurosas para determinar si los números eran realmente aleatorios desde un punto de vista estadístico. Los números de Kendall y Smith se utilizaron de forma frecuente hasta que RAND Corporation publicó *A Million Random Digits with 100,000 Normal Deviates* en 1955. RAND utilizó una máquina de tipo ruleta similar a la máquina de Kendall y Smith y comprobó que los dígitos eran aleatorios desde un punto de vista estadístico utilizando pruebas matemáticas similares.

Kendall y Smith utilizaron un motor conectado a una pieza circular de cartón de aproximadamente 25 centímetros de diámetro. El disco se dividió en 10 segmentos «con un tamaño lo más parecido posible» numerados consecutivamente de 0 a 9. El disco se iluminaba por medio de una lámpara de neón. Un condensador la cargaba y la lámpara, con el tiempo, producía un destello. El operador de la máquina de aleatorización veía un número y lo registraba.

VÉASE TAMBIÉN Dados (c. 3000 a. C.), La aguja de Buffon (1777) y El método del cuadrado medio de Von Neumann (1946).

El complejo e imprevisible movimiento de las gotas de cera en las lámparas de lava se ha utilizado como fuente de números aleatorios. Este sistema para generar números aleatorios se menciona en la patente estadounidense número 5.732.138 publicada en 1998.



1939

La paradoja del cumpleaños

Richard von Mises (1883–1953)

Martin Gardner escribió: «Desde el comienzo de la historia, ciertas coincidencias excepcionales han reforzado la creencia en la influencia de fuerzas ocultas en la vida. Los acontecimientos que parecían transgredir de forma milagrosa las leyes de la probabilidad se atribuían a la voluntad de dioses o demonios, de Dios o de Satán o, como mínimo, a misteriosas leyes desconocidas para la ciencia y las matemáticas». Uno de los problemas que ha intrigado a los investigadores de coincidencias es la paradoja del cumpleaños.

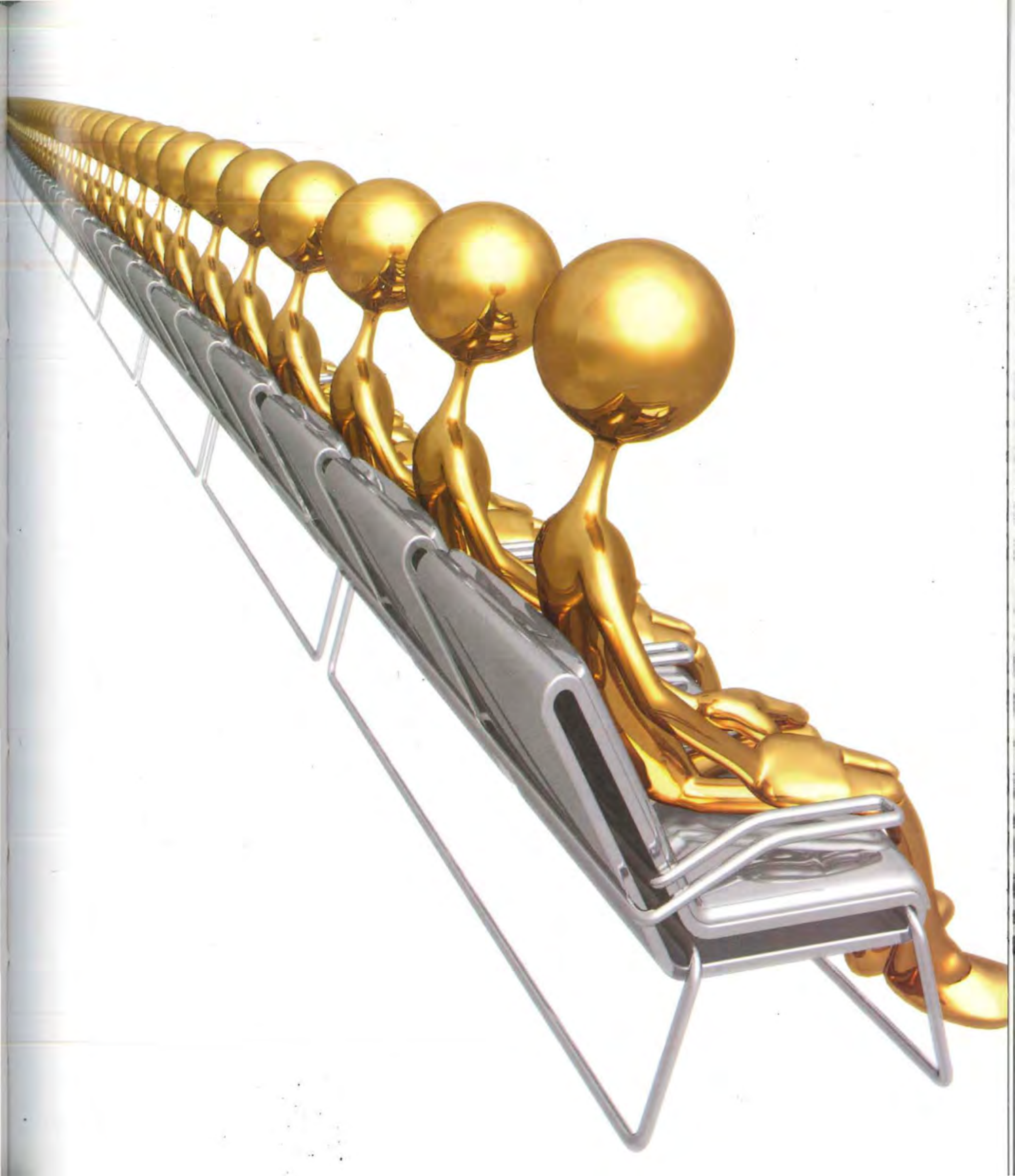
Imagínese que se encuentra en un gran salón y que comienza a entrar gente de forma gradual. ¿Cuántas personas debe haber en la habitación para que la probabilidad de que dos de ellas compartan su cumpleaños sea como mínimo del 50%? Este problema, planteado en 1939 por el matemático estadounidense de origen austriaco Richard von Mises, es significativo porque su solución va en contra de la intuición para muchas personas ya que se trata de uno de los problemas de probabilidad más estudiados en la actualidad y porque las variaciones del problema del cumpleaños proporcionan modelos útiles para analizar sorprendentes coincidencias en la vida diaria.

Si asumimos que el año tiene 365 días, la respuesta al problema es 23 personas, simplemente. En otras palabras, si en una sala hay 23 personas o más, elegidas de forma aleatoria, existe más de un 50% de probabilidad de que un par de ellas comparta el día del cumpleaños. Para 57 personas o más, la probabilidad es más del 99%. La probabilidad pasa a ser del 100% en caso de que como mínimo haya 366 personas en la sala, según el **principio del palomar.** Asumimos que los 365 posibles cumpleaños son igualmente probables y que se omiten los días intercalares. La fórmula para calcular la probabilidad de que como mínimo dos de las n personas compartan cumpleaños es $1 - [365!/[365^n(365 - n)!]$, que se puede aproximar por $1 - e^{-n^2/(2 \cdot 365)}$.

Puede que solo 23 personas sean menos de las que se esperaba debido a que no buscábamos a dos personas específicas ni una fecha de nacimiento en concreto. Basta una coincidencia en cualquier fecha en relación con cualquier pareja de personas. En realidad, son posibles 253 emparejamientos diferentes entre las 23 personas y cualquiera de ellas puede dar lugar a una coincidencia.

VÉASE TAMBIÉN Las paradojas de Zenón (c. 445 a. C.), La paradoja de la rueda de Aristóteles (c. 320 a. C.), La paradoja de San Petersburgo (1738), El principio del palomar de Dirichlet (1834), La paradoja del barbero (1901), La paradoja de Banach-Tarski (1924), El hotel infinito de Hilbert (1925), La teoría de Ramsey (1928), La paradoja de la línea de costa (c. 1950), La paradoja de Newcomb (1960) y la paradoja de Parrondo (1999).

¿Cuántas personas debe haber en la habitación para que la probabilidad de que dos de ellas compartan cumpleaños sea, como mínimo, del 50%? Si asumimos que el año tiene 365 días, la respuesta al problema es 23 personas, simplemente.



c. 1940

Circunscripción de polígonos

Edward Kasner (1878–1955), **James Roy Newman** (1907–1966)

Dibuje un círculo con un radio igual a 2,5 centímetros aproximadamente. A continuación, circunscriba (rodee) el círculo con un triángulo equilátero. Después, circunscriba el triángulo con otro círculo. Luego, el segundo círculo con un cuadrado. Continúe con un tercer círculo, circunscribiendo el cuadrado. Circunscriba este círculo con un pentágono regular. Continúe con este procedimiento de forma indefinida, cada vez aumentando en uno el número de lados del polígono regular. Cada figura adicional que se utilice dará lugar a un círculo que aumenta de tamaño continuamente a la vez que engloba al conjunto de sus predecesores. Si reiterara este proceso añadiendo en todo momento círculos más grandes a un ritmo de un círculo por minuto, ¿cuánto tiempo tardaría el círculo más grande en tener un radio igual al radio de nuestro sistema solar?

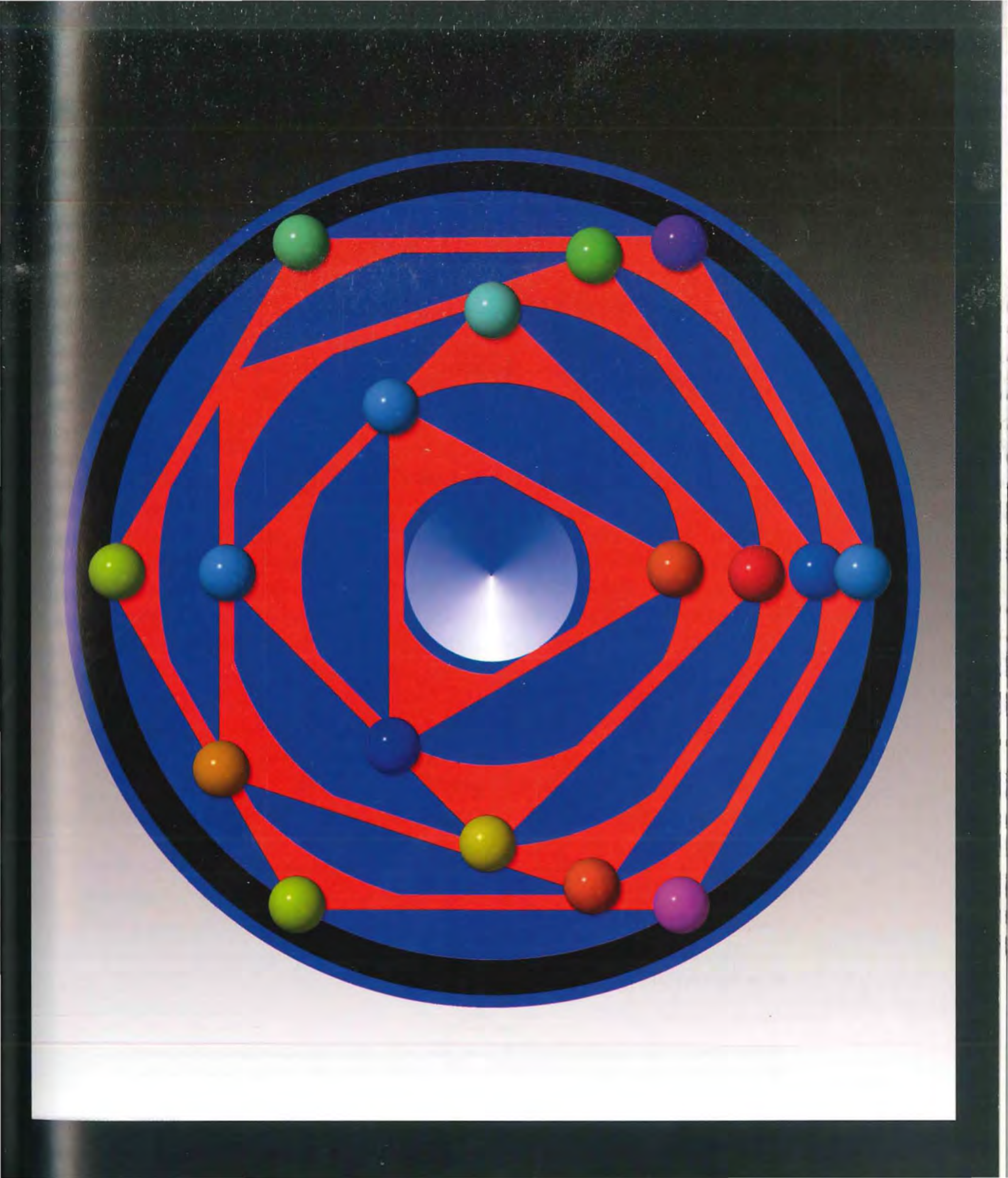
Si se rodean continuamente las figuras con círculos, podría parecer que los radios deberían ser cada vez más grandes, tendiendo a infinito si se continúa con el proceso. Sin embargo, el conjunto de polígonos y círculos anidados nunca llegará a ser tan grande como el sistema solar, ni como la Tierra, ni como el típico neumático de una bicicleta de adulto. Aunque los círculos aumentan de tamaño de forma muy rápida, el ritmo de crecimiento se reduce de forma gradual y los radios de los círculos resultantes se acercan a un valor límite dado por el producto infinito: $R = 1/[\cos(\pi/3) \times \cos(\pi/4) \times \cos(\pi/5)...]$.

Puede que sea más intrigante la controversia sobre el valor límite de R, que parece ser bastante sencillo de calcular. De acuerdo con los matemáticos Edward Kasner y James Newman, que fueron los primeros en presentar un valor en los años 40, R es aproximadamente igual a 12. El valor 12 también se menciona en un artículo alemán publicado en 1964.

Christoffel J. Bouwkamp publicó un artículo en 1965 que presentaba el valor verdadero de $R = 8{,}7000$. Resulta fascinante que hasta 1965 los matemáticos todavía asumieran que el valor correcto de R fuera 12. El valor correcto de R con 17 dígitos es 8,7000366252081945...

VÉASE TAMBIÉN Las paradojas de Zenón (c. 445 a. C.), Trigo sobre un tablero de ajedrez (1256), La serie armónica diverge (c. 1350), Descubrimiento del desarrollo en serie de π (c. 1500) y La constante de Brun (1919).

Círculo central rodeado por la alternancia de polígonos y círculos, según se describe en el texto (las líneas rojas son más gruesas en la imagen para conferirles un efecto artístico). ¿Se podría continuar el patrón hasta alcanzar el tamaño de un neumático típico de una bicicleta de adulto?



1942

Hex

Piet Hein (1905–1996), **John Forbes Nash, Jr.** (nacido en 1928)

Hex es el nombre de un juego de mesa para dos jugadores que se juega en un tablero formado por celdas hexagonales, que suele tener la forma de un diamante de dimensiones 11 x 11. Lo inventó el matemático y poeta danés Piet Hein en 1942 y, por otro lado, el matemático estadounidense John Nash en 1947. Nash, ganador de un premio Nobel, quizás sea más conocido popularmente por la película de Hollywood, *Una mente maravillosa,* donde se destacan sus habilidades matemáticas y su lucha contra la esquizofrenia. Según el libro *Una mente maravillosa,* Nash propuso un tablero 14 x14 como tamaño ideal.

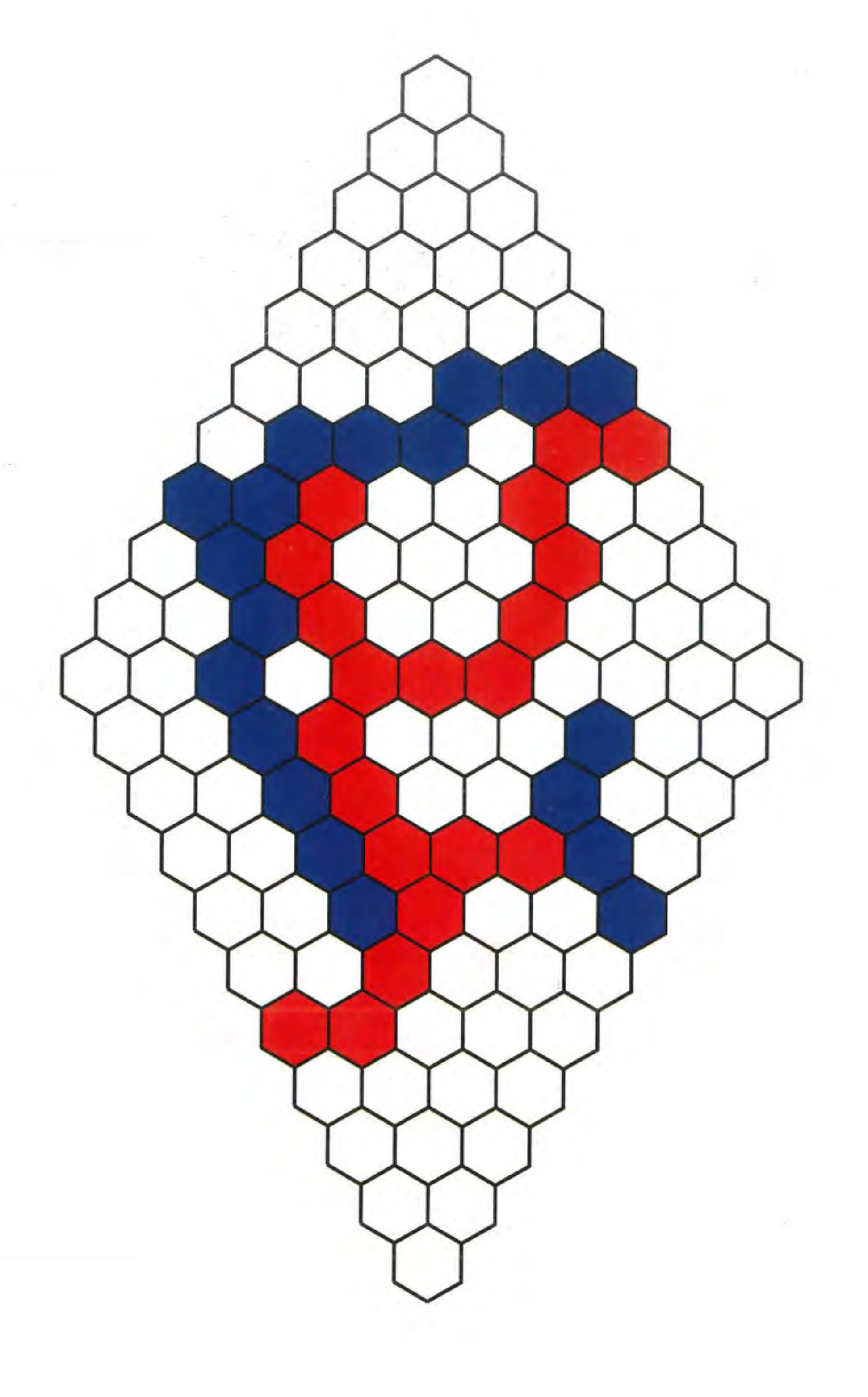
Los jugadores utilizan fichas de diferentes colores (por ejemplo, rojo y azul) y las van colocando de forma alternativa en las celdas hexagonales. El objetivo de las fichas rojas es formar una línea que conecte dos lados opuestos del tablero. El objetivo de las azules es formar una línea que conecte los otros dos lados opuestos. Los cuatro hexágonos de las esquinas pertenecen a ambas partes. Nash descubrió que la partida no puede acabar nunca en tablas y que el juego favorece al jugador que comienza, que puede disponer de una estrategia ganadora. Una forma de hacer que el juego sea más justo es permitir al segundo jugador que elija su propio color una vez que el primer jugador realiza el primer movimiento o después de los tres movimientos iniciales.

En 1952 Parker Brothers comercializó una versión del juego para el público que utilizaba fichas hexagonales. Se ha demostrado que existe una estrategia ganadora para el jugador que comienza la partida para varios tamaños del tablero de juego. Aunque el juego parece sencillo, los matemáticos lo han utilizado para aplicaciones más profundas, como la de demostrar el **teorema del punto fijo de Brouwer.**

Hein se hizo famoso en el ámbito internacional por sus diseños, poemas y juegos matemáticos. Cuando los alemanes invadieron Dinamarca en 1940, se vio obligado a sumergirse en la clandestinidad porque era el cabecilla de un grupo antinazi. En 1944 explicó su enfoque creativo: «El arte es la solución para los problemas que no pueden formularse claramente antes de haberlos resuelto».

VÉASE TAMBIÉN El teorema del punto fijo de Brouwer (1909), La estrategia del juego del cerdo (1945), El equilibrio de Nash (1950) y Locura instantánea (1966).

El juego de mesa Hex *se practica en un tablero hexagonal. El objetivo de las rojas es formar una línea que conecte dos lados opuestos del tablero. El objetivo de las azules es formar una línea que conecte los otros dos lados opuestos. En este ejemplo, ganan las rojas.*



1945

La estrategia del juego del cerdo

John Scarne (nacido Orlando Carmelo Scarnecchia) (1903–1985)

El juego del cerdo es un juego de reglas sencillas, aunque con estrategias y análisis sorprendentemente complejos. Tiene relevancia como metáfora para muchos problemas, aparentemente sencillos, que dieron lugar años después a provechosas investigaciones matemáticas y como herramienta de enseñanza utilizada por numerosos educadores para tratar el tema de la estrategia en los juegos.

El juego del cerdo fue descrito por primera vez en 1945 por John Scarne, un mago estadounidense experto en juegos, cartomago e inventor, a pesar de que el juego se basa en «juegos populares» anteriores con diferentes variaciones. Para jugar a este juego, un jugador tira un dado hasta que sale 1 o hasta que decide «plantarse» y sumar las tiradas de su turno. En caso de que al jugador le salga un 1, no suma ningún punto y el turno pasa al oponente. Gana el primer jugador que alcance 100 o más puntos. Ejemplo: Usted saca un 3. Decide tirar otra vez y saca un 1. Entonces no suma puntos y ofrece el dado a su oponente. Este tira la secuencia 3-4-6 y decide plantarse. De este modo sumará 13 puntos a su tanteo y le devolverá el dado.

El juego del cerdo se considera un juego de dados de «arriesgar» debido a que los jugadores deben decidir si arriesgan lo ganado anteriormente tirando de nuevo para obtener más puntos adicionales. En 2004, los científicos informáticos Todd W. Neller y Clifton Presser del Gettysburg College de Pensilvania analizaron el juego del cerdo de forma detallada para dilucidar una estrategia de juego óptima. Utilizando las matemáticas y sirviéndose de gráficos informáticos, descubrieron una estrategia complicada y nada intuitiva para ganar y demostraron por qué jugar para ganar más puntos en un turno es claramente diferente a jugar para ganar. En lo que respecta a los resultados y las visualizaciones sobre las mejores pautas, indicaron de forma poética que «Ver el "panorama" de estas pautas es como ver con claridad por primera vez la superficie de un planeta lejano, cuando antes tan solo se habían visto imágenes borrosas».

VÉASE TAMBIÉN Dados (c. 3000 a. C.), El equilibrio de Nash (1950), El dilema del prisionero (1950), La paradoja de Newcomb (1960) y Locura instantánea (1966).

El sencillo juego del cerdo presenta análisis y estrategias sorprendentemente complicados. El mago e inventor estadounidense John Scarne elaboró la primera descripción impresa del juego del cerdo en 1945.



1946

ENIAC

John Mauchly (1907–1980) **y J. Presper Eckert** (1919–1995)

ENIAC, acrónimo de Electronic Numerical Integrator And Computer (Calculador e Integrador Numérico Electrónico) fue creado en la Universidad de Pensilvania por los científicos estadounidenses John Mauchly y J. Presper Eckert. Este dispositivo fue el primer computador digital, reprogramable y electrónico que podía utilizarse para resolver una gran variedad de problemas de cálculo. El objetivo original de ENIAC era el de calcular tablas de tiro de artillería para el ejército estadounidense. Sin embargo, su primera aplicación importante está relacionada con el diseño de la bomba de hidrógeno.

ENIAC se presentó en 1946, con un coste de casi 500.000 dólares, y se utilizó de forma prácticamente ininterrumpida hasta que fue desconectada el 2 de octubre de 1955. La máquina contenía más de 17.000 válvulas de vacío y cerca de 5 millones de conexiones soldadas a mano. Se utilizaba un lector IBM y una perforadora de fichas para la introducción y extracción de datos. En 1997 un equipo de estudiantes de ingeniería dirigidos por el profesor Jan Van der Spiegel creó una «réplica» de la computadora ENIAC de 30 toneladas en un único circuito integrado.

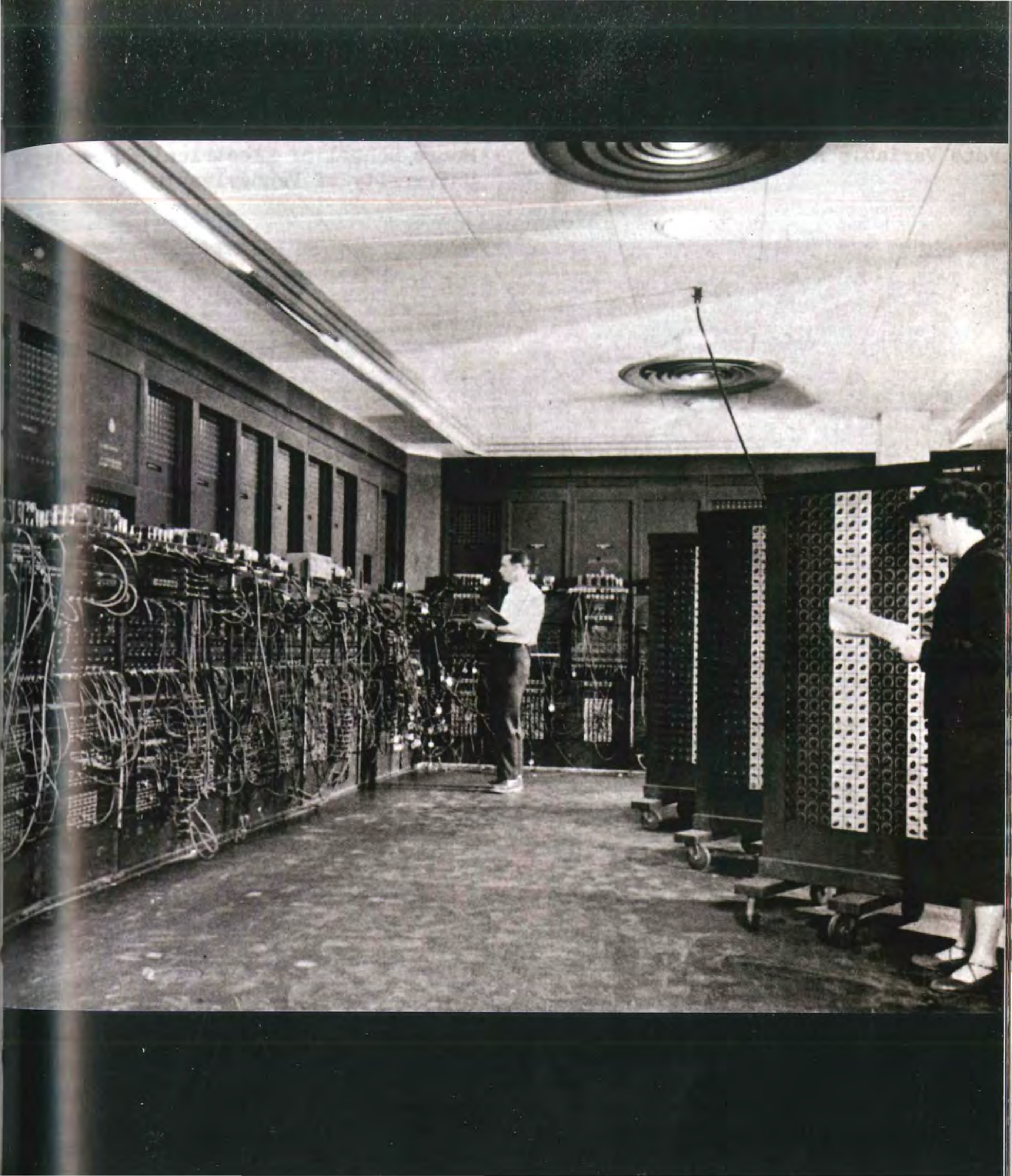
Otras de las calculadoras electrónicas de relevancia en los años 30 y 40 fueron la calculadora estadounidense de Atanasoff-Berry (presentada en diciembre de 1939), la alemana German Z3 (presentada en mayo de 1941) y la británica Colossus (presentada en 1943). No obstante, estas máquinas o bien no eran totalmente electrónicas o bien no tenían un objetivo general.

Los autores de la patente de ENIAC (nº 3.120.606, registrada en 1947) escribieron: «Con la llegada del uso corriente de cálculos elaborados, la velocidad ha pasado a ser un elemento primordial hasta el punto de que en la actualidad no existe ninguna máquina en el mercado que sea capaz de satisfacer toda la demanda de modernos métodos de cálculo [...] La presente invención pretende reducir a segundos esos extensos cálculos [...]».

En la actualidad, el uso de ordenadores ha invadido muchas áreas de las matemáticas, incluyendo el análisis numérico, la teoría de números y la teoría de la probabilidad. Los matemáticos, evidentemente, utilizan cada vez con más frecuencia ordenadores en sus investigaciones y clases. A veces recurren incluso a los gráficos por ordenador para ganar más profundidad. Muchas demostraciones matemáticas célebres se han hecho con ayuda del ordenador.

VÉASE TAMBIÉN El ábaco (1200), La regla de cálculo (1621), El ordenador mecánico de Babbage (1822), El analizador diferencial (1927), Las máquinas de Turing (1936), La calculadora Curta (1948) y HP-35: la primera calculadora científica de bolsillo (1972).

Fotografía perteneciente al ejército estadounidense de ENIAC, la primera calculadora digital, reprogramable y electrónica que podía utilizarse para resolver una gran variedad de problemas de cálculo. Su primera aplicación importante estuvo relacionada con el diseño de la bomba de hidrógeno.



1946

Método del cuadrado medio de Von Neumann

John von Neumann (1903–1957)

Los científicos utilizan generadores de números aleatorios para tratar de resolver una gran variedad de problemas, como el desarrollo de códigos secretos, la modelización del movimiento de átomos y la realización de estudios de gran precisión. Un generador de números pseudoaleatorios (GNPA) es un algoritmo que produce una secuencia de números que imitan las propiedades estadísticas de los números aleatorios.

El *método del cuadrado medio*, desarrollado por el matemático John von Neumann en 1946, es uno de los primeros y más famosos GNPA informáticos. Empezó con un número como 1946 y lo elevó al cuadrado para obtener 3786916, que se puede escribir así: 03786916. Extrajo los cuatro dígitos del medio, 7869 y continuó con el proceso de elevar al cuadrado y extraer los dígitos centrales. En la práctica real Von Neumann utilizó números de 10 dígitos y siguió las mismas reglas.

Von Neumann, famoso por su colaboración en la investigación de reacciones termonucleares que dieron lugar a la bomba de hidrógeno, sabía que este sencillo enfoque de aleatorización presentaba fallos y que las secuencias se repetirían con el tiempo, aunque el método colmó sus expectativas en relación con muchas aplicaciones. En 1951 Von Neumann lanzó una advertencia a los usuarios de estos métodos: «Cualquiera que considere métodos aritméticos para producir dígitos aleatorios comete, por supuesto, un pecado mortal». Sin embargo, prefirió este enfoque a generadores de números aleatorios mejores, basados en un hardware que no registraban los valores, por lo que era más difícil repetir procedimientos para identificar problemas. En cualquier caso, Von Neumann no tenía acceso a una memoria de cálculo suficiente para almacenar muchos valores «aleatorios». De hecho, este enfoque increíblemente sencillo permitía obtener números en ENIAC de una forma cien veces más rápida que leyéndolos en las fichas perforadas.

Los GNPA más recientes y útiles utilizan el método de congruencia lineal $X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod m$. Donde $n \geq 0$, a es el multiplicador, m el módulo, c el incremento, y X_0 el valor inicial. El algoritmo GNPA Mersenne twister, desarrollado en 1997 por Makoto Matsumoto y Takuji Nishimura, también es adecuado en muchas de las aplicaciones actuales.

VÉASE TAMBIÉN Dados (c. 3000 a. C.), La aguja de Buffon (1777), El desarrollo de las máquinas de aleatorización (1938) y ENIAC (1946).

John von Neumann en la década de 1940. Von Neumann desarrolló el método del cuadrado medio, uno de los primeros y más famosos generadores informáticos de números pseudoaleatorios.



1947

El código Gray

Frank Gray (fallecido en 1969), **Émile Baudot** (1845–1903)

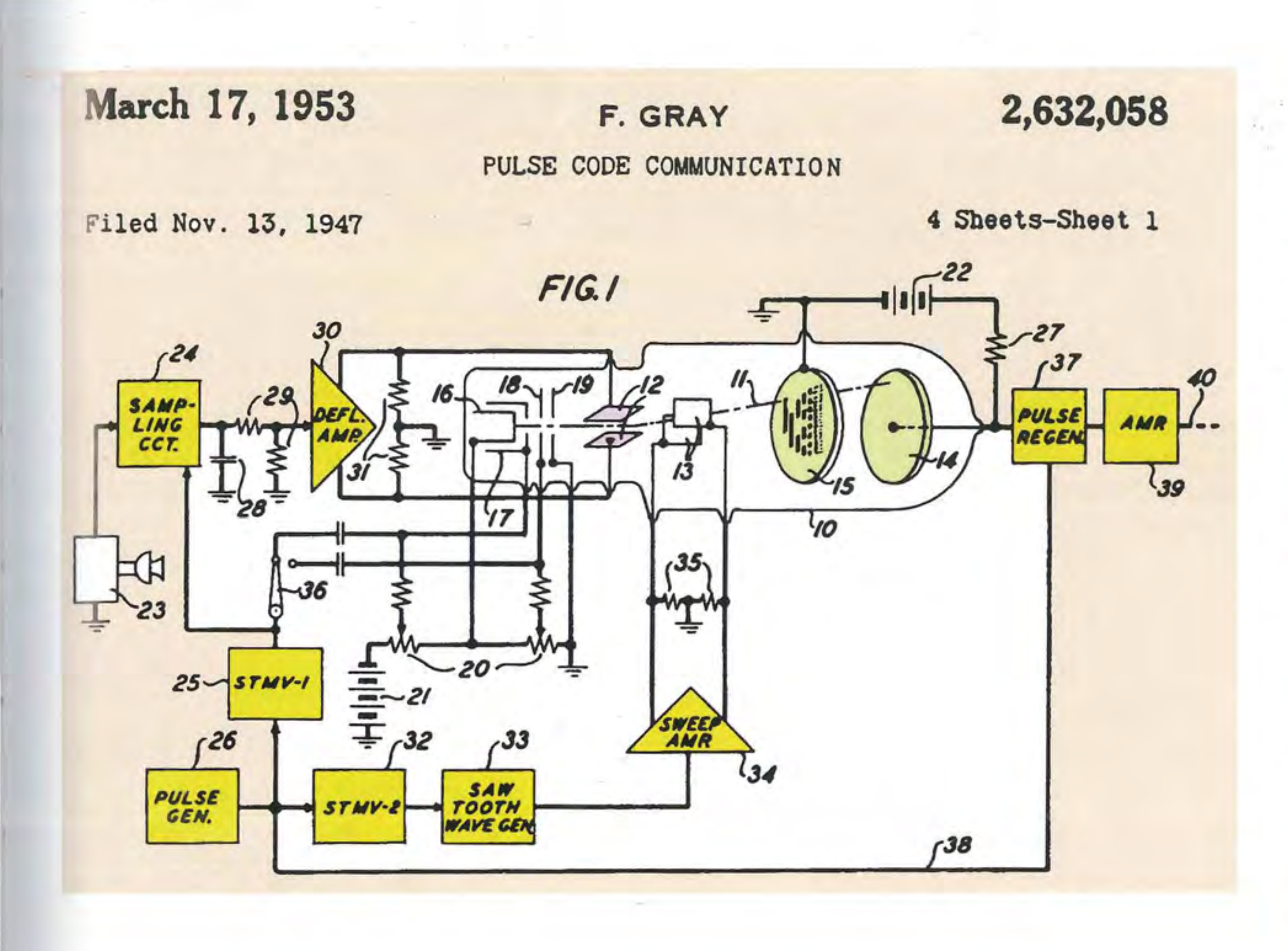
Un código Gray representa números en notación posicional de tal manera que cuando los números se disponen en orden de recuento, cualquier par de números sucesivos presentará una diferencia de 1 en un solo dígito y en una sola posición. Por ejemplo, 182 y 172 podrían ser números en orden sucesivo en un código Gray decimal (los dígitos intermedios difieren en 1) pero no lo serían 182 y 162 (no hay ningún dígito que difiera en 1) ni 182 y 173 (más de un par de dígitos difieren en 1).

Un código Gray sencillo, famoso y útil es el denominado código Gray binario reflejado, formado únicamente por ceros y unos. Martin Gardner explica que para convertir un número binario estándar en su equivalente reflejado de Gray, en primer lugar tenemos que fijarnos en el dígito situado más a la derecha. En caso de que el dígito situado a su izquierda sea 0, se dejará el dígito original, si es 1, se cambiará. Se repite el proceso considerando el resto de dígitos del número hasta llegar al extremo izquierdo (se asume que el dígito del extremo izquierdo presenta un 0 a su izquierda y por tanto permanece invariable). Por ejemplo, al aplicar esta conversión al número 110111 se obtiene el número Gray 101100. Así, podemos transformar todos los números binarios para crear la secuencia Gray que se inicia con: 0, 1, 11, 10, 110, 111, 101, 100, 1100, 1101, 1111...

El código binario reflejado se concibió originalmente para prevenir señales falsas en conmutadores electromecánicos de modo que un cambio de posición tan solo afectara a un bit. En la actualidad, los códigos Gray se utilizan para facilitar la corrección de errores en las comunicaciones digitales, como en la transmisión de señales de TV y para hacer que los sistemas de transmisión sean menos susceptibles al ruido. El ingeniero francés Émile Baudot utilizó códigos Gray en telegrafía en 1878. El nombre del código procede del físico investigador de los laboratorios Bell, Frank Gray, que hizo un amplio uso de estos códigos en sus patentes de ingeniería. Gray inventó un método para convertir las señales analógicas al código Gray binario utilizando válvulas de vacío. En la actualidad, los códigos Gray también tienen importantes aplicaciones en teoría de grafos y en teoría de números.

VÉASE TAMBIÉN El álgebra de Boole (1854), La *Théorie du Baguenodier* de Gros (1872), La torre de Hanoi (1883) y La teoría de la información (1948).

Esquema de la patente estadounidense nº 2.632.058 de Frank Gray, registrada en 1947 y publicada en 1953. En esta patente Gray presentó su famoso código, refiriéndose al mismo como un «código binario reflejado». Más tarde, otros investigadores adoptaron el nombre de Gray para referirse al código.



March 17, 1953
F. GRAY
2,632,058
PULSE CODE COMMUNICATION
Filed Nov. 13, 1947
4 Sheets-Sheet 1
FIG. 1
SAMP-LING CCT.
DEFL. AMP.
PULSE REGEN.
AMP.
STMV-1
PULSE GEN.
STMV-2
SAW TOOTH WAVE GEN.
SWEEP AMP.

1948

La teoría de la información

Claude Elwood Shannon (1916–2001)

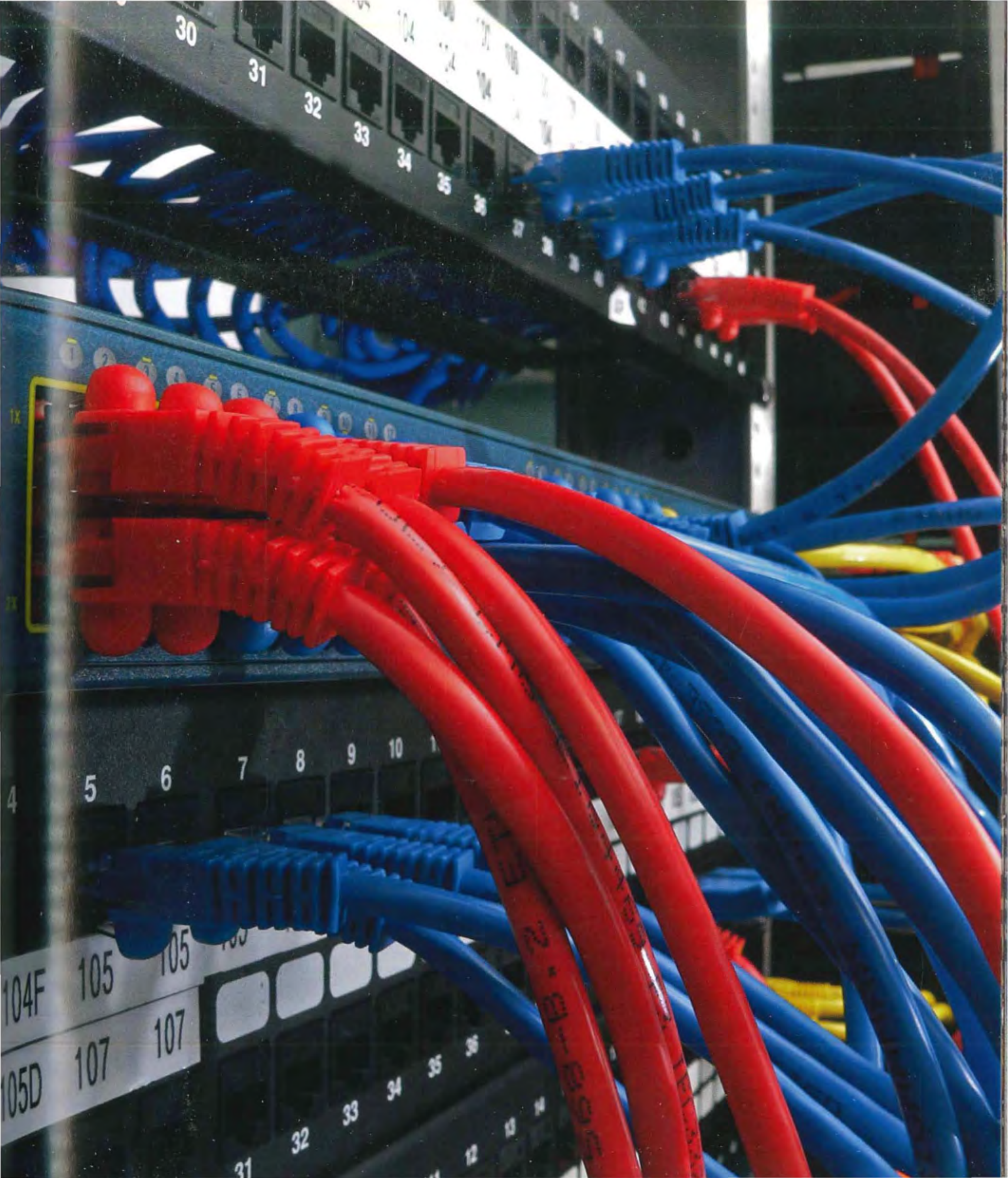
Los adolescentes ven la televisión, navegan por Internet, reproducen sus DVD y hablan eternamente por teléfono, por lo general, sin darse cuenta de que las bases de esta era de la información fueron establecidas por el matemático estadounidense Claude Shannon, que en 1948 publicó *A Mathematical Theory of Communication*. La teoría de la información es una disciplina de matemáticas aplicadas que se ocupa de la cuantificación de datos y ayuda a los científicos a comprender la capacidad de diversos sistemas para almacenar, transmitir y procesar información. La teoría de la información también hace referencia a la compresión de datos y a los métodos para reducir el ruido y las tasas de error para facilitar el almacenamiento y la comunicación fiables de la mayor cantidad de datos posibles a través de un canal. La medida de la información, conocida como «entropía de la información», suele expresarse a través del porcentaje de bits necesarios para el almacenamiento o la comunicación. Una gran parte de las matemáticas que subyace a la teoría de la información fue establecida por Ludwig Boltzmann y J. Willard Gibbs en el ámbito de la termodinámica. Alan Turing también utilizó ideas similares al descifrar las claves alemanas de Enigma durante la Segunda Guerra Mundial.

La teoría de la información afecta a una diversa serie de campos, que van desde las matemáticas y la informática hasta la neurobiología, la lingüística y los agujeros negros. La teoría de la información presenta aplicaciones prácticas como el desciframiento de códigos y la recuperación de errores en las películas en DVD. Según un artículo publicado en Fortune en 1953: «No se exageraría al decir que el progreso del hombre en épocas de paz y la seguridad en momentos de guerra dependen en mayor medida de las útiles aplicaciones de la teoría de la información que de las demostraciones físicas, ya sea en bombas o en plantas energéticas o en los famosos trabajos de ecuaciones de Einstein».

Claude Shannon murió en 2001, a la edad de 84 años, tras una larga lucha contra la enfermedad de Alzheimer. En un momento de su vida fue un excelente malabarista, monociclista y jugador de ajedrez. Por desgracia, debido a su enfermedad no pudo contemplar la era de la información que él mismo ayudó a crear.

VÉASE TAMBIÉN El álgebra de Boole (1854), Las máquinas de Turing (1936) y El código Gray (1947).

La teoría de la información ayuda a los tecnólogos a comprender la capacidad de diversos sistemas para almacenar, transmitir y procesar información. La teoría de la información presenta aplicaciones en campos que van desde la informática a la neurobiología.



30
31
32
33
34
35
36
5
6
7
8
9
10
104F
105
105
105D
107
107

1948

La calculadora Curta

Curt Herzstark (1902–1988)

Muchos historiadores de ciencia consideran que la Curta fue la primera calculadora mecánica portátil que tuvo éxito comercial. Desarrollada por el judío de origen austriaco Curt Herzstark durante su reclusión en el campo de concentración de Buchenwald, la calculadora de mano Curta podía realizar operaciones de multiplicación, suma, resta y división. Por lo general, el cuerpo cilíndrico de una Curta se sostenía con la mano izquierda y presentaba ocho deslizadores para introducir los números.

En 1943, Herzstark fue acusado de «ayudar a judíos» y de mantener «contactos indecentes con mujeres arias». Con el tiempo, acabó en Buchenwald, donde las noticias acerca de sus conocimientos técnicos y sus ideas sobre máquinas de cálculo llevaron a los nazis a pedirle que realizara un dibujo de sus diseños de la calculadora. Esperaban poder regalarle a Hitler el aparato cuando terminase la guerra.

Tras la guerra, en 1946 el príncipe de Liechtenstein animó a Herzstark a que fundara una fábrica para realizar dichos aparatos, que pasaron a estar a disposición del público en 1948. Durante un tiempo, las Curtas se situaron entre las mejores calculadoras portátiles disponibles y se utilizaron de forma frecuente hasta la llegada de las calculadoras electrónicas en la década de 1970.

La Curta tipo I presentaba un contador de resultado de 11 dígitos. La Curta tipo II, que apareció en 1954, presentaba un contador de resultado de 15 dígitos. Durante un periodo de cerca de 20 años, se fabricaron aproximadamente 80.000 unidades de la Curta I y 60.000 de la Curta II.

Según el astrónomo y autor Cliff Stoll: «Tanto Johannes Kepler como Isaac Newton y Lord Kelvin se quejaban del tiempo que perdían realizando simples operaciones aritméticas [...] Ansiaban una calculadora de bolsillo que pudiera realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Que dispusiera de lectura digital y memoria. Con una interfaz sencilla y fácil de utilizar con los dedos. Pero hasta 1947 no se dispuso de ninguna. Fue entonces, y durante un cuarto de siglo, cuando las mejores calculadoras de bolsillo vinieron de Liechtenstein. En ese diminuto país de entorno alpino y refugio fiscal, Curt Herzstark creó la máquina de cálculo más ingeniosa de todos los tiempos para honrar la mano del ingeniero: la calculadora Curta».

VÉASE TAMBIÉN El ábaco (1200), La regla de cálculo (1621), El ordenador mecánico de Babbage (1822), La caja registradora Ritty Model I (1879), El analizador diferencial (1927) y HP-35: la primera calculadora científica de bolsillo (1972).

La calculadora Curta quizás sea la primera calculadora mecánica portátil que tuvo éxito comercial. Curt Herzstark desarrolló este aparato manual durante su reclusión en el campo de concentración de Buchenwald. Los nazis querían regalarle el aparato a Adolph Hitler.


CURTA

1949

El poliedro de Császár

Ákos Császár (nacido en 1924)

Los poliedros son sólidos construidos a partir de un conjunto de polígonos que se unen por sus aristas. ¿Cuántos poliedros existen en los que cada par de vértices esté unido por una arista? Al margen del tetraedro (pirámide triangular), el poliedro de Császár es el único poliedro conocido que no presenta diagonales, siendo una diagonal la línea que une dos vértices no conectados por una arista. Cabe indicar que el tetraedro presenta cuatro vértices, seis aristas, cuatro caras y ninguna diagonal. Una arista une cada par de esquinas.

Ákos Császár, un matemático húngaro, describió por primera vez el poliedro de Császár en 1949. En la actualidad, a través de la teoría combinatoria (el estudio de las formas de elegir y disponer objetos de grupos), los matemáticos saben que al margen del tetraedro, cualquier otro poliedro sin diagonales debe presentar, como mínimo, un orificio (túnel). El poliedro de Császár presenta un agujero (difícil de visualizar si no se tiene un modelo) y, desde un punto de vista topológico, es equivalente a un toro (rosquilla). Este poliedro tiene 7 vértices, 14 caras y 21 aristas y es el dual del **poliedro de Szilassi**. En los poliedros duales los vértices de un poliedro se corresponden con las caras del otro poliedro.

David Darling escribe: «No se sabe si existen otros poliedros en los que cada par de vértices se unan a través de una arista. La siguiente figura posible tendría 12 caras, 66 aristas, 44 vértices y 6 túneles aunque parece ser una configuración poco probable como, de hecho, en una medida incluso mayor, lo es cualquier miembro más complejo de esta curiosa familia».

Martin Gardner apunta que en la amplia gama de aplicaciones del poliedro de Császár se encuentran «el estudio de la estructura esquelética de un sólido extraño [...] [Encontramos] algunos isomorfismos sorprendentes relativos al mapa de siete colores de un toro, el menor "plano proyectivo finito", la solución a un antiguo puzle sobre trillizas con siete muchachas, la solución a un problema sobre un torneo de bridge de ocho equipos y la construcción de un nuevo tipo de cuadrado mágico conocido como cuadrado de Room».

VÉASE TAMBIÉN Los sólidos platónicos (350 a. C.), Los poliedros arquimedianos (c. 240 a. C.), La fórmula de Euler para los poliedros (1751), El juego icosiano (1857), El teorema de Pick (1899), La cúpula geodésica (1922), La teoría de Ramsey (1928), El poliedro de Szilassi (1977), Spidrones (1979) y La solución del holiedro (1999).

El poliedro de Császár. Al margen del tetraedro, el poliedro de Császár es el único poliedro conocido que no presenta diagonales, siendo una diagonal la línea que une dos vértices no conectados por una arista.



1950

El equilibrio de Nash

John Nash (nacido en 1928)

El matemático estadounidense John Nash recibió en 1994 el premio Nobel de Economía. El trabajo por el que fue galardonado apareció casi medio siglo antes en su tesis doctoral de apenas 27 páginas, que redactó a la edad de 21 años.

En teoría de juegos, el equilibro de Nash hace referencia a los juegos en los que participan dos o más jugadores y en los que ningún jugador mejora sus ganancias si decide cambiar de estrategia unilateralmente. Si cada jugador ha elegido una estrategia y ningún jugador puede beneficiarse cambiándola mientras las estrategias del resto de jugadores permanezcan invariables, se dice que el conjunto de estrategias elegidas está en *equilibrio de Nash*. En 1950 Nash fue el primero en mostrar en su tesis «Juegos no cooperativos» que los equilibrios de Nash para estrategias mixtas deben existir en todos los juegos finitos con un número arbitrario de jugadores.

La teoría de juegos había hecho grandes progresos en los años 20, con el trabajo de John von Neumann, que culminó en su libro *Theory of Games and Economic Behavior* que tenía como coautor a Oskar Morgenstern. Estos se centraron en los juegos de «suma cero» según los cuales los intereses de dos jugadores eran estrictamente opuestos. En la actualidad, la teoría de juegos es importante en el estudio de los conflictos humanos y la negociación, así como en el comportamiento de las poblaciones animales.

En cuanto a Nash, en 1958 *Fortune* lo destacó por sus logros en teoría de juegos, geometría algebraica y teoría no lineal, señalándolo como el matemático más brillante de la generación de jóvenes matemáticos. Parecía destinado a seguir obteniendo éxitos pero en 1959 fue internado en un centro y se le diagnosticó esquizofrenia. Creía que los extraterrestres le habían hecho emperador de la Antártida y que algo tan simple como la frase de un periódico podía encerrar un significado oculto y extremadamente importante. Nash señaló una vez: «No me atrevería a decir que existe una relación directa entre las matemáticas y la locura, aunque no cabe duda de que los grandes matemáticos presentan características maníacas, delirios y síntomas de esquizofrenia».

VÉASE TAMBIÉN Hex (1942), La estrategia del juego del cerdo (1945), El dilema del prisionero (1950), La paradoja de Newcomb (1960) y La solución matemática de las damas (2007).

IZQUIERDA: *El ganador del premio Nobel, John Nash. Esta fotografía fue realizada en 2006 en un simposio sobre teoría de juegos en la Universidad de Colonia, en Alemania.* DERECHA: *Las matemáticas de la teoría de juegos podrían utilizarse para dar forma a escenarios del mundo real en campos que van desde las ciencias sociales hasta las relaciones internacionales y la biología. Existen estudios recientes que han aplicado el equilibrio de Nash a modelos que simulan colmenas de abejas que compiten por recursos naturales.*





1950

La paradoja de la línea de costa

Lewis Fry Richardson (1881–1953), **Benoit Mandelbrot** (nacido en 1924)

Si se intentara medir una costa o el límite entre dos naciones, el valor de esta medición dependería de la longitud de la vara de medir utilizada. Conforme la vara de medida disminuyera en longitud, la medición sería más sensible a las curvas cada vez más pequeñas del contorno y, en principio, la longitud de la costa tendería a infinito conforme la longitud de la vara se acercara a cero. El matemático británico Lewis Richardson consideró este fenómeno en su intento de establecer una correlación entre la aparición de guerras y la frontera que separa dos o más naciones (llegó a la conclusión de que el número de guerras de un país era proporcional al número de países con los que limita). A partir del trabajo de Richardson, el matemático franco-estadounidense Benoit Mandelbrot, añadió y sugirió que la relación entre la longitud de la vara de medir (ε) y la longitud total aparente *(L)* de una costa podía expresarse a través del parámetro *D*, la dimensión fractal.

Se puede estimar el valor de *D* a través del estudio de la relación entre el número *N* de varas de medir y la longitud ε. Con respecto a una curva suave como un círculo, tenemos $N(\varepsilon) = c/\varepsilon$, donde c es una constante. Sin embargo, con respecto a una curva fractal como una costa, esta relación pasa a ser $N(\varepsilon) = c/\varepsilon^D$. Si multiplicamos ambos lados de la fórmula por ε, la relación puede expresarse con respecto a la longitud de la vara de medir: $L(\varepsilon) = c.\varepsilon/\varepsilon^D$. *D* se corresponde de algún modo con la noción tradicional de dimensión (una línea es unidimensional y un plano es bidimensional) salvo que *D* puede ser una fracción. Debido a que una línea de costa es intrincada en diferentes escalas, apenas «rellena» una superficie y su dimensión se sitúa entre una línea y un plano. La estructura fractal implica que la ampliación repetida de su trazado revela unos niveles de detalle cada vez más sutiles. Mandelbrot indica que $D = 1{,}26$ para la costa de Gran Bretaña. Evidentemente, aunque para objetos reales nunca se podrán utilizar realmente varas de medir infinitesimalmente pequeñas, esta «paradoja» muestra cómo las características naturales presentan dimensiones fraccionarias al considerarlas en diferentes escalas de medida.

VÉASE TAMBIÉN La función de Weierstrass (1872), El copo de nieve de Koch (1904), La dimensión de Hausdorff (1918) y Los fractales (1975).

Si se utilizan varas de medir cada vez más pequeñas para medir la longitud de la costa de Inglaterra, la longitud de la costa parecerá aproximarse a infinito. Esta «paradoja» muestra cómo las características naturales expresan dimensiones fraccionarias al considerarlas en diferentes escalas de medida.



1950

El dilema del prisionero

Melvin Dresher (1911–1992), **Merrill Meeks Flood** (nacido en 1908), **Albert W. Tucker** (1905–1995)

Imagínese un ángel con dos prisioneros. *Ambos,* Caín y Abel son sospechosos de haberse colado de nuevo ilegalmente en el jardín del Edén. No existen pruebas suficientes contra ninguno de ellos. Si ninguno de los humanos confiesa, el ángel tendrá que rebajar la «pena» por entrar sin autorización y los dos hermanos serán condenados a vagar por el desierto durante seis meses únicamente. Si sólo uno de los hermanos confesara, este quedaría libre y el otro sería condenado a arrastrarse y tragar polvo durante treinta años. Por otra parte, si *tanto* Caín *como* Abel confesaran, cada uno vería reducida su pena a vagar por el desierto durante cinco años. Caín y Abel están separados, por lo que no pueden comunicarse. ¿Qué deberían hacer Caín y Abel?

Al principio, la solución al dilema parece sencilla: Ni Caín ni Abel deberían confesar para que se les condenara al castigo mínimo, vagar por el desierto durante seis meses. Sin embargo, es bastante posible que aunque Caín decidiese cooperar, Abel se viera tentado a traicionar a Caín a última hora, obteniendo así el mejor resultado posible, la libertad. Un importante enfoque teórico del juego expone que la situación lleva a que cada sospechoso confiese a pesar de que esto conlleve un castigo más duro que con la estrategia de cooperación y no confesión. El dilema de Caín y Abel indaga sobre el conflicto entre el bien individual y el bien colectivo.

El dilema del prisionero fue identificado formalmente en 1950 por Melvin Dresher y Merrill M. Flood. Albert W. Tucker estudiaba el dilema para comprender e ilustrar la dificultad de analizar los juegos de suma no nula, dilemas en los cuales la victoria de una persona no implica necesariamente el fracaso de la otra. Desde entonces, el trabajo de Tucker ha dado lugar a una ingente cantidad de publicaciones en disciplinas que van desde la filosofía y la biología hasta la sociología, las ciencias políticas y la economía.

VÉASE TAMBIÉN Las paradojas de Zenón (c. 445 a. C.), La paradoja de la rueda de Aristóteles (c. 320 a. C.), La paradoja de San Petersburgo (1738), La paradoja del barbero (1901), La paradoja de Banach-Tarski (1924), El hotel infinito de Hilbert (1925), La paradoja del cumpleaños (1939), La estrategia del juego del cerdo (1945), El equilibrio de Nash (1950), La paradoja de Newcomb (1960) y La paradoja de Parrondo (1999).

El dilema del prisionero fue identificado en primer lugar y formalmente en 1950 por Melvin Dresher y Merrill M. Flood. Albert W. Tucker investigaba el dilema para comprender e ilustrar la dificultad de analizar los juegos de suma no nula, dilemas en los cuales la victoria de una persona no implica necesariamente el fracaso de la otra.



1952

Los autómatas celulares

John von Neumann (1903–1957), **Stanisław Marcin Ulam** (1909–1984), **John Horton Conway** (nacido en 1937)

Los autómatas celulares son una clase de sistemas matemáticos sencillos que pueden servir de modelo a una variedad de procesos físicos con comportamientos complejos. Las aplicaciones incluyen la simulación de la propagación de las especies de plantas, la proliferación de animales como los percebes, las oscilaciones de reacciones químicas y la propagación de incendios forestales.

Algunos de los autómatas celulares clásicos consisten en una cuadrícula de celdas que pueden presentar dos estados: ocupadas y vacías. La ocupación de una celda se determina a partir de un simple análisis matemático de la ocupación de las celdas vecinas. Los matemáticos definen las reglas, disponen el tablero de juego y dejan que este se desarrolle por sí solo en un mundo en forma de tablero de ajedrez. Aunque las reglas que rigen la creación de autómatas celulares son sencillas, los patrones que producen son muy complicados y, en ocasiones, parecen prácticamente aleatorios, como el flujo turbulento de un líquido o los resultados de un sistema criptográfico.

Los primeros trabajos en esta área comenzaron con Stanislaw Ulam en los años cuarenta, cuando modeló el crecimiento de cristales utilizando una simple rejilla. Ulam sugirió al matemático John von Neumann que utilizara un enfoque similar para modelar sistemas de autorreplicación (como robots que pudieran construir a otros robots) y hacia 1952, Von Neumann creó el primer autómata celular en 2D, con 29 estados posibles por celda. Von Neumann demostró matemáticamente que un diseño particular podría realizar copias infinitas de sí mismo en un universo celular dado.

El autómata bidimensional de dos estados más famoso es el Juego de la Vida inventado por John Conway y popularizado por Martin Gardner en la revista *Scientific American*. A pesar de sus reglas simples, se genera una impresionante diversidad de comportamientos y formas, incluyendo *planeadores*, a saber, disposiciones de celdas que se mueven por su universo y que incluso pueden interactuar para realizar cálculos. En 2002, Stephen Wolfram publicó "A New Kind of Science", un artículo que reforzó la idea de que los autómatas celulares pueden ser importantes en prácticamente todas las disciplinas de la ciencia.

VÉASE TAMBIÉN Las máquinas de Turing (1936) y La hipótesis del universo matemático (2007).

Caracola con patrones de autómatas celulares en su concha, derivados de la activación e inhibición de pigmentos en células vecinas. El patrón se parece al resultado de un autómata celular unidimensional, denominado autómata de regla 30.



1957

Las recreaciones matemáticas de Martin Gardner

Martin Gardner (1914–2010)

«Quizás un ángel del Señor estuviera vigilando un mar infinito de caos para luego agitarlo suavemente con el dedo. En este pequeño y temporal remolino de ecuaciones, nuestro cosmos adquirió forma».

Martin Gardner, *Order and Surprise*

Los autores de *Winning Ways for Your Mathematical Plays* escribieron de Martin Gardner que «aportó más matemáticas a más millones que ninguna otra persona». Allyn Jackson, editor auxiliar de la Sociedad Estadounidense de Matemáticas escribió que Gardner «abrió los ojos del público en general a la belleza y fascinación de las matemáticas e inspiró a muchos para seguir y hacer de ellas el trabajo de su vida». De hecho, varias ideas en matemáticas fueron sacadas a la palestra a través de los trabajos de Gardner antes de que aparecieran en otras publicaciones.

Martin Gardner es un escritor estadounidense que redactó la columna «Juegos Matemáticos» en la revista *Scientific American* de 1957 a 1981. También publicó más de 65 libros. Gardner estudió en la Universidad de Chicago, donde obtuvo el título de licenciatura en filosofía. La mayor parte de su extensa educación procedía de su gran pasión por la lectura y la correspondencia.

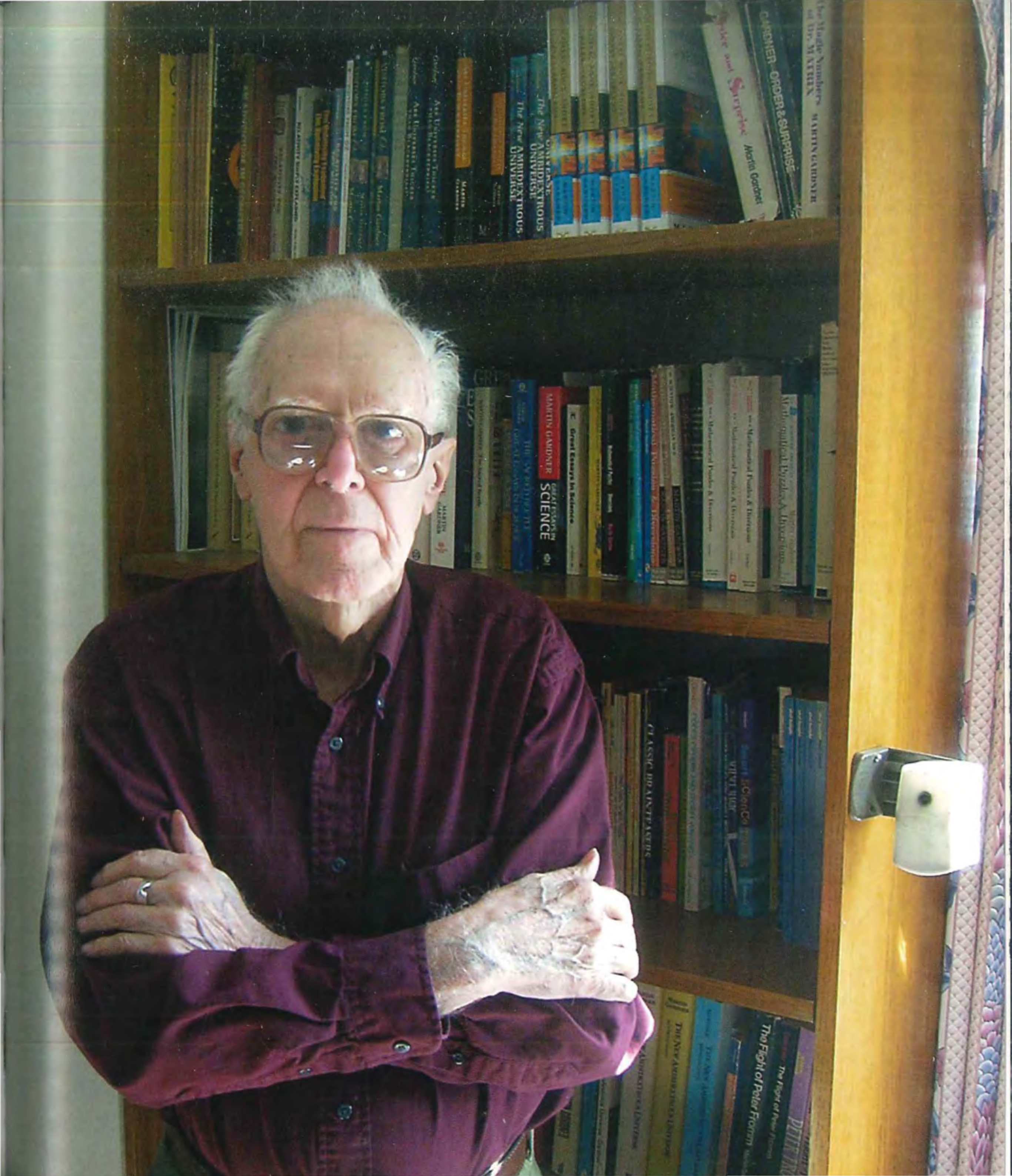


Según muchos matemáticos modernos, Gardner es la persona más importante dedicada a alimentar el interés por las matemáticas en Estados Unidos a lo largo de una parte significativa del siglo XX. Douglas Hofstadter se refirió a Gardner como «uno de los mejores intelectos que este país ha dado en este siglo». Los «juegos matemáticos» de Gardner abordaban temas como los flexágonos, el juego de la vida de Conway , los poliominós, el cubo Soma, **Hex,** los tangrams, **las teselas de Penrose, la criptografía de clave pública,** las obras de M.C. Escher y **los fractales.**

El primer artículo de Gardner en la revista *Scientific American,* sobre el tema de los hexaflexágonos (hexágonos flexibles que se pueden plegar) salió en diciembre de 1956. Gerry Piel, el editor, llamó a Gardner a su oficina y le preguntó si existía material similar suficiente para realizar una sección periódica en la revista. Gardner respondió que pensaba que sí. En la siguiente publicación (enero de 1957) salió la primera columna.

VÉASE TAMBIÉN Hex (1942), Los autómatas celulares (1952), Las teselas de Penrose (1973), Los fractales (1975), Criptografía de clave pública (1977) y NUMB3RS (2005).

IZQUIERDA: *Logotipo utilizado para la Reunión de 2008 de la conferencia de Gardner. Esta conferencia bianual se celebra en honor a Martin Gardner para promocionar la presentación de nuevas ideas en matemáticas recreativas, magia, rompecabezas, arte y filosofía. (El logotipo es de Teja Krašek.)* DERECHA: *Martin Gardner al lado de sus publicaciones: seis estanterías con sus publicaciones, que se remontan a 1931. (La fotografía se tomó en su casa de Oklahoma en marzo de 2006.)*


The New AMBIDEXTROUS UNIVERSE
ORDER & SURPRISE
Martin Gardner
MARTIN GARDNER
GREAT ESSAYS IN SCIENCE
Great Essays in Science
CLASSIC BRAINTEASERS
The Flight of Peter Fromm

La conjetura de Gilbreath

Norman L. Gilbreath (nacido en 1936)

En 1958, a raíz de unos garabatos en una servilleta, el matemático y mago estadounidense Norman L. Gilbreath presentó una hipótesis desconcertante sobre los números primos. Gilbreath escribió los primeros números primos, a saber, números mayores que 1, como 5 ó 13, que son divisibles únicamente por ellos mismos o por 1. Continuó en las siguientes filas restando los valores sucesivos y anotando el valor absoluto de las diferencias.

2,	3,	5,	7,	11,	13,	17,	19,	23,	29,	31,...
1,	2,	2,	4,	2,	4,	2,	4,	6,	2,...	
1,	0,	2,	2,	2,	2,	2,	2,	4,...		
1,	2,	0,	0,	0,	0,	0,	2,...			
1,	2,	0,	0,	0,	0,	2,...				
1,	2,	0,	0,	0,	2,...					
1,	2,	0,	0,	2,...						
1,	2,	0,	2,...							
1,	2,	2,...								
1,	0,...									
1,...										

Según la conjetura de Gilbreath, exceptuando la primera fila, el primer número de cada fila siempre es uno. Hasta ahora nadie ha encontrado una excepción, a pesar de las investigaciones realizadas hasta varios cientos de miles de millones de filas. El matemático Richard Guy escribió una vez que: «No parece probable que vayamos a ver una demostración de la conjetura de Gilbreath en un futuro próximo, aunque probablemente dicha conjetura sea cierta». Los matemáticos no están seguros de que la conjetura sea especialmente relevante en relación con los números primos ni de si se puede aplicar a cualquier secuencia que empiece con 2 y que continúe con números impares que se incrementen a un ritmo suficiente con suficientes huecos entre ellos.

Aunque la conjetura de Gilbreath no es tan importante desde un punto de vista histórico como muchas de las entradas de este libro, constituye un maravilloso ejemplo del tipo de problemas de fácil planteamiento que incluso un matemático principiante puede aportar y que, no obstante, puede requerir siglos de matemáticas para llegar a resolverlo. Puede que algún día tengamos al alcance una demostración, cuando la humanidad entienda mejor la distribución de los huecos entre los números primos.

VÉASE TAMBIÉN Los números primos generados por cigarras (c. 1 millón a. C.), La criba de Eratóstenes (240 a. C.), La conjetura de Goldbach (1742), La construcción de un heptadecágono regular (1796), Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801), La hipótesis de Riemann (1859), La demostración del teorema de los números primos (1896), La constante de Brun (1919), La espiral de Ulam (1963) y La conjetura de Andrica (1985).

Norman Gilbreath, en 2007 en la Universidad de Cambridge. El gran teórico de los números Paul Erdös dijo que pensaba que la conjetura de Gilbreath era cierta, a pesar de que probablemente pasarían 200 años hasta que pudiera demostrarse.



1958

Cómo evertir una esfera

Stephen Smale (nacido en 1930), **Bernard Morin** (nacido en 1931)

Durante muchos años, los topólogos supieron que era teóricamente posible darle la vuelta a una esfera, o evertirla, aunque no tenían la menor idea de cómo hacerlo. Cuando los gráficos por ordenador estuvieron disponibles para los investigadores, el matemático y experto en gráficos Nelson Max elaboró una animación que finalmente ilustraba la transformación de la esfera. En 1977 el vídeo de *Max Turning a Sphere Inside Out* se basó en el trabajo de 1967 de Bernard Morin, un topólogo ciego de nacionalidad francesa, sobre la eversión de la esfera. La animación se centra en cómo la eversión puede realizarse pasando la superficie a través de ella misma sin realizar ningún orificio ni pliegues. Los matemáticos pensaban que el problema no se podía resolver hasta que hacia 1958 el matemático estadounidense Stephen Smale demostró lo contrario. Con todo, nadie podía visualizar claramente el movimiento sin los gráficos.

Cuando hablamos de la eversión de una esfera, no se trata de darle la vuelta a un balón de playa estirando el balón desinflado por su boquilla y volviéndolo a inflar. Estamos hablando de una esfera sin orificios. Los matemáticos intentan visualizar una esfera hecha de una membrana fina que pueda estirarse e incluso atravesarse sin desgarrarse ni producirse curvas o pliegues evidentes. Evitar dichos pliegues marcados hacía de la eversión matemática de la esfera una tarea difícil.



A finales de los años noventa, las matemáticas dieron un paso adelante y descubrieron una vía geométricamente óptima, una que minimiza la energía necesaria para contraer la esfera hasta su transformación. Esta eversión óptima de la esfera, u *optieversión*, es en la actualidad la protagonista de una película de gráficos en color titulada *The Optiverse*. Sin embargo, no podemos utilizar los principios que se presentan en la película para darle la vuelta a un balón real cerrado. Esto se debe a que los balones y globos reales no están hechos de un material que pueda atravesarse a sí mismo. No es posible evertir objetos sin realizar un agujero en ellos.

VÉASE TAMBIÉN La cinta de Möbius (1858), La botella de Klein (1882) y La superficie de Boy (1901).

IZQUIERDA: *En la actualidad, los matemáticos saben exactamente cómo darle la vuelta a una esfera. No obstante, durante años, los topólogos no podían demostrar cómo realizar esta formidable labor geométrica.* DERECHA: *Modelo físico de Carlo H. Sequin de una etapa matemática del proceso de eversión de la esfera. (La esfera era inicialmente verde por fuera y roja por dentro.)*



1958

Los billares platónicos

Lewis Carroll (1832–1898), **Hugo Steinhaus** (1887–1972), **Matthew Hudelson** (nacido en 1962)

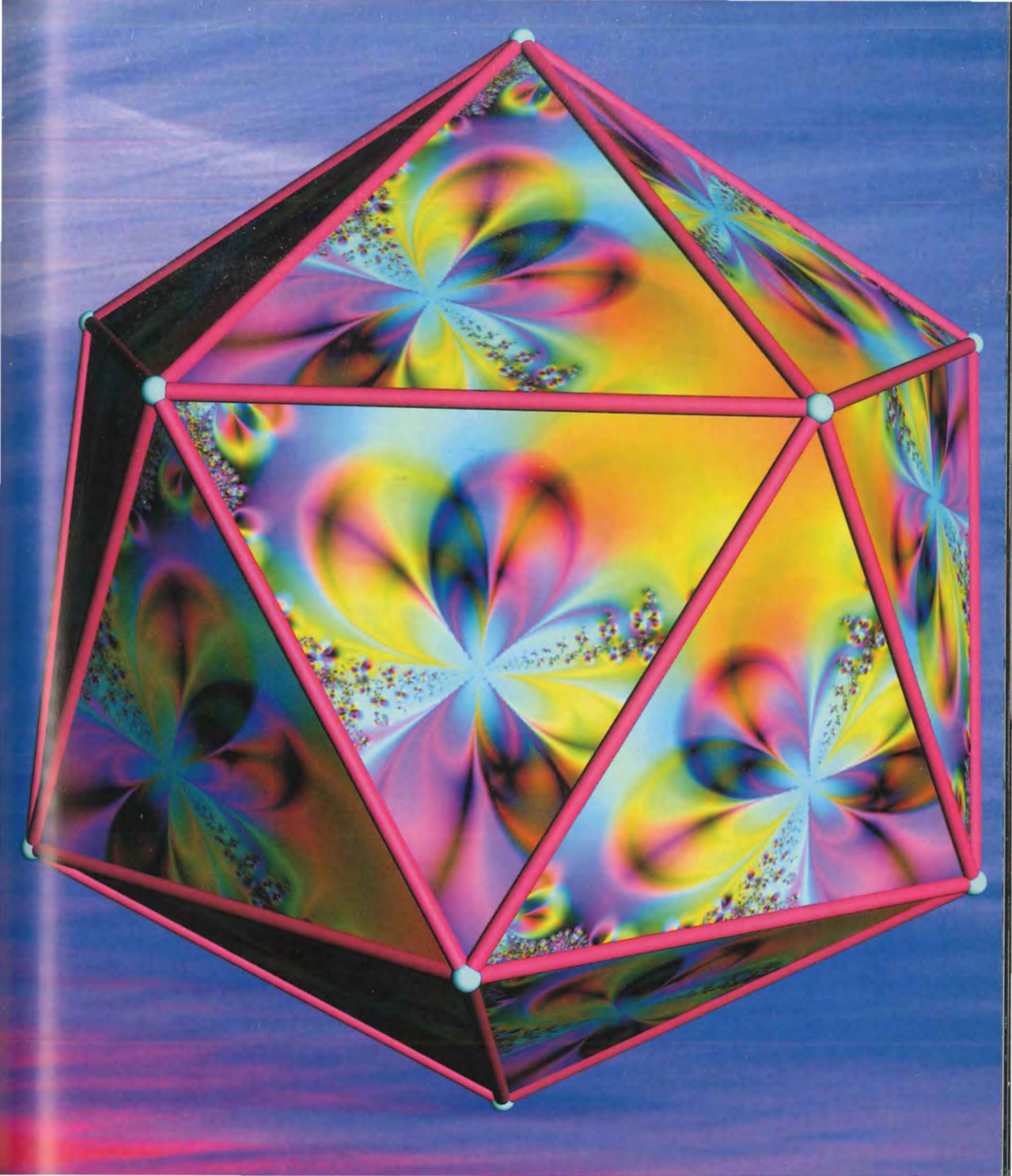
La cuestión de los billares platónicos ha intrigado a los matemáticos durante más de un siglo y hubo que esperar durante casi cincuenta años hasta que se encontró una solución completa aplicada al caso de un cubo. Imagínese una bola de billar que rebota dentro de un cubo. La fricción y la gravedad no se tienen en cuenta en este debate teórico. ¿Se podría encontrar una trayectoria que permitiera a la bola volver a su punto de partida tras golpear una vez en cada una de las paredes? El escritor y matemático inglés Lewis Carroll (1832–1898) fue el primero en plantear el problema.

En 1958 el matemático polaco Hugo Steinhaus publicó de forma amplia una solución que mostraba que dichas trayectorias existían en el caso de un cubo y en 1962 los matemáticos John Conway y Roger Hayward descubrieron trayectorias similares dentro de un tetraedro regular. Cada etapa de la trayectoria entre las paredes tiene la misma longitud para el cubo y el tetraedro. En teoría, la bola recorre la trayectoria de forma infinita. Sin embargo, nadie sabía con seguridad si estos tipos de trayectorias existían para otros **sólidos platónicos**.

Finalmente, en 1997 el matemático estadounidense Matthew Hudelson encontró interesantes trayectorias de una bola de billar por el interior de sólidos platónicos: el octaedro de ocho lados, el dodecaedro de doce y el icosaedro de veinte. Estas trayectorias de Hudelson impactaban en cada una de las paredes internas y finalmente volvían a sus puntos y direcciones de partida del desplazamiento. Hudelson utilizó un ordenador que le ayudó en su investigación. Su reto fue especialmente complicado, si se tiene en cuenta el gran número de posibilidades que tenían que investigarse en los casos del dodecaedro y el icosaedro. A fin de obtener una mejor percepción del problema en relación con estas formas, Hudelson creó un programa que generó más de 100.000 trayectorias iniciales y aleatorias y estudió las que chocaban con los 12 lados del dodecaedro y los 20 del icosaedro.

VÉASE TAMBIÉN Los sólidos platónicos (350 a. C.) y Los billares externos (1959).

Los matemáticos descubrieron trayectorias recurrentes para una bola de billar que rebota en cinco sólidos platónicos. Por ejemplo, existe una trayectoria cerrada y que entra en contacto con cada pared interior para una «bola que rebota» dentro del icosaedro de veinte lados, aquí en una representación de Teja Krašek.



1959

Los billares externos

Bernhard Hermann Neumann (1909–2002), **Jürgen Moser** (1928–1999), **Richard Evan Schwartz** (nacido en 1966)

El matemático británico de origen alemán Bernhard Neumann desarrolló en los años 50 el concepto de *billar externo* (BE). El matemático germano-estadounidense Jürgen Moser popularizó los billares externos en los años 70 como un modelo simplificado de los movimientos planetarios. Para experimentar con los billares externos dibuje un polígono. Coloque un punto x_0 fuera del polígono. Considérelo como el punto de partida de una bola de billar. La bola se mueve a lo largo de una línea recta que roza un vértice del polígono y continúa desplazándose hasta un nuevo punto x_1 de tal manera que el vértice se encuentra en el punto medio del segmento entre x_0 y x_1. Continúe el procedimiento con el siguiente vértice en el sentido de las agujas del reloj.

Neumann se preguntaba si dicha trayectoria u órbita alrededor del polígono convexo podría no tener límites de tal manera que la bola, con el tiempo, se perdiera en el infinito. En polígonos regulares, todas las trayectorias están delimitadas y no se alejan indefinidamente del polígono. En caso de que los vértices de los polígonos presenten coordenadas racionales (es decir, que puedan expresarse como fracciones), las trayectorias están delimitadas y son periódicas; con el tiempo vuelven a sus puntos de partida.

En 2007 Richard Schwartz, de la Universidad de Brown, mostró finalmente que los billares externos de Neumann podían dar lugar a una trayectoria sin límites en el plano euclídeo, demostrándolo en el caso de un cuadrilátero que se utiliza en las teselas de Penrose denominado cometa de Penrose. Schwartz también encontró tres amplias regiones octogonales en las cuales las trayectorias rebotan de forma periódica de una región a otra. Otras regiones dieron lugar a un comportamiento que convergía en un conjunto de puntos a partir de los cuales las trayectorias no presentaban límites. Al igual que otras demostraciones modernas en matemáticas, la primera demostración de Schwartz requirió el uso de un ordenador.

En cuanto a Neumann, se doctoró por la Universidad de Berlín en 1932. Cuando Hitler ascendió al poder en 1933, Neumann comprendió el riesgo que entrañaba su origen judío y voló hacia Ámsterdam y luego a Cambridge.

VÉASE TAMBIÉN Los billares platónicos (1958) y Las teselas de Penrose (1973).

Richard Schwartz demostró que la dinámica de los billares externos alrededor de una cometa de Penrose (el polígono central naranja) podía visualizarse a través de un complicado patrón de teselas. Los colores de las diferentes regiones poligonales ofrecen una indicación del comportamiento de las trayectorias con puntos finales en estas regiones.



1960

Los números de Sierpiński

Wacław Franciszek Sierpiński (1882–1969)

Según el matemático Don Zagier: «Aparentemente, no existen motivos para que un número sea primo y otro no lo sea. En cambio, al observar estos números uno tiene la sensación de estar ante uno de los inexplicables misterios de la creación». En 1960, el matemático polaco Wacław Sierpiński demostró que existen infinitos números enteros impares k, denominados números de Sierpiński, tal que $k \times 2^n + 1$ nunca es primo sea cual sea el número entero positivo n. Según Ivars Peterson: «Se trata de un resultado extraño. No parece haber una razón lógica para que estas expresiones particulares nunca den lugar a un número primo». Dado lo anterior, el problema de Sierpiński podría plantearse como «¿Cuál es el número de Sierpiński más pequeño?».

En 1962 el matemático estadounidense John Selfridge descubrió el número de Sierpiński más pequeño que se conoce, k = 78.557. En particular, demostró que cuando k = 78.557 todos los números de la forma $k \times 2^n + 1$ se pueden dividir por uno de los siguientes: 3, 5, 7, 13, 19, 37 o 73.

En 1967 Sierpiński y Selfridge establecieron la conjetura de que 78.557 es el número de Sierpiński más pequeño y, por consiguiente, la respuesta al problema de Sierpiński. En la actualidad, los matemáticos se preguntan si se descubrirá alguna vez un número de Sierpiński menor. Si se pudieran analizar todos los valores $k < 78.557$ y encontrar un número primo para cada uno de ellos, entonces no cabe duda de que lo sabríamos. En febrero de 2008, tan solo quedaban seis números candidatos que no se habían descartado como posibles números de Sierpiński más pequeños. El proyecto de computación distribuida Seventeen Or Bust está realizando pruebas con estos números restantes. Por ejemplo, en octubre de 2007 Seventeen Or Bust demostró que $33.661 \times 2^{7.031.232} + 1$, un número de 2.116.617 cifras es primo, de manera que se eliminó $k = 33.661$ como posible número de Sierpiński. Si los matemáticos pueden encontrar un primo con la forma adecuada para el resto de k, el problema de Sierpiński se habrá resuelto poniendo fin una investigación de casi cincuenta años.

VÉASE TAMBIÉN Los números primos generados por cigarras (c. 1 millón a. C.), La criba de Eratóstenes (240 a. C.), La conjetura de Goldbach (1742), La construcción de un heptadecágono regular (1796), Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801), La demostración del teorema de los números primos (1896), La constante de Brun (1919), La conjetura de Gilbreath (1958), La espiral de Ulam (1963), Erdös y la colaboración extrema (1971) y La conjetura de Andrica (1985).

Logotipo de Seventeen Or Bust, un proyecto de computación distribuida dedicado a determinar si 78.557 es el menor número de Sierpiński. Durante años, su sistema se ha aprovechado de la potencia de cálculo de cientos de ordenadores de todo el mundo, que abordan en grupo el problema.

Seventeen Or Bust

A Distributed Attack on the Sierpinski Problem

1963

El caos y el efecto mariposa

Jacques Salomon Hadamard (1865–1963), **Jules Henri Poincaré** (1854–1912), **Edward Norton Lorenz** (1917–2008)

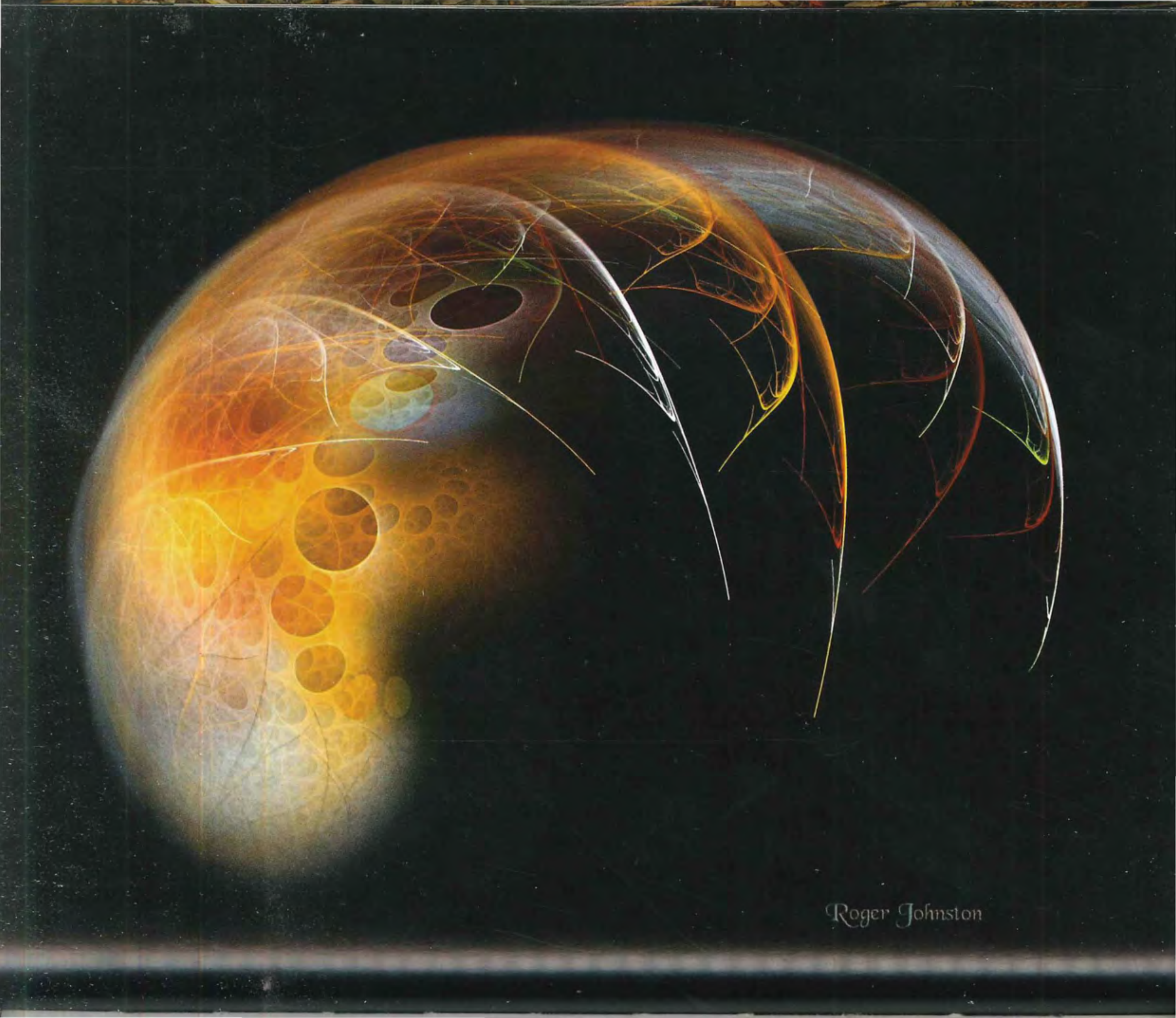
Para los hombres que vivieron en la Antigüedad, el caos era la representación de lo desconocido, el mundo de los espíritus, con imágenes amenazantes y aterradoras que reflejaban el miedo del hombre por lo incontrolable y la necesidad de moldear y organizar sus percepciones. En la actualidad, la teoría del caos es un campo que cada vez abarca más y es más interesante e implica el estudio de diversos fenómenos que dependen en gran medida de unas condiciones iniciales. Aunque el comportamiento caótico en ocasiones parece «aleatorio» e impredecible, suele obedecer a unas estrictas reglas matemáticas derivadas de ecuaciones que pueden formularse y estudiarse. Una importante herramienta de investigación que es útil en el estudio del caos son los gráficos informáticos. Desde los juguetes caóticos con luces que parpadean de forma aleatoria hasta los remolinos del humo de un cigarrillo, el comportamiento caótico suele producirse de forma irregular y desordenada. Otros ejemplos incluyen los patrones meteorológicos, ciertas actividades neurológicas y cardiacas, el mercado financiero y algunas redes eléctricas de ordenadores. La teoría del caos también se ha aplicado con frecuencia a una amplia gama de arte visual.

En ciencia, existen algunos ejemplos claros y evidentes de sistemas físicos caóticos, como la convección térmica en fluidos, el efecto *flutter* en aviones supersónicos, las reacciones químicas oscilantes, la dinámica de fluidos, el crecimiento de la población, las partículas que impactan en paredes que vibran de forma periódica, los diferentes movimientos de péndulos y rotores, los circuitos eléctricos no lineales y la inestabilidad elástica en elementos comprimidos.

Las primeras bases de la teoría del caos surgen hacia el año 1900 cuando matemáticos como Jacques Hadamard y Henri Poincaré estudiaban las complicadas trayectorias de cuerpos en movimiento. A principios de los años 60, Edward Lorenz, un meteorólogo e investigador del Instituto de Tecnología de Massachusetts, utilizó un sistema de ecuaciones para modelar la convección en la atmósfera. A pesar de la sencillez de sus fórmulas, inmediatamente descubrió uno de los elementos distintivos del caos: diminutos cambios en las condiciones iniciales pueden conducir a unos resultados diferentes e imprevisibles. En un trabajo de 1963, Lorenz explicó que cuando una mariposa bate las alas en una parte del mundo, puede afectar posteriormente al tiempo atmosférico a miles de kilómetros. En la actualidad, a esta idea se le conoce con el nombre del *efecto mariposa*.

VÉASE TAMBIÉN La teoría de las catástrofes (1968), La constante de Feigenbaum (1975), Los fractales (1975) y El atractor de Ikeda (1979).

Diseño matemático caótico, creado por Roger A. Johnston. Aunque el comportamiento caótico podría parecer «aleatorio» e impredecible, en ocasiones sigue reglas matemáticas obtenidas de ecuaciones que pueden ser objeto de estudio. Cambios muy pequeños en las condiciones iniciales pueden dar lugar a resultados muy diferente.


Roger Johnston

La espiral de Ulam

Stanisław Marcin Ulam (1909–1984)

En 1963, mientras hacía garabatos en un papel durante una aburrida reunión, el matemático estadounidense de origen polaco Stanisław Ulam descubrió una extraordinaria espiral que revela patrones de números primos. (Un número primo es un número mayor que 1, como 5 ó 13, que únicamente se puede dividir por sí mismo o por 1.) Partiendo de 1 en el centro de una espiral en el sentido contrario a las agujas del reloj, Ulam escribió números naturales consecutivos. A continuación rodeó con un círculo todos los números primos. Se dio cuenta de que conforme crecía la espiral, los números primos tendían a formar patrones en diagonal.

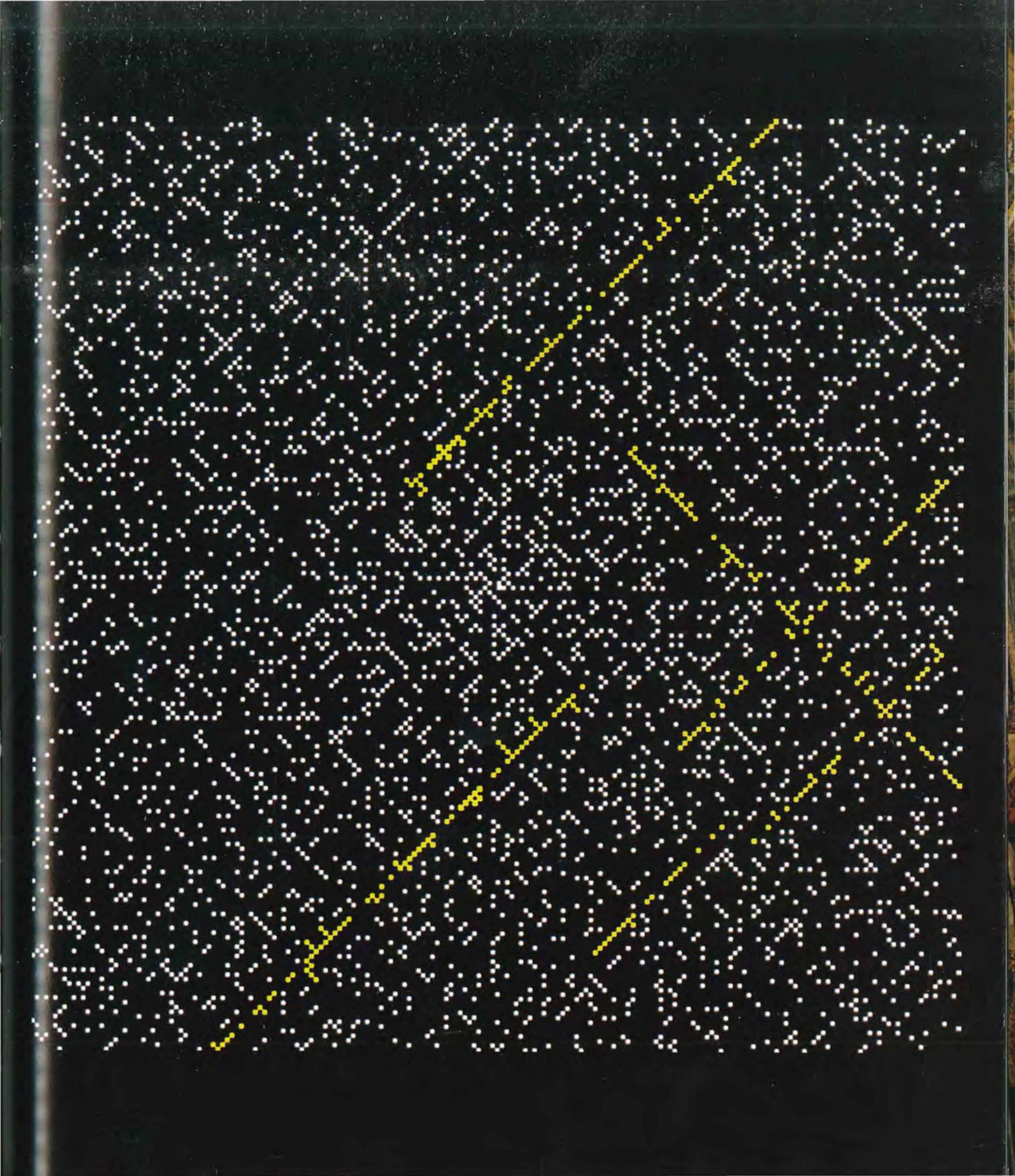
Como dejaron claro posteriormente los gráficos por ordenador, a pesar de que algunos tipos de estructuras diagonales podrían resultar simplemente de diagonales que contienen de forma alternativa números pares e impares, resulta fascinante que los números primos tiendan a colocarse en algunas líneas diagonales más que en otras. Quizás más importante que el propio descubrimiento de los patrones, la sencilla demostración de Ulam revela el uso del ordenador como una especie de microscopio que permite a los matemáticos visualizar estructuras que pueden dar lugar a nuevos teoremas. A principios de los años 60 este tipo de investigación dio lugar de forma gradual a la explosión de las matemáticas experimentales hacia finales del siglo XX.

Según Martin Gardner: «Las cuadrículas de la espiral de Ulam han aportado cierto grado de fantasía a las especulaciones sobre la enigmática combinación de orden y caos en la distribución de los primos...Los garabatos de Ulam en la zona oscura de las matemáticas no se deben tomar a la ligera. De hecho fue él quien hizo la sugerencia que le llevó a él y a Edward Teller a pensar en la "idea" que hizo posible la primera bomba termonuclear».

Además de sus aportaciones a las matemáticas y de su trabajo en el proyecto Manhattan para desarrollar la primera arma nuclear durante la Segunda Guerra Mundial, Ulam también fue famoso por su trabajo en el ámbito de los sistemas de propulsión de naves espaciales. Poco antes del estallido de la Segunda Guerra Mundial había escapado con su hermano de Polonia, aunque el resto de su familia murió en el Holocausto.

VÉASE TAMBIÉN Los números primos generados por cigarras (c. 1 millón a. C.), La criba de Eratóstenes (240 a. C.), La conjetura de Goldbach (1742), Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801), La demostración del teorema de los números primos (1896), El teorema de Johnson (1916), La constante de Brun (1919), La conjetura de Gilbreath (1958), Los números de Sierpiński (1960), Erdös y la colaboración extrema (1971), Criptografía de clave pública (1977) y La conjetura de Andrica (1985).

Un tramo de la espiral de Ulam de 200 x 200. En amarillo se destacan varios patrones diagonales. El sencillo argumento de Ulam revela que el uso del ordenador es como una especie de microscopio que permite a los matemáticos visualizar estructuras que pueden dar lugar a de nuevos teoremas.





La indecibilidad de la hipótesis del continuo

Georg Cantor (1845–1918), **Paul Joseph Cohen** (1934–2007)

En el artículo sobre **Los números transfinitos de Cantor**, hablamos sobre el menor de los números transfinitos, denominado alef cero, representado como $\aleph_0$, que «contabiliza» la cantidad de números enteros. Aunque existe un número infinito de números enteros, números racionales (números que pueden expresarse como fracciones) y números irracionales (como la raíz cuadrada de 2), el número infinito de irracionales es, en cierto sentido, superior al número infinito de racionales y números enteros. De forma similar, existen más números reales (que incluyen a los números racionales e irracionales) que números enteros.

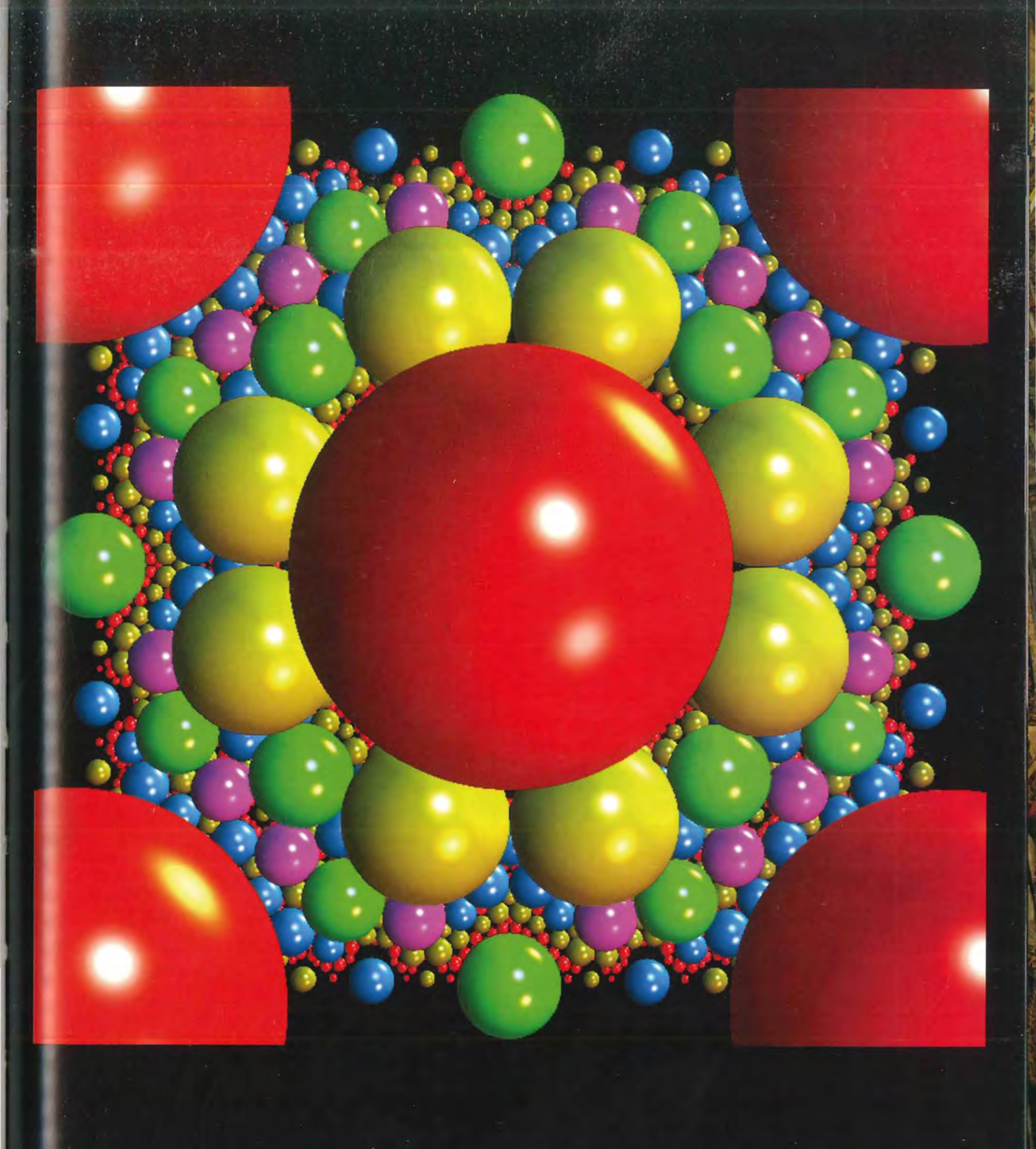
Para indicar esta diferencia, los matemáticos hacen referencia a la infinidad de racionales o números enteros con $\aleph_0$ y al número infinito de irracionales o números reales con C. Existe una relación simple entre C y $\aleph_0$, en particular, $C = 2^{\aleph_0}$. Aquí, C es la cardinalidad del conjunto de números reales, que en ocasiones se denomina el continuo.

Los matemáticos también contemplan infinitos superiores, simbolizados por $\aleph_1$, $\aleph_2$, etc. En este caso, el símbolo de la teoría de conjuntos $\aleph_1$ representa al menor conjunto infinito superior a $\aleph_0$, etc. La hipótesis del continuo de Cantor establece que $C = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. No obstante, la cuestión de si C equivale verdaderamente o no a $\aleph_1$ se considera indecidible en la teoría de conjuntos que nos ocupa. En otras palabras, los grandes matemáticos como Kurt Gödel demostraron que la hipótesis era una asunción consistente con los axiomas estándares de la teoría de conjuntos. Sin embargo, en 1963, el matemático estadounidense Paul Cohen demostró que también era consistente asumir que la hipótesis del continuo es falsa. Cohen nació en Long Branch, Nueva Jersey, en el seno de una familia judía, y se graduó en 1950 en el Instituto Stuyvesant de la ciudad de Nueva York.

Curiosamente, la cantidad de números racionales es la misma que la cantidad de números enteros, y la cantidad de irracionales es la misma que la de números reales. (Los matemáticos suelen utilizar el término «cardinalidad» al hablar sobre la «cantidad» de infinitos números).

VÉASE TAMBIÉN La paradoja de la rueda de Aristóteles (c. 320 a. C.), Los números transfinitos de Cantor (1874) y El teorema de Gödel (1931).

A pesar de su difícil asimilación, se pueden explorar diferentes infinitudes mediante el uso de gráficos informáticos, tal como se hace en esta interpretación de los números racionales gaussianos. En este caso, las posiciones de las esferas representan la fracción compleja p/q. Las esferas se sitúan en el plano complejo en p/q y presentan radios igual a $1/(2q\bar{q})$.



1965

Superhuevo

Piet Hein (1905–1996)

Aproximadamente hacia 1965, el científico, diseñador e inventor danés Piet Hein popularizó el superhuevo, también conocido como el super-elipsoide, un objeto que inspiró belleza y fascinación porque se mantenía sobre cualquier extremo con una estabilidad espeluznante. La forma tridimensional se consigue utilizando una superelipse, definida por la fórmula $|x/a|^{2,5} + |y/b|^{2,5} = 1$, donde $a/b = 4/3$, y girando esta curva alrededor del eje x. De forma más general, podemos presentar la ecuación de la superelipse como $(|x|^{2/a} + |y|^{2/a})^{a/b} + |z|^{2/b} = 1$ donde a y b son valores mayores que cero.

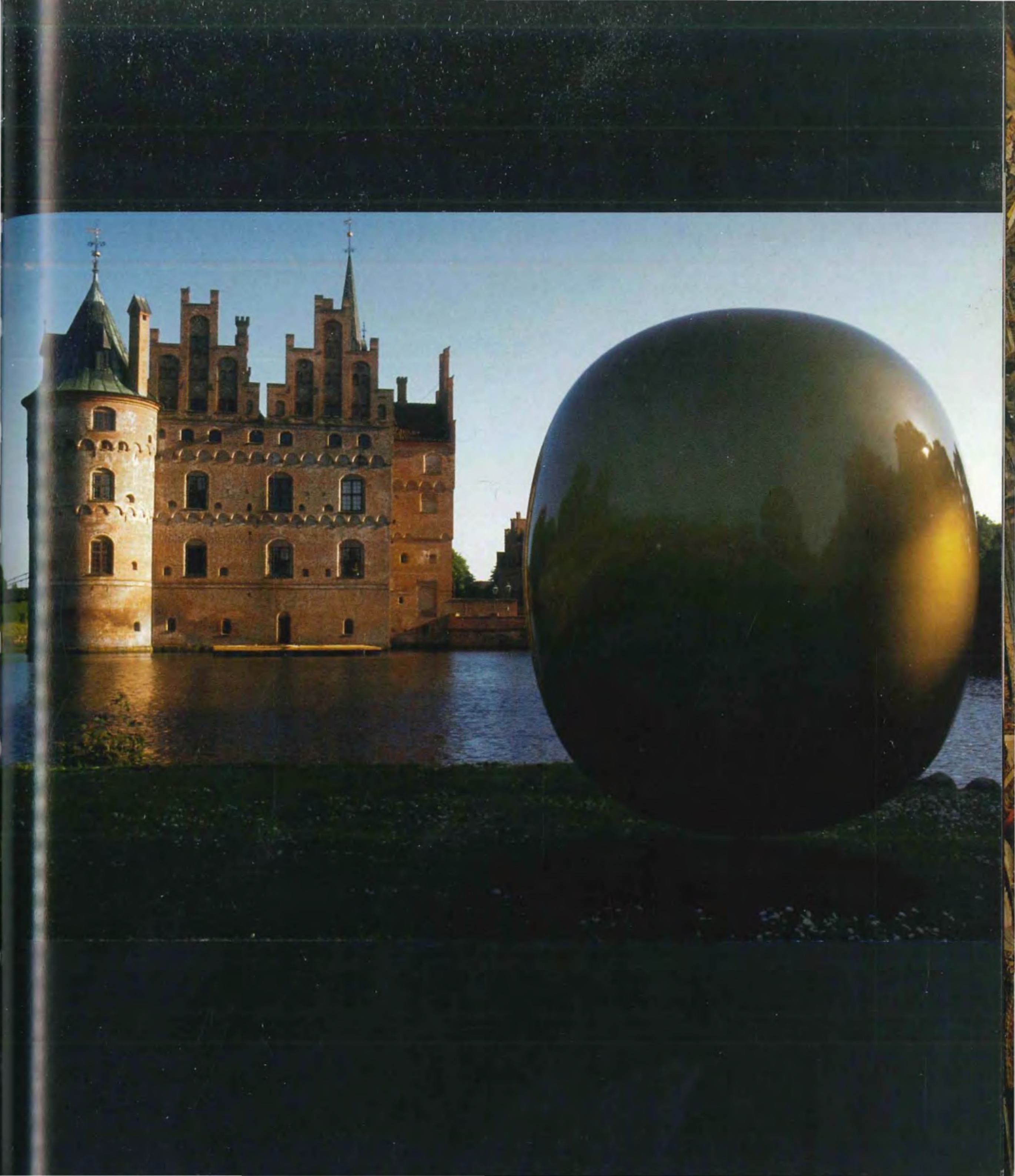
Los superhuevos de Hein, fabricados en varios materiales, se hicieron populares como juguetes y objetos novedosos en los años 60. En la actualidad, el diseño está en todas partes. Los superhuevos se utilizan como candeleros, en diseños de mobiliario, como «cubito de hielo» de acero inoxidable relleno de líquido que enfría las bebidas, etc. El superhuevo fue «puesto» por primera vez en 1965, cuando una versión de bolsillo fue fabricada y puesta a la venta por Skjøde en Skjern, Dinamarca. En 1971, el superhuevo más grande del mundo, hecho de metal y con un peso de casi una tonelada se colocó en los exteriores de Kelvin Hall, en Glasgow.

El matemático francés Gabriel Lamé (1795–1870) trabajó antes que Hein con la forma más general de la superelipse, aunque este último fue el primero en crear el superhuevo y es célebre por popularizar sus propias versiones en ámbitos como el de la arquitectura, el mobiliario e incluso el urbanismo.

La superelipse también se utilizó como forma para una rotonda en Estocolmo, Suecia. La elipse no era adecuada porque sus extremos acabados en punta podrían afectar al flujo continuo de tráfico que se producía en la zona, practicamente rectangular. En 1959, se le pidió a Hein su opinión sobre el asunto. Martin Gardner escribió sobre la carretera de Estocolmo: «Las curvas de Hein ha demostrado ser excepcionalmente satisfactorias, no son ni demasiado redondas ni demasiado ortogonales, sino que son una feliz combinación de la belleza elíptica y rectangular. Estocolmo aceptó inmediatamente la superelipse de exponente 2,5 [con $a/b = 6/5$] como esencial reclamo de su nuevo centro...».

VÉASE TAMBIÉN El astroide (1674).

El superhuevo de Piet Hein, colocado en el foso del castillo de Egeskov en Kvaerndrup, isla de Fionia, Dinamarca. El castillo, construido a mediados de 1550, es uno de los «castillos de agua» del Renacimiento mejor conservado. En su origen, al castillo tan solo podía accederse a través de un puente levadizo.



1965

La lógica difusa

Lotfi Zadeh (nacido en 1921)

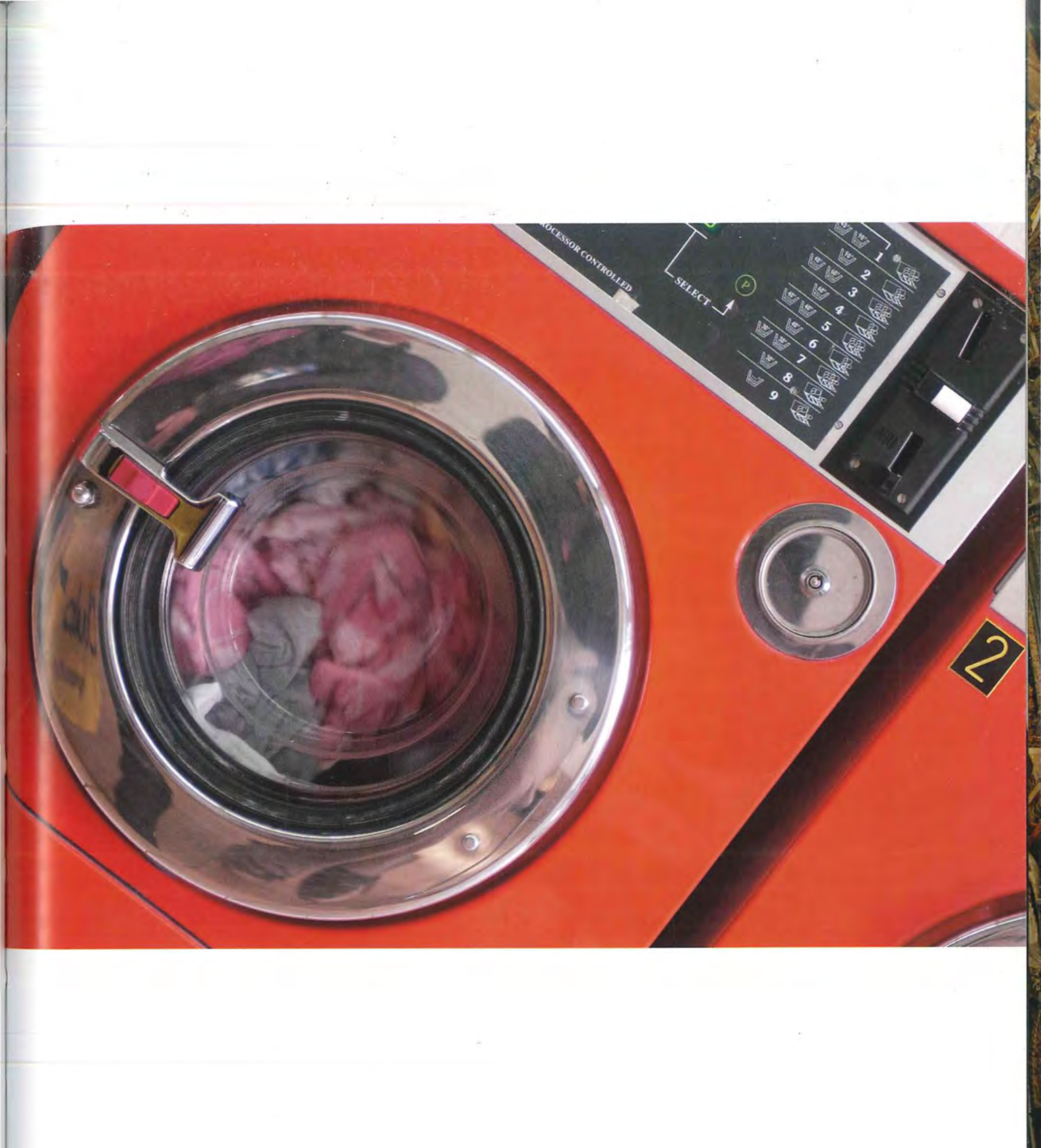
La lógica clásica bivalente hace referencia a proposiciones que son verdaderas o falsas. La lógica difusa (LD) ofrece una gama continua de valores verdaderos y fue introducida por el matemático y científico informático Lotfi Zadeh, que creció en Irán y se trasladó a Estados Unidos en 1944. La LD presenta una amplia variedad de aplicaciones prácticas y se deriva de la teoría de conjuntos difusos, que se centra en elementos de un conjunto que presentan diferentes grados de pertenencia. Zadeh publicó su pionero trabajo matemático sobre conjuntos difusos en 1965 y en 1973 aportó los detalles de la LD.

Como ejemplo, consideremos un sistema de control de temperatura para un aparato. Podría existir una función de pertenencia para los conceptos de frío, tibio y caliente. Una medición simple podría estar formada por tres valores como «no frío», «ligeramente tibio» y «ligeramente caliente», que se podrían utilizar para controlar el aparato. Zadeh creía que si los controladores de feedback pudieran programarse para utilizar datos imprecisos y dudosos, podrían ser más efectivos y fáciles de implementar. En cierto sentido, este enfoque se parece a la forma en que a veces la gente toma decisiones.

La metodología de la LD tuvo unos comienzos difíciles y a Zadeh le costó encontrar una revista técnica que publicara su trabajo de 1965, quizás debido a la reticencia a que la «vaguedad» entrara en el campo de la ingeniería. Según el escritor Kazuo Tanaka: «El punto de inflexión para la lógica difusa se produjo en 1974 [cuando] Ebraham Mamdani, de la Universidad de Londres, aplicó la lógica difusa para [...] controlar una simple máquina de vapor...». En 1980, la LD se utilizó para controlar un horno de cemento. Varias empresas japonesas habían utilizado la LD para controlar los procesos de purificación del agua y sus sistemas de trenes. Desde entonces, la LD también se ha utilizado para controlar las acererías, las cámaras de enfoque automático, las lavadoras, los procesos de fermentación, los controles de motores de automóviles, el sistema de freno antibloqueo, el sistema de revelado de películas en color, el tratamiento del cristal, los programas informáticos utilizados en el mercado financiero y sistemas utilizados para el reconocimiento de diferencias sutiles en idiomas hablados y escritos.

VÉASE TAMBIÉN El *Órganon* de Aristóteles (c. 350 a. C.), El álgebra de Boole (1854), Los diagramas de Venn (1880), *Principia Mathematica* (1910-1913) y El teorema de Gödel (1931).

La lógica difusa se ha utilizado en el diseño de lavadoras eficientes. Por ejemplo, la patente estadounidense 5.897.672, expedida en 1999, describe el uso de la lógica difusa para la detección de la proporción relativa de varios tipos de tela presentes en una colada de ropa de una lavadora.


OCESSOR CONTROLLED
SELECT
P
1
2
3
4
5
6
7
8
9
2

1966

Locura instantánea

Frank Armbruster (nacido en 1929)

De niño, nunca llegué a resolver el juego de los cubos de colores llamado Locura instantánea. No tendría que haberme sentido demasiado mal, ya que existen 41.472 formas diferentes de ordenar los cuatro cubos en fila, de las cuales, tan solo 2 son las soluciones. Un enfoque ensayo-error nunca habría funcionado.

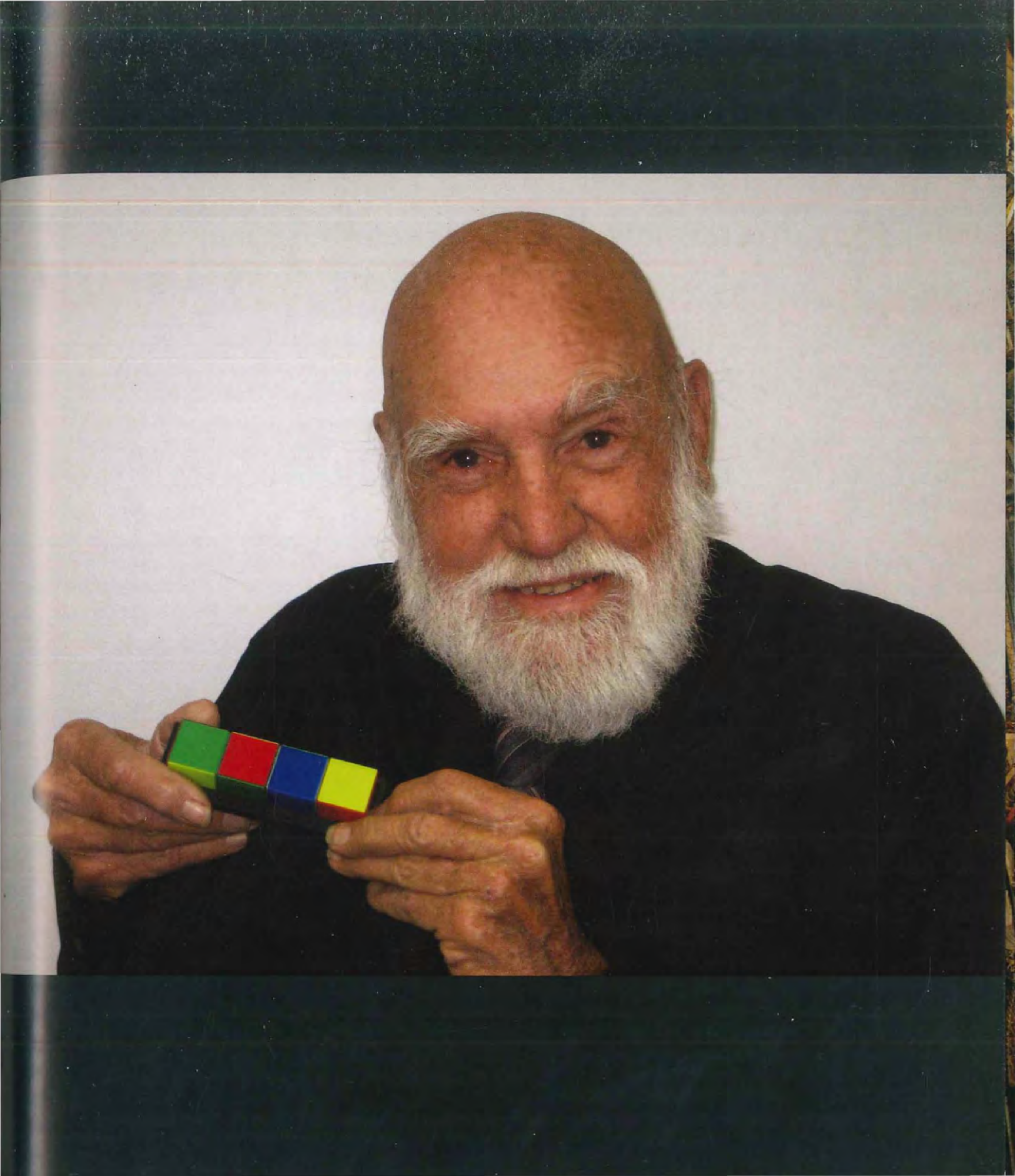
El rompecabezas es aparentemente sencillo, al estar formado por cuatro cubos que presentan en cada una de sus seis caras un color de los cuatro utilizados. El objetivo consiste en ordenar los cuatro cubos en fila de manera que solo aparezca un color en cada lado de la fila de cubos. Debido a que cada cubo tiene 24 orientaciones posibles, existe un máximo de $4! \times 24^4 = 7.962.624$ posiciones. Sin embargo, el número puede reducirse a 41.472 soluciones, en parte debido a que los cubos pueden apilarse en cualquier orden sin que esto varíe la solución.

Los matemáticos representan las caras de colores de los cubos como un grafo a fin de encontrar modos eficaces de resolución del puzle. Con este enfoque, cada cubo se representa mediante un grafo de los colores que aparecen en pares de caras opuestas. Según el periodista matemático Ivars Peterson: «Por lo general, las personas que están familiarizadas con la teoría de grafos pueden encontrar la solución en minutos. En realidad, el rompecabezas se puede utilizar como una lección ingeniosa de pensamiento lógico».

La moda por el juego Locura instantánea se disparó cuando el consultor educativo Frank Armbruster concedió a Parker Brothers una licencia del rompecabezas, que vendió más de 12 millones de copias a finales de los años sesenta. Hacia 1900 también se hizo popular un rompecabezas similar de cubos de colores que por entonces se llamaba *Great Tantalizer.* Armbruster me escribió y me dijo: «Cuando me dieron un modelo del *Great Tantalizer* en 1965, vi las posibilidades de usarlo para enseñar combinaciones y permutaciones. El primer modelo que tuve era de madera con los lados pintados. Yo vendí la posterior versión de plástico, la empaqueté con la solución y un cliente me sugirió el nombre, que registré. Entonces Parker Brothers me hizo una oferta que no pude rechazar».

VÉASE TAMBIÉN La *Théorie du Baguenodier* de Gros (1872), El rompecabezas del quince (1874), La torre de Hanoi (1883), Hex (1942) y El cubo de Rubik (1974).

Frank Armbruster, con su famoso rompecabezas, Locura instantánea. Existen 41.472 formas diferentes de ordenar los cuatro cubos en fila, de las cuales, tan solo dos son las soluciones. Se vendieron más de 12 millones de rompecabezas a finales de los sesenta.



1967

El programa de Langlands

Robert Phelan Langlands (nacido en 1936)

En 1967, Robert Langlands, un profesor de matemáticas de Princeton de 30 años, escribió una carta al famoso teórico de números André Weil (1906–1998), en la que le pedía su opinión sobre algunas ideas matemáticas nuevas. «Si está dispuesto a leer [mi carta] como puras especulaciones, se lo agradecería. De lo contrario, estoy seguro de que tiene una papelera». Según la escritora de ciencia Dana Mackenzie, Weil nunca le respondió, aunque la carta de Langlands se convirtió en la «piedra de Roseta» que unió dos ramas diferentes de las matemáticas. En particular, Langlands postulaba que existía una equivalencia entre representaciones de Galois (que describen relaciones entre soluciones para ecuaciones estudiadas en teoría de números) y formas automórficas (funciones especialmente simétricas como la función coseno).



El programa de Langlands es un campo tan fértil que permitió obtener dos medallas Fields a otros matemáticos. Las conjeturas de Langlands surgieron, en parte, del esfuerzo realizado para encontrar versiones generales de los patrones que rigen la forma en que los números enteros pueden descomponerse en sumas de productos de otros números enteros.

Según *The Fermat Diary*, el programa de Langlands podría considerarse una gran teoría unificada de las matemáticas que sugiere que «las matemáticas algebraicas, que incluyen a las ecuaciones, y las matemáticas analíticas, que incluyen el estudio de curvas suaves y variaciones continuas, están íntimamente relacionadas». Las conjeturas del programa de Langlands «son como una catedral, porque encajan de una forma muy hermosa». Sin embargo, las demostraciones de las conjeturas son complicadas y algunos matemáticos piensan que se tardarán siglos en completar el programa de Langlands.

El matemático Stephen Gelbart escribió que: «[El] programa de Langlands es una síntesis de varios temas importantes de la teoría clásica de números. También es, de forma más significativa, un programa para la investigación del futuro. Este programa surgió hacia 1967 en forma de una serie de conjeturas y posteriormente ha influido en la teoría de números en gran parte del mismo modo que las conjeturas de A. Weil trazaron el rumbo de la geometría algebraica desde 1948».

VÉASE TAMBIÉN La teoría de grupos (1832) y La medalla Fields (1936).

IZQUIERDA: *Robert Langlands.* DERECHA: *El programa de Langlands asocia dos ramas diferentes de las matemáticas e implica conjeturas que suelen compararse con una catedral porque encajan de forma elegante. El programa de Langlands podría considerarse una gran teoría unificada de las matemáticas que podría tardar siglos en dilucidarse completamente.*



1967

El juego del drago

John Horton Conway (nacido en 1937) **y Michael S. Paterson** (nacido en 1942)

Los matemáticos John H. Conway y Michael S. Paterson inventaron el juego del drago en 1967 cuando ambos se encontraban en la Universidad de Cambridge. El adictivo juego presenta unas propiedades matemáticas fascinantes. Conway escribió a Martin Gardner: «Al día siguiente de la aparición del juego del drago, parecía que todo el mundo jugaba [...] buscando posiciones ridículas o fantásticas. Algunos ya estaban trazando puntos en toros, botellas de Klein, etc. y pensando en versiones de dimensiones superiores».

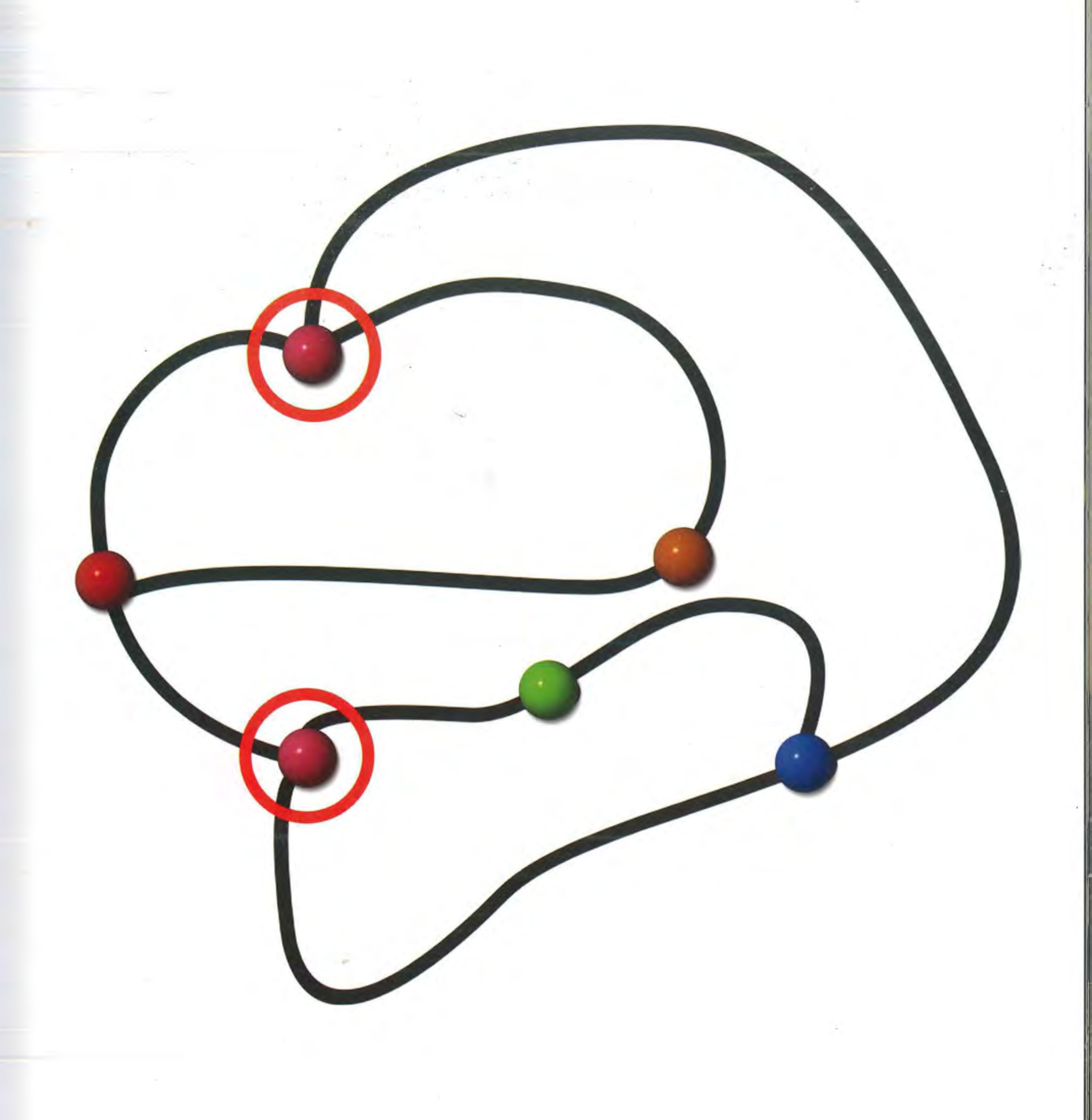
Para jugar contra un oponente se dibujan varios puntos en una hoja de papel. Para realizar un movimiento, dibuje una curva entre dos puntos o un bucle desde un punto hacia ese mismo punto. La curva no podrá cruzarse a sí misma ni a otra ya dibujada. A continuaci ón, coloque un nuevo punto en esa curva. Los jugadores juegan por turnos y gana el jugador que realiza el último movimiento. Cada punto tendrá, como máximo, tres tramos de curva conectadas al mismo.

Tras echar un vistazo rápido, se puede llegar a la conclusión de que una partida puede alargarse de forma infinita. Sin embargo, sabemos que cuando el juego del drago comienza con n puntos, tendrá como mínimo $2n$ movimientos y como máximo n. El primer jugador puede asegurar su victoria en partidas que empiecen con 3, 4 o 5 puntos.

En 2007, se utilizaron programas informáticos para determinar qué jugador ganaría todas las partidas con un máximo de 32 puntos. El estado de la partida de 33 puntos todavía es desconocido. Según los expertos Julien Lemoine y Simon Viennot: «A pesar del pequeño número de movimientos [...] resulta difícil determinar si ganará el primer jugador o el segundo, siempre que dichos jugadores jueguen de forma perfecta. La mejor demostración publicada y realizada enteramente a mano se debe a [Riccardo] Focardi y [Flaminia] Luccio, y muestra quién ganaría en una partida de 7 puntos». Según Ivars Peterson: «Las partidas pueden dar lugar a todo tipo de patrones de desarrollo imprevistos, lo que hace que establecer una estrategia ganadora se convierta en una propuesta delicada. Por ahora nadie ha encontrado aún una estrategia completa para una partida perfecta».

VÉASE TAMBIÉN Los puentes de Königsberg (1736), El teorema de la curva de Jordan (1905) y La solución matemática de las damas (2007).

Juego del drago. En este ejemplo, tan solo se utilizan dos puntos de partida (rodeados con un círculo) y la partida todavía no ha acabado. A pesar de su aparente sencillez, el juego resulta muy difícil de analizar conforme aumenta poco a poco el número de puntos de salida.



La teoría de las catástrofes

René Thom (1923–2002)

La teoría de las catástrofes es la teoría matemática de los cambios repentinos o drásticos. Los matemáticos Tim Poston e Ian Stewart ofrecen ejemplos: «El bramido de un terremoto [o] el nivel crítico de densidad de población por debajo del cual algunas concentraciones de saltamontes crecen como tales, y por encima del cual lo hacen como [enjambres de] langostas... Una célula que cambia de forma repentina su ritmo de reproducción y lo duplica y vuelve a duplicar, de forma cancerosa. Un hombre tiene una visión en el camino hacia Tarso».

La teoría de las catástrofes fue desarrollada por el matemático francés Thom en los años sesenta. La teoría se volvió a impulsar en los años setenta, por el matemático Christopher Zeeman, que continuó aplicando la teoría a las ciencias biológicas y del comportamiento. A Thom se le concedió la medalla Fields en 1958 por su trabajo en topología, el estudio de las formas geométricas y sus relaciones.

La teoría de las catástrofes suele hacer referencia a sistemas dinámicos que describen la dependencia temporal de ciertas magnitudes físicas (como el latido del corazón) y la relación de estos sistemas con la topología. En particular, la teoría se centra en ciertos tipos de «puntos críticos» en los cuales la primera derivada de una función y una o más de sus derivadas superiores son cero. Según David Darling: «Muchos matemáticos se pasaron al estudio de la teoría de las catástrofes y durante un tiempo estuvo en boga, aunque no llegó a alcanzar el éxito de su hermana pequeña, la teoría del caos, debido a que falló en su promesa de proporcionar predicciones útiles ».

La investigación de Thom pretendía comprender mejor cómo acciones continuas (como un comportamiento estable y regular en una prisión o entre países) podían dar lugar a un cambio discontinuo (motines en la prisión o una guerra). Mostró cómo dichos fenómenos podían representarse con sus propios paisajes en forma de superficies matemáticas abstractas, con nombres como «la mariposa» o «la cola de golondrina». El último cuadro de Salvador Dalí, *La cola de la golondrina* (1983), se basó en una superficie de catástrofe. Dalí también pintó *El rapto topológico de Europa: homenaje a René Thom* (1983), que describía un paisaje fracturado junto con una ecuación que lo explicaba.

VÉASE TAMBIÉN Los puentes de Königsberg (1736), La cinta de Möbius (1858), La medalla Fields (1936), El caos y el efecto mariposa (1963), La constante de Feigenbaum (1975) y El atractor de Ikeda (1979).

La teoría de las catástrofes es la teoría matemática de los cambios repentinos, como la formación de enjambres de saltamontes cuando su densidad de población aumenta. En ciertas investigaciones también se ha sugerido que el repentino comportamiento social lo desencadena el contacto cada vez más frecuente de las patas traseras de los insectos durante un periodo de varias horas. Los enjambres grandes pueden estar formados por miles de millones de insectos.



1969

La habitación no iluminable de Tokarsky

George Tokarsky (nacido en 1946)

Imagínese que usted y yo nos encontramos en una habitación oscura con paredes lisas cubiertas con espejos. La habitación presenta varios giros y pasillos. Si yo enciendo una cerilla en algún lugar de la habitación, ¿podría usted ver la llama, con independencia del lugar de la habitación, de la forma de ésta y del pasillo en que se encuentre? Podemos plantear de forma equivalente la cuestión para una bola de billar que rebota en una mesa de juego. ¿Existe necesariamente un tiro de billar que una dos puntos cualesquiera de una mesa de billar poligonal?

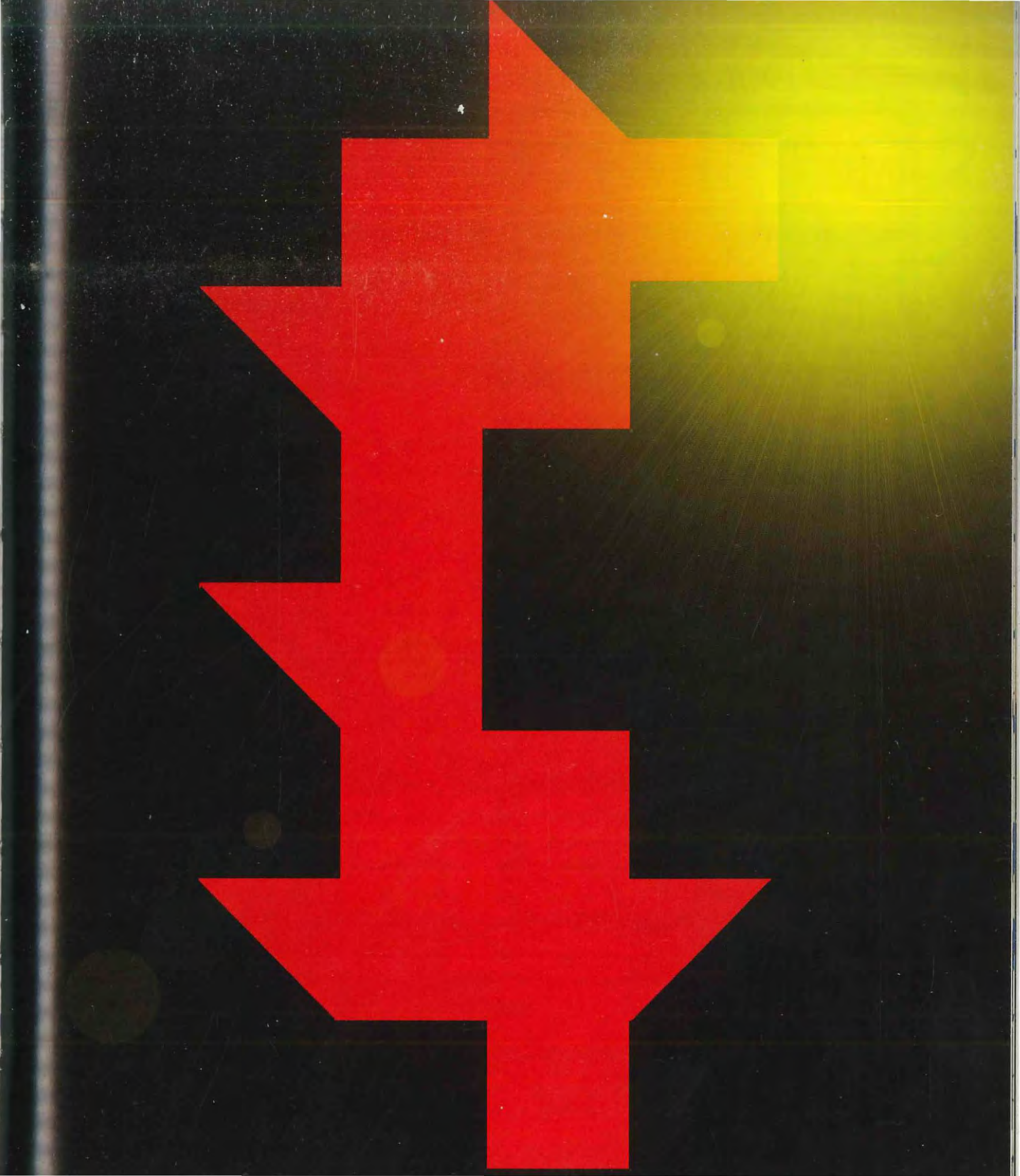
Si nos quedáramos encerrados en una habitación en forma de L, podría ver la llama con independencia de donde se colocara porque la luz tenue podría rebotar por las paredes hasta llegar a su ojo. Pero, ¿se puede concebir una habitación oscura de forma poligonal que sea tan complicada que exista un punto al que la luz nunca llegue? (En este problema, la persona y la cerilla se consideran transparentes.)

El matemático Viktor Klee planteó por primera vez de forma impresa este enigma en 1969, aunque el matemático Ernst Straus ya reflexionaba sobre dichos problemas en los años cincuenta. Resulta sorprendente que nadie supiera la respuesta hasta 1995, año en el que George Tokarsky, de la Universidad de Alberta, descubrió una habitación que no se podía iluminar completamente. El plano de planta de la habitación que publicó presentaba 26 lados. Posteriormente, Tokarsky encontró un ejemplo con 24 lados, que constituye la peculiar habitación de forma poligonal no iluminable de menos lados que se conoce hasta el momento. Desconocemos si es posible un polígono no iluminable con menos lados.

Existen otros problemas similares. En 1958, el físico matemático Roger Penrose demostró junto con un colega, que pueden existir regiones no iluminadas en ciertas habitaciones con lados curvos. De forma más reciente, se han descubierto algunas habitaciones curvas en las que se requieren infinitas cerillas para iluminar todos sus puntos. En el caso de un número finito de cerillas, existen habitaciones curvas que dichas cerillas no pueden iluminar.

VÉASE TAMBIÉN La geometría proyectiva (1639) y El teorema de la galería de arte (1973).

En 1995, el matemático George Tokarsky descubrió esta «habitación» poligonal de 26 lados no iluminable. Existe un lugar de la habitación donde se puede sostener una cerilla que deje otro punto de la habitación en la oscuridad.



1970

Donald Knuth y *Mastermind*

Donald Ervin Knuth (nacido en 1938), **Mordecai Meirowitz**

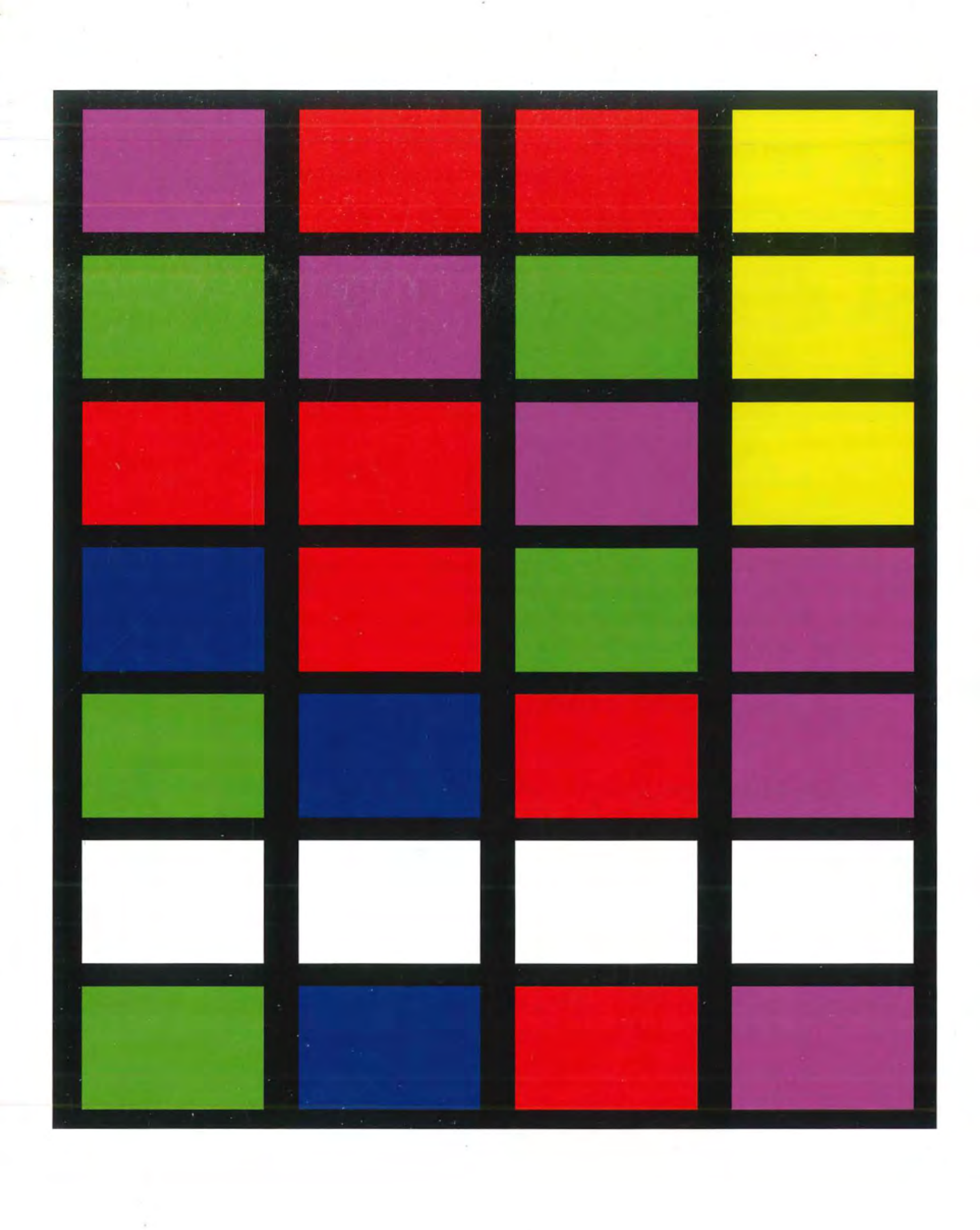
Mastermind es un juego de mesa sobre desciframiento de códigos inventado en 1970 por Mordecai Meirowitz, un administrador de correo y experto en telecomunicaciones de Israel. Los principales fabricantes de juegos rechazaron la idea de Meirowitz, por lo que este lo lanzó con la pequeña empresa de juegos inglesa Invicta Plastics. Se vendieron más de 50 millones de copias, lo que lo convirtió en el juego nuevo con más éxito de los años setenta.

Para jugar, un jugador crea el código seleccionando una secuencia de cuatro colores, disponiendo para ello de fichas de 6 colores diferentes. El oponente debe adivinar la secuencia secreta del creador del código en tan solo unos pocos intentos. Cada intento es una secuencia de cuatro fichas de colores. El creador del código revela cuántas fichas presentan el color y la posición correctos y cuántas más presentan el color correcto aunque la posición sea incorrecta. Por ejemplo, el código secreto podría ser *verde-blanco-azul-rojo* y el pronóstico, *naranja-amarillo-azul-blanco*. En este caso, el creador del código indica que el jugador tiene 1 ficha del color correcto en la posición correcta y 1 ficha del color correcto en una posición incorrecta, aunque no indica las posiciones ni los colores correspendientes. El juego continúa con más intentos. El creador del código dispone de 6^4 (o sea, 1.206) combinaciones posibles, asumiendo que se cuenta con 6 colores y 4 posiciones.

Mastermind fue un juego importante debido en parte al gran torrente de investigaciones que desencadenó. En 1977, el científico informático Donald Knuth publicó una estrategia que permitía a un jugador adivinar siempre el código correcto en 5 intentos. Este fue el primer algoritmo que se descubrió para resolver *Mastermind*, al que le siguieron muchos otros trabajos. En 1993, Kenji Koyama y Tony W. Lai publicaron una estrategia con un máximo de 6 intentos necesarios en el peor de los casos, pero con un promedio de únicamente 4,34 intentos. En 1996, Zhixiang Chen y algunos colegas generalizaron los resultados anteriores al caso de *n* colores y *m* posiciones. El juego también se ha estudiado varias veces utilizando algoritmos genéticos, técnicas inspiradas en la biología evolutiva.

VÉASE TAMBIÉN Tres en raya (1300 a. C.), Go (548 a. C.), El puzle Eternidad (1999), La solución del Awari (2002) y La solución matemática de las damas (2007).

Representación esquemática de Mastermind. El código, normalmente oculto en la parte inferior es verde-azul-rojo-magenta. El jugador comienza intentando adivinar en la fila superior del tablero y llega a la solución en cinco movimientos tras recibir las pistas (que aquí no se muestran) del oponente.



1971

Erdös y la colaboración extrema

Paul Erdös (1913-1996)

El público suele pensar en los matemáticos como en seres recluidos en habitaciones, que apenas hablan con otras personas mientras trabajan durante días para descubrir nuevos teoremas y resolver antiguas conjeturas. Aunque esto sea cierto en algunos casos, Paul Erdös, de origen húngaro, mostró a los matemáticos el valor de la colaboración y las «matemáticas sociales». Al morir, dejó un legado de aproximadamente 1.500 artículos publicados, más que cualquier otro matemático en la historia, habiendo trabajado con 511 colaboradores. Su trabajo se extendió por una vasta parcela de las matemáticas, que incluye la teoría de la probabilidad, la combinatoria, la teoría de números, la teoría de grafos, el análisis clásico, la teoría de la aproximación y la teoría de conjuntos.

Durante el último año de su vida, con 83 años de edad, continuó elaborando teoremas y dando clases, desafiando la idea convencional de que las matemáticas son un deporte para jóvenes. Durante toda su trayectoria, siempre compartió ideas, preocupándose más por la solución del problema que por quién fuera el responsable de la misma. Según Paul Hoffman: «Erdös reflexionó sobre más problemas que cualquier otro matemático de la historia y podía describir al detalle los casi 1.500 artículos que había escrito. Erdös, que obtenía su energía del café, se dedicaba a las matemáticas 19 horas al día, y cuando sus amigos le pedían que bajara el ritmo, él siempre respondía lo mismo: "Ya tendré tiempo cuando muera"». A partir de 1971, empezó a tomar anfetaminas de forma casi diaria para escapar de la depresión y potenciar las ideas y las colaboraciones. Erdös viajaba constantemente y sobrevivía con cuatro cosas, totalmente centrado en las matemáticas, sacrificando la compañía, el sexo y la comida.

Erdös dejó su impronta en las matemáticas de forma precoz, a la edad de 18 años, al descubrir una demostración elegante del teorema según el cual, para todo número entero n mayor que 1, existe siempre un número primo entre n y el doble del número, $2n$. Por ejemplo, el número primo 3 se encuentra entre 2 y 4. Posteriormente, Erdös formuló una demostración elemental del **teorema de los números primos**, que describe la distribución de los números primos.

VÉASE TAMBIÉN Los números primos generados por cigarras (c. 1 millón a. C.), La criba de Eratóstenes (240 a. C.), La conjetura de Goldbach (1742), Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801), La hipótesis de Riemann (1859), La demostración del teorema de los números primos (1896), La constante de Brun (1919), La conjetura de Gilbreath (1958) y La espiral de Ulam (1963).

Paul Erdös obtenía la energía para abordar su sobrehumana agenda de trabajo del consumo constante de café, pastillas de cafeína y Benzedrina, y pensaba que «un matemático es una máquina que convierte el café en teoremas». Solía trabajar 19 horas al día, siete días a la semana.


CAFE

1972

HP-35: la primera calculadora científica de bolsillo

William Redington Hewlett (1913–2001) y su equipo

En 1972, la empresa Hewlett-Packard (HP), presentó la primera calculadora científica de bolsillo: una calculadora de mano con funciones trigonométricas y exponenciales. El amplio rango numérico de la calculadora HP-35, con notación científica, iba de 10^{-100} a 10^{+100}. La HP-35 se lanzó con un precio de venta de 395 dólares. (HP llamó al aparato «35» porque tenía 35 teclas.)

El cofundador de la empresa, Bill Hewlett, comenzó a desarrollar la calculadora compacta a pesar de que los estudios de mercado indicaban que prácticamente no había mercado para las calculadoras de bolsillo. ¡Qué equivocados estaban! En los primeros meses de ventas, los pedidos superaron las expectativas de la empresa en relación con las dimensiones totales del mercado. En el primer año, se vendieron 100.000 unidades de la HP-35 y más de 300.000 hasta el momento en que dejó de comercializarse, en 1975.

Cuando la HP-35 se presentó, existían las reglas de cálculo para realizar cálculos científicos de alto nivel. Las calculadoras de bolsillo existentes en ese momento realizaban sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. La HP-35 lo cambió todo. La regla de cálculo, que por lo general ofrecía resultados precisos de hasta tres cifras significativas únicamente, «murió» y dejó de enseñarse en muchas escuelas de Estados Unidos. Cabe preguntarse qué habrían conseguido los matemáticos de otros tiempos si hubieran tenido acceso a una HP-35 (junto con un suministro ilimitado de pilas).

En la actualidad, las calculadoras científicas no son caras y han modificado de forma significativa los planes de estudio de la mayoría de los países. Los docentes han dejado de enseñar métodos de lápiz y papel para calcular valores de funciones trascendentes. En el futuro, los profesores dedicarán aún más tiempo a las aplicaciones y a las ideas matemáticas en vez de a los cálculos rutinarios.

Según el escritor Bob Lewis: «Bill Hewlett y Dave Packard fundaron Silicon Valley en el garaje de Hewlett. Una moneda, echada a cara o cruz, fue la que decidió que el nombre de la empresa fuera Hewlett-Packard en vez de Packard Hewlett [...] Hewlett nunca le dio mucha importancia a la fama. A lo largo de su vida siguió siendo, en el fondo, un ingeniero».

VÉASE TAMBIÉN El ábaco (1200), La regla de cálculo (1621), El ordenador mecánico de Babbage (1822), El analizador diferencial (1927), ENIAC (1946), La calculadora Curta (1948) y Mathematica (1988).

La calculadora HP-35 fue la primera calculadora científica de bolsillo del mundo, con funciones trigonométricas y exponenciales. El cofundador de la empresa, Bill Hewlett, comenzó a desarrollar la calculadora compacta a pesar de los descaminados estudios de mercado que indicaban que prácticamente no había mercado para las calculadoras de bolsillo.



3.141592654
OFF
ON
log
ln
arc
sin
cos
tan
CLR
ENTER
STO
RCL
CH S
E EX
CL x
7
8
9
4
5
6
1
2
3
0
π
HEWLETT • PACKARD

1973

Las teselas de Penrose

Roger Penrose (nacido en 1931)

Las teselas de Penrose hacen referencia a dos sencillas formas geométricas que, al colocarse una al lado de la otra, pueden cubrir un plano con un patrón sin huecos ni superposiciones y que no se repite de forma periódica. En cambio, los sencillos patrones hexagonales de teselas que se pueden ver en algunos suelos de baño muestran un patrón repetido simple. Curiosamente, las teselas de Penrose, cuyo nombre procede del físico matemático inglés Roger Penrose, presentan una simetría rotacional de orden cinco, el mismo tipo de simetría que presenta una estrella de cinco puntas. Si usted gira todo el diseño de las teselas 72°, resulta el mismo diseño original. Según el escritor Martin Gardner: «Aunque se pueden construir patrones de Penrose con un alto grado de simetría [...], la mayoría de los patrones, como el universo, son una mezcla desconcertante de orden y desviaciones inesperadas del orden. A medida que aumentan los patrones, estos parecen estar en todo momento esforzándose por repetirse, aunque sin llegar realmente a conseguirlo».

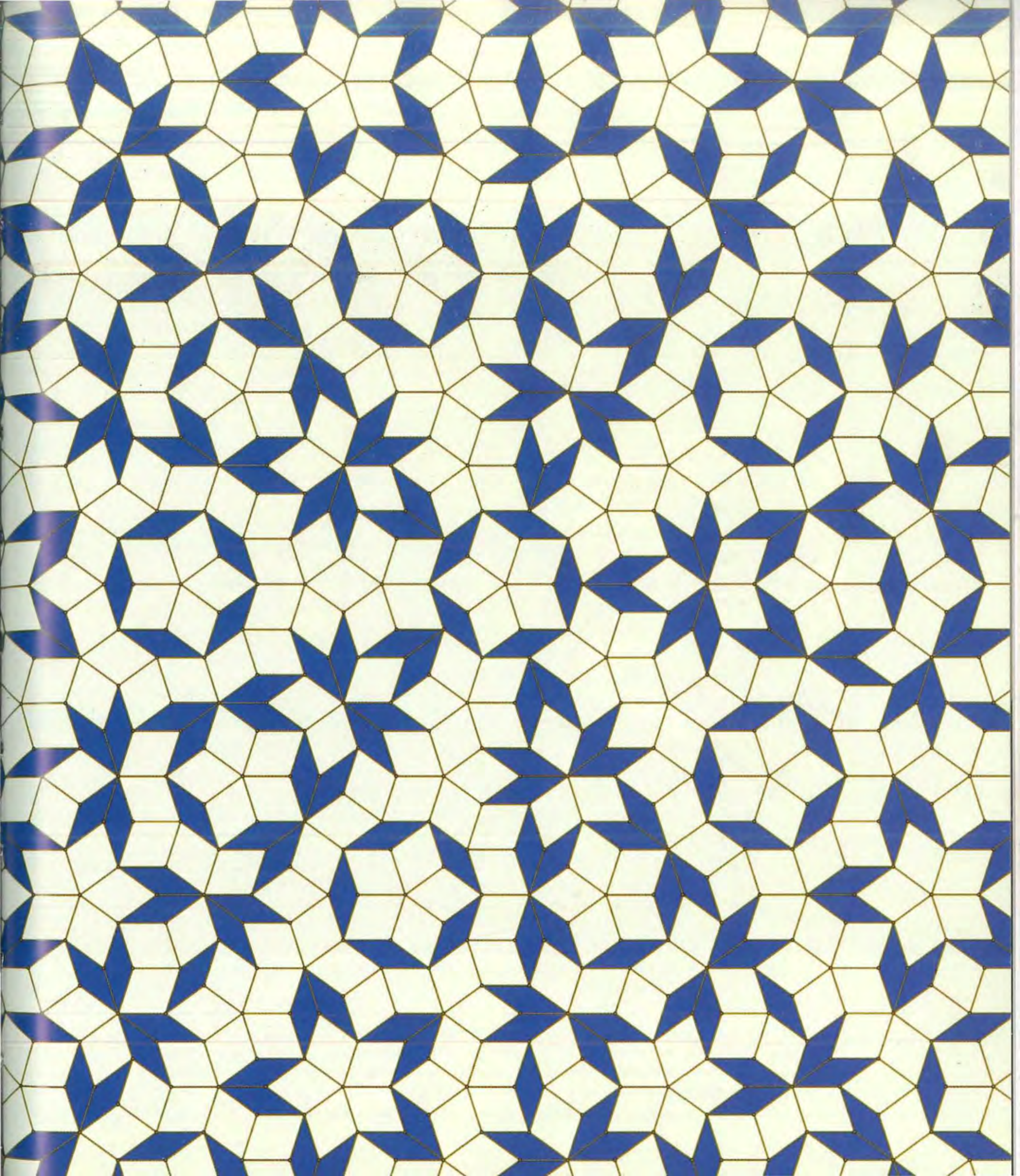
Antes del descubrimiento de Penrose, la mayoría de los científicos creían que los cristales basados en una simetría de orden cinco serían imposibles de crear, aunque desde entonces se han descubierto cuasicristales que se parecen a los patrones de teselas de Penrose y que presentan propiedades extraordinarias. Por ejemplo, los cuasicristales pueden utilizarse como resbaladizos revestimientos antiadherentes y los cuasicristales de metales apenas conducen el calor.

A principios de los años ochenta, los científicos habían especulado sobre la posibilidad de que la estructura atómica de algunos cristales pudiera basarse en una red no periódica, es decir, en una red que no presentara repeticiones periódicas. En 1982, Dan Shechtman descubrió una estructura no periódica en las microfotografías de electrones de una aleación de aluminio y manganeso con una evidente simetría de orden cinco que recordaba a una tesela de Penrose. En ese momento, este descubrimiento fue tan impactante que algunos dijeron que era tan sorprendente como un copo de nieve de cinco lados.

Como anécdota interesante, en 1997 Penrose incoó una acción de derechos de autor contra una empresa que supuestamente había estampado en relieve teselas de Penrose en el papel higiénico acolchado de Kleenex en Inglaterra. En 2007, los investigadores publicaron en *Science* pruebas de una tesela similar a la de Penrose en el arte medieval islámico, cinco siglos antes de su descubrimiento en Occidente.

VÉASE TAMBIÉN Los grupos del papel pintado (1891), La secuencia de Thue-Morse (1906), La cuadratura del rectángulo (1925), Las teselaciones de Voderberg (1936) y Los billares externos (1959).

Teselas de Penrose con dos formas geométricas que pueden cubrir un plano con un patrón sin huecos ni superposiciones y que no se repite de forma periódica. (Interpretación de Jos Leys.)



1973

El teorema de la galería de arte

Václav (Vašek) Chvátal (nacido en 1946), **Victor Klee** (nacido en 1925)

Imagínese que se encuentra en una galería de arte muy cara de forma poligonal. Si tuviéramos que colocar vigilantes en algunas esquinas (vértices) de la sala, ¿cuál es el número mínimo de vigilantes que se necesitan para que el interior del polígono se visualice de forma simultánea? Suponga que los vigilantes pueden ver en todas las direcciones al mismo tiempo, pero que no pueden ver a través de las paredes. Asimismo, se sitúan en las esquinas de la galería para no obstaculizar la contemplación de las obras de arte. Inicialmente, el problema puede estudiarse realizando dibujos de habitaciones poligonales y sombreando las zonas de visión de los vigilantes colocados en diferentes vértices.

El teorema de la galería de arte de Chvátal, cuyo nombre procede del matemático y científico informático de origen checoslovaco Václav Chvátal, establece que en una galería de arte con n esquinas, debe haber como máximo $\lfloor n/3 \rfloor$ vigilantes en las esquinas para vigilar toda la galería, donde los símbolos $\lfloor\ \rfloor$ denotan la función matemática de parte entera «suelo», que se corresponde con el mayor número entero menor o igual que $n/3$. Se da por supuesto que el polígono es «simple», lo que significa que las paredes de la galería de arte no se cruzan entre ellas y que solo entran en contacto en sus extremos.

En 1973, el matemático Victor Klee planteó a Chvátal la pregunta sobre el número necesario de vigilantes y Chvátal lo demostró poco después. Curiosamente, solo se necesitan $\lfloor n/4 \rfloor$ vigilantes para vigilar una galería de arte poligonal con todas las esquinas en ángulo recto. Así, para una de este tipo con 10 esquinas, se necesitarán 2 en lugar de 3.



Desde entonces, los investigadores han considerado el problema de la galería de arte con vigilantes que se puedan mover en línea recta en vez de permanecer en posiciones fijas. El problema también se ha planteado desde una perspectiva tridimensional y con paredes con agujeros. Según Norman Do: «Probablemente, cuando Victor Klee planteó por primera vez el problema de la galería de arte, no tenía ni idea de que daría lugar a una investigación tan fructífera que aún continúa más de treinta años después. [En la actualidad] este ámbito está absolutamente atestado de problemas interesantes...».

VÉASE TAMBIÉN La geometría proyectiva (1639) y La habitación no iluminable de Tokarsky (1969).

IZQUIERDA: *Tres vigilantes, representados por tres grandes esferas, pueden ver de forma simultánea el interior de esta habitación poligonal de 11 vértices.* DERECHA: *El teorema de la galería de arte sigue suscitando una gran cantidad de investigación geométrica con disposiciones poco habituales de las paredes, vigilantes que se desplazan y dimensiones superiores.*



El cubo de Rubik

Ernö Rubik (nacido en 1944)

El inventor húngaro Ernö Rubik ideó el cubo de Rubik en 1974, lo patentó en 1975 y lo lanzó al mercado húngaro en 1977. En 1982, en Hungría se habían vendido 10 millones de cubos, más unidades que los habitantes que poblaban el país. Se estima que en el mundo entero se vendieron más de 100 millones de unidades.

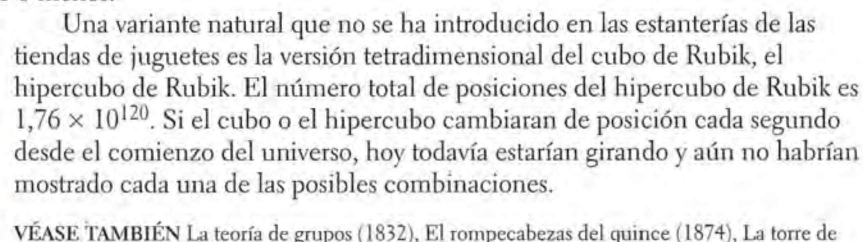
El cubo es una matriz $3 \times 3 \times 3$ de pequeños cubos de colores, dispuestos de modo que las seis caras del cubo grande presentan seis colores distintos. Los 26 pequeños cubos exteriores están unidos internamente de tal manera que las seis caras pueden girarse. El objetivo del puzle es que el cubo desordenado vuelva a presentar cada cara de un único color. Hay

43.252.003.274.489.856.000

disposiciones diferentes de los cubos pequeños y tan solo una de ellas es la posición inicial en la que los colores coinciden en cada una de las seis caras. Si tuvieramos un cubo por cada una de estas posiciones «lícitas», podríamos cubrir toda la superficie de la Tierra (incluyendo los océanos) unas 250 veces. Una columna formada por todas las posiciones del cubo podría extenderse unos 250 años luz. Si pudieramos retirar los adhesivos de color de la versión $3 \times 3 \times 3$ del cubo de Rubik, existen $1{,}0109 \times 10^{38}$ maneras diferentes de recolocarlos de nuevo.

Todavía no se sabe el número mínimo de giros requeridos para resolver el puzle desde una posición de partida arbitraria. En 2008, Tomas Rokicki demostró que todas las posiciones del cubo de Rubik pueden resolverse en 22 giros de las caras del cubo o menos.

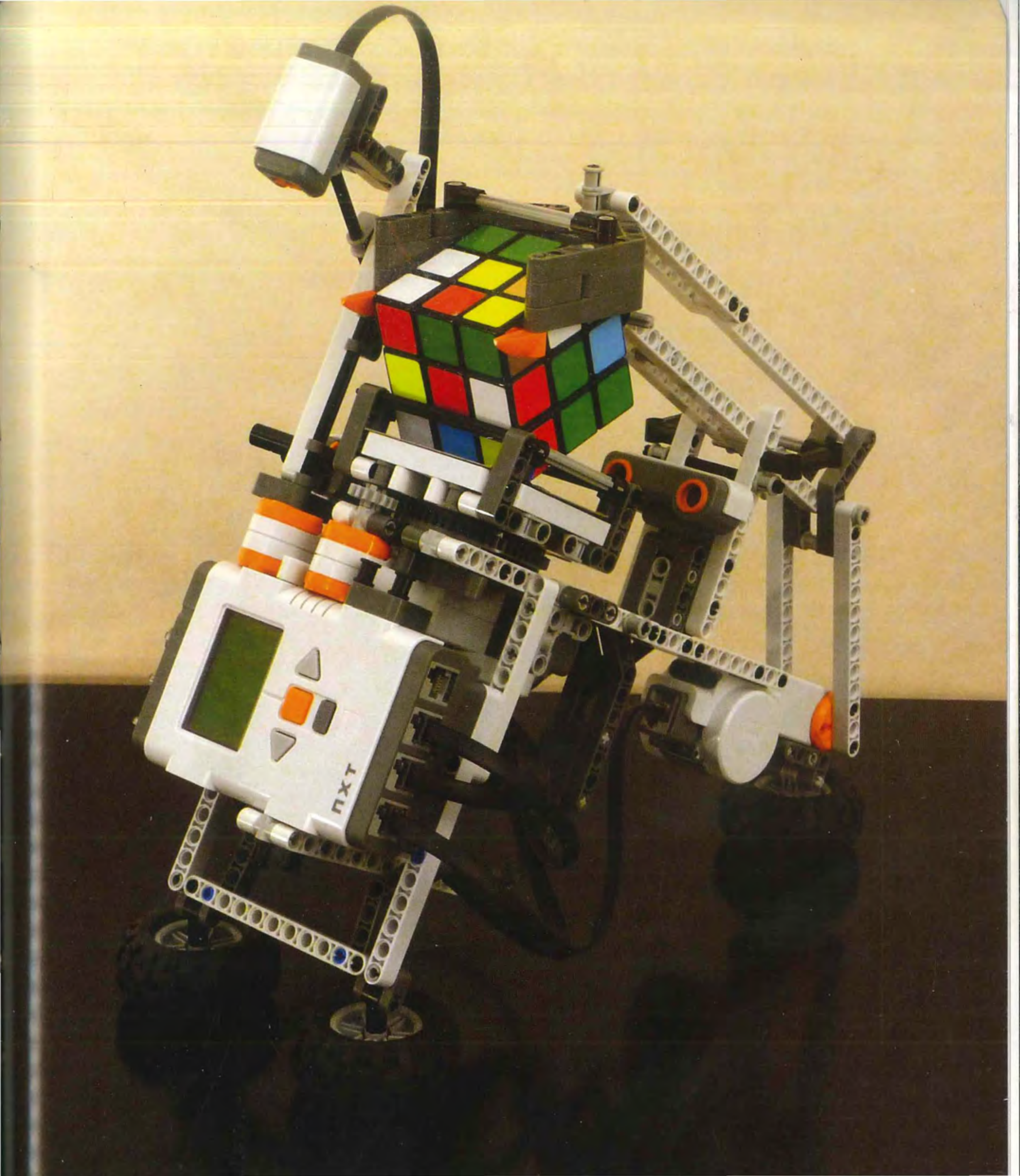




Una variante natural que no se ha introducido en las estanterías de las tiendas de juguetes es la versión tetradimensional del cubo de Rubik, el hipercubo de Rubik. El número total de posiciones del hipercubo de Rubik es $1{,}76 \times 10^{120}$. Si el cubo o el hipercubo cambiaran de posición cada segundo desde el comienzo del universo, hoy todavía estarían girando y aún no habrían mostrado cada una de las posibles combinaciones.

VÉASE TAMBIÉN La teoría de grupos (1832), El rompecabezas del quince (1874), La torre de Hanoi (1883), El hipercubo (1888) y Locura instantánea (1966).

IZQUIERDA: *Caja de altavoz casera de Zachary Paisley con la forma del cubo de Rubik. Este altavoz de subgraves servo directo (direct servo subwoofer) pesa 68 kilos. Paisley afirma que los sonidos «pueden penetrar el hormigón, ¡confiriéndole casi la potencia suficiente para autoresolverse!».* DERECHA: *En 2008, Hans Andersson construyó un robot con piezas de plástico que podía resolver el cubo de Rubik sirviéndose de un sensor de luz que detecta los colores del cubo. El robot no necesita una conexión diferenciada a un PC para realizar los cálculos ni la manipulación del cubo.*


NXT

1974

La constante Omega de Chaitin

Gregory John Chaitin (nacido en 1947)

Se dice que un programa informático «se detiene» cuando finaliza su tarea, por ejemplo, cuando ha calculado un millar de números primos o los cien primeros decimales de pi. Por otro lado, un programa funcionará de forma infinita en caso de que la tarea sea interminable, como calcular todos los números de Fibonacci.

¿Qué ocurriría si introdujéramos una secuencia aleatoria de bits en el programa de una máquina de Turing? (Un dispositivo de manipulación de símbolos abstractos que puede simular la lógica de un ordenador). Cuando este programa comience, ¿qué probabilidad existe de que la máquina se detenga? La respuesta es el número Ω (omega) de Chaitin. El número varía en función de la máquina, pero en una máquina dada, Ω es un número irracional bien definido con un valor que se sitúa entre cero y uno. Para la mayoría de los ordenadores, Ω es un valor cercano a 1 debido a que un programa completamente aleatorio probablemente encargue a un ordenador que haga algo imposible. El matemático Gregory Chaitin ha demostrado que la secuencia de dígitos de Ω no presenta un patrón definido, que Ω se puede definir pero no es completamente calculable y que tiene infinitos dígitos. Las características de Ω tienen unas implicaciones matemáticas enormes y establecen límites fundamentales acerca de lo que podemos saber.

Según el teórico cuántico Charles Bennett: «La propiedad más notable de Ω [...] es el hecho de que si se conocieran unos miles de dígitos de Ω, bastaría, como mínimo en teoría, para determinar la mayoría de las cuestiones pendientes de las matemáticas...». David Darling afirma que las propiedades de Ω muestran que los problemas resolubles «constituyen un pequeño archipiélago en un vasto océano de no decibilidad». Según Marcus Chown, Ω «revela que las matemáticas [...] están en su mayor parte formadas por enormes agujeros. La anarquía [...] es el centro del universo».

La revista *Time* explica lo siguiente: «El concepto amplía [...] el teorema de incompletitud de Gödel, que afirma que en cualquier sistema de matemáticas siempre habrá proposiciones que no se podrán demostrar, y el problema de la parada de las máquinas de Turing, que afirma que no se puede predecir [...] si un cálculo concreto de ordenador tendrá fin».

VÉASE TAMBIÉN El teorema de Gödel (1931) y Las máquinas de Turing (1936).

Las características de Ω tienen unas implicaciones matemáticas enormes y establecen límites fundamentales acerca de lo que podemos saber. El número Ω tiene infinitos dígitos y sus propiedades muestran que los problemas resolubles «constituyen un pequeño archipiélago en un gran océano de no decibilidad».



1974

Los números surreales

John Horton Conway (nacido en 1937)

Los números surreales son un superconjunto de números reales, inventados por el prolífico matemático John Conway para el análisis de juegos, aunque el nombre fue acuñado por Donald Knuth en su popular relato de 1974 *Surreal Numbers*, quizás una de las pocas ocasiones en que un descubrimiento importante en matemáticas se haya publicado primero en una obra de ficción. Los números surreales presentan muchas y peculiares propiedades. Como introducción, los números reales incluyen tanto números racionales (como ½) y números irracionales (como pi) y pueden visualizarse como puntos en una línea de números infinitamente larga.

Los números surreales comprenden los números reales y mucho más. Martin Gardner escribió en *Mathematical Magic Show*: «Los números surreales son una asombrosa proeza de prestidigitación». Un sombrero vacío reposa sobre una mesa construida con unos pocos axiomas de la teoría de conjuntos estándar. Conway agita dos sencillas reglas en el aire, luego mete la mano en la «casi nada» y saca un lujoso tapiz infinito de números que forman un cuerpo real y cerrado. Cada número real está rodeado de una gran cantidad de números nuevos que se encuentran más cerca de él que cualquier otro valor «real». El sistema es verdaderamente «surreal».

Un número surreal es un par de conjuntos $\{X_I, X_D\}$ en los que los subíndices indican la posición relativa (izquierda y derecha) de los conjuntos en el par. Los números surreales son fascinantes debido a que se basan en unos pocos principios extremadamente simples. En realidad, según Conway y Knuth, los números surreales cumplen dos reglas: 1) cada número se corresponde con dos conjuntos de números previamente creados, de tal manera que ningún elemento del conjunto de la izquierda es mayor o igual que ningun elemento del conjunto de la derecha, y 2) un número es menor o igual que otro número si y solo si ningún elemento del conjunto de la izquierda del primer número es mayor o igual que el segundo número, y ningún elemento del conjunto de la derecha del segundo número es menor o igual que el primer número.

Los números surreales incluyen el infinito y los infinitesimales, números más pequeños que cualquier número real imaginable.

VÉASE TAMBIÉN Las paradojas de Zenón (c. 445 a. C.), El descubrimiento del cálculo (c. 1665), Los números trascendentes (1844) y Los números transfinitos de Cantor (1874).

IZQUIERDA: *John H. Conway en la conferencia sobre teoría de juegos combinatorios en la Estación Internacional de Investigación Banff de Alberta (Canadá), en junio de 2005.* DERECHA: *La portada de* Surreal Numbers *de Donald Knuth, un ejemplo de una de las pocas ocasiones en que un importante descubrimiento en matemáticas se haya publicado primero en una obra de ficción. Los números surreales incluyen el infinito y los infinitesimales, números más pequeños que cualquier número real imaginable.*

SURREAL NUMBERS



D. E. KNUTH

1974

Los nudos de Perko

Kenneth A Perko, Jr. (1941–2002), **Wolfgang Haken** (nacido en 1928)

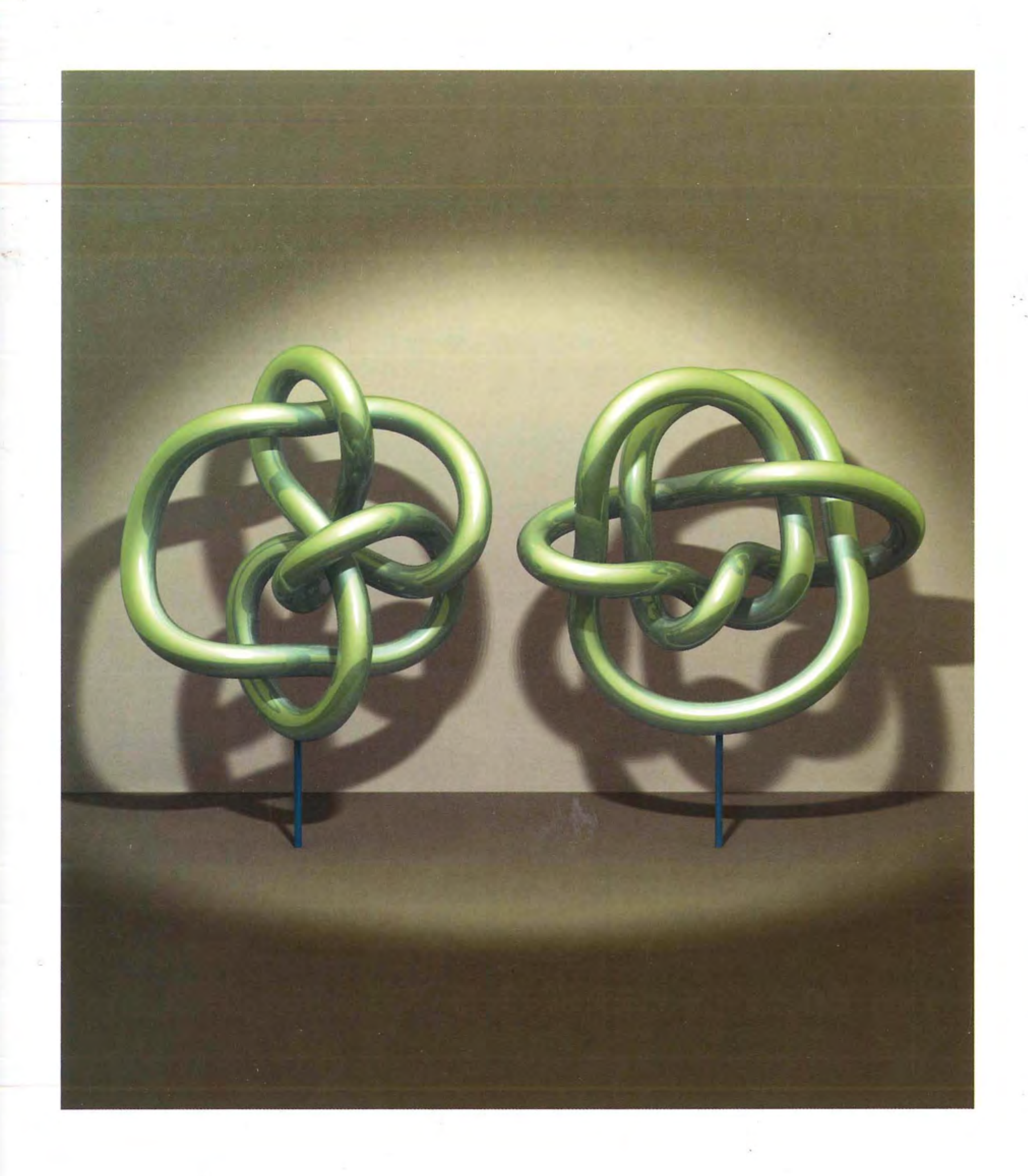
Durante siglos, los matemáticos han investigado maneras de distinguir nudos. Como ejemplo, las dos configuraciones que se muestran aquí representan dos nudos que durante más de 75 años se pensó que eran dos tipos distintos de nudos. En 1974, unos matemáticos descubrieron que se podía demostrar que ambos nudos eran el mismo simplemente cambiando el punto de vista de un nudo. En la actualidad, el nombre de estos nudos, par de Perko, procede del abogado neoyorquino y topólogo ocasional Kenneth Perko, que demostró que en realidad se trataba del mismo nudo, mientras manipulaba lazadas de cuerda en el suelo de su salón.

Se considera que dos nudos son iguales si uno de ellos puede manipularse sin ser cortado hasta presentar exactamente el mismo aspecto que el otro en lo que respecta a los cruces, tanto por arriba como por abajo. Los nudos se clasifican, entre otros aspectos, por la disposición y el número de sus cruces, así como por ciertas características de sus imágenes especulares. Más precisamente, los nudos se clasifican a través de una serie de invariantes, entre ellas sus simetrías y su número de cruces. Asimismo, las características de la imagen especular desempeñan un papel indirecto en la clasificación. No existen algoritmos generales ni prácticos para determinar si una curva enredada es un nudo o si dos nudos están entrelazados. Evidentemente, la simple observación de un nudo proyectado en un plano (manteniendo los cruces por arriba y por abajo visibles y distinguibles) no es una forma fácil de determinar si una lazada da lugar o no a un nudo. (Una lazada sin nudos es equivalente a un bucle cerrado, como un simple círculo sin cruces).

En 1961, el matemático Wolfgang Haken creó un algoritmo para determinar si una proyección de un nudo en el plano (conservando los cruces por arriba y por abajo) era realmente una lazada sin nudos. Sin embargo, el procedimiento es tan complicado que nunca se ha aplicado. El documento que describe el algoritmo en la revista *Acta Mathematica* consta de 130 páginas.

VÉASE TAMBIÉN Nudos (c. 100.000 a. C.), Los nudos de Perko (1974), El polinomio de Jones (1984) y La ley de Murphy y los nudos (1988).

Las dos configuraciones que se muestran aquí representan dos nudos que durante más de 75 años se consideraron tipos distintos de nudos. En 1974, los matemáticos descubrieron que, en realidad, ambos nudos eran el mismo. (Interpretación gráfica de Jos Leys.)



1975

Los fractales

Benoît B. Mandelbrot (nacido en 1924)

En la actualidad, los diseños de fractales generados por ordenador se encuentran por todas partes. Desde los serpenteantes diseños en carteles artísticos generados por ordenador hasta las ilustraciones en las revistas de física más serias, el interés que generan sigue aumentando entre los científicos y, de forma bastante sorprendente, entre artistas y diseñadores. En 1975 el matemático Benoît Mandelbrot acuñó la palabra «fractal» para describir un conjunto de curvas de aspecto complicado, muchas de las cuales eran desconocidas antes de la aparición de los ordenadores capaces de realizar rápidamente cálculos enormes. Los fractales suelen presentar autosimilitud, es decir, que varias copias exactas o inexactas de un elemento pueden aparecer en el elemento original a escala más pequeña. El detalle se reproduce durante muchas ampliaciones, como un anidamiento infinito de muñecas rusas unas dentro de otras. Algunas de estas formas tan solo existen en un espacio geométrico abstracto, aunque otras pueden utilizarse como modelos para objetos naturales complejos, como las costas y las ramificaciones de los vasos sanguíneos. Las deslumbrantes imágenes generadas por ordenador pueden resultar embriagadoras, suscitando el interés de los estudiantes por las matemáticas más que cualquier otro descubrimiento matemático del pasado siglo.

Los físicos se interesan por los fractales porque a veces pueden describir el comportamiento caótico de fenómenos del mundo real como el movimiento de los planetas, el flujo de los líquidos, la difusión de los fármacos, el comportamiento de las relaciones interindustriales y la vibración de las alas de un avión. (El comportamiento caótico suele dar lugar a patrones fractales). Por lo general, cuando los físicos o los matemáticos observaban resultados complicados, solían buscar causas complicadas. En cambio, muchas formas fractales muestran el comportamiento increíblemente complicado de las fórmulas más simples.

Entre los primeros exploradores de objetos fractales se encuentran Karl Weierstrass, que en 1872 consideró funciones que eran continuas en todo punto y diferenciables en ninguno y Helge von Koch, que en 1904 trabajó con formas geométricas como el **copo de nieve de Koch**. En el siglo XIX y a principios del XX, algunos matemáticos exploraron los fractales en el plano complejo aunque, sin la ayuda del ordenador, no pudieron apreciarlos ni visualizarlos plenamente.

VÉASE TAMBIÉN La geometría de Descartes (1637), El triángulo de Pascal (1654), La función de Weierstrass (1872), La curva de Peano (1890), El copo de nieve de Koch (1904), La secuencia de Thue-Morse (1906), La dimensión de Hausdorff (1918), El collar de Antoine (1920), La esfera cornuda de Alexander (1924), La esponja de Menger (1926), La paradoja de la línea de costa (c. 1950), El caos y el efecto mariposa (1963) y El conjunto de Mandelbrot (1980).

Estructura fractal de Jos Leys. Los fractales suelen presentar autosimilitud, lo que indica que varios temas estructurales se repiten a diferentes escalas de tamaño.



1975

La constante de Feigenbaum

Mitchell Jay Feigenbaum (nacido en 1944)

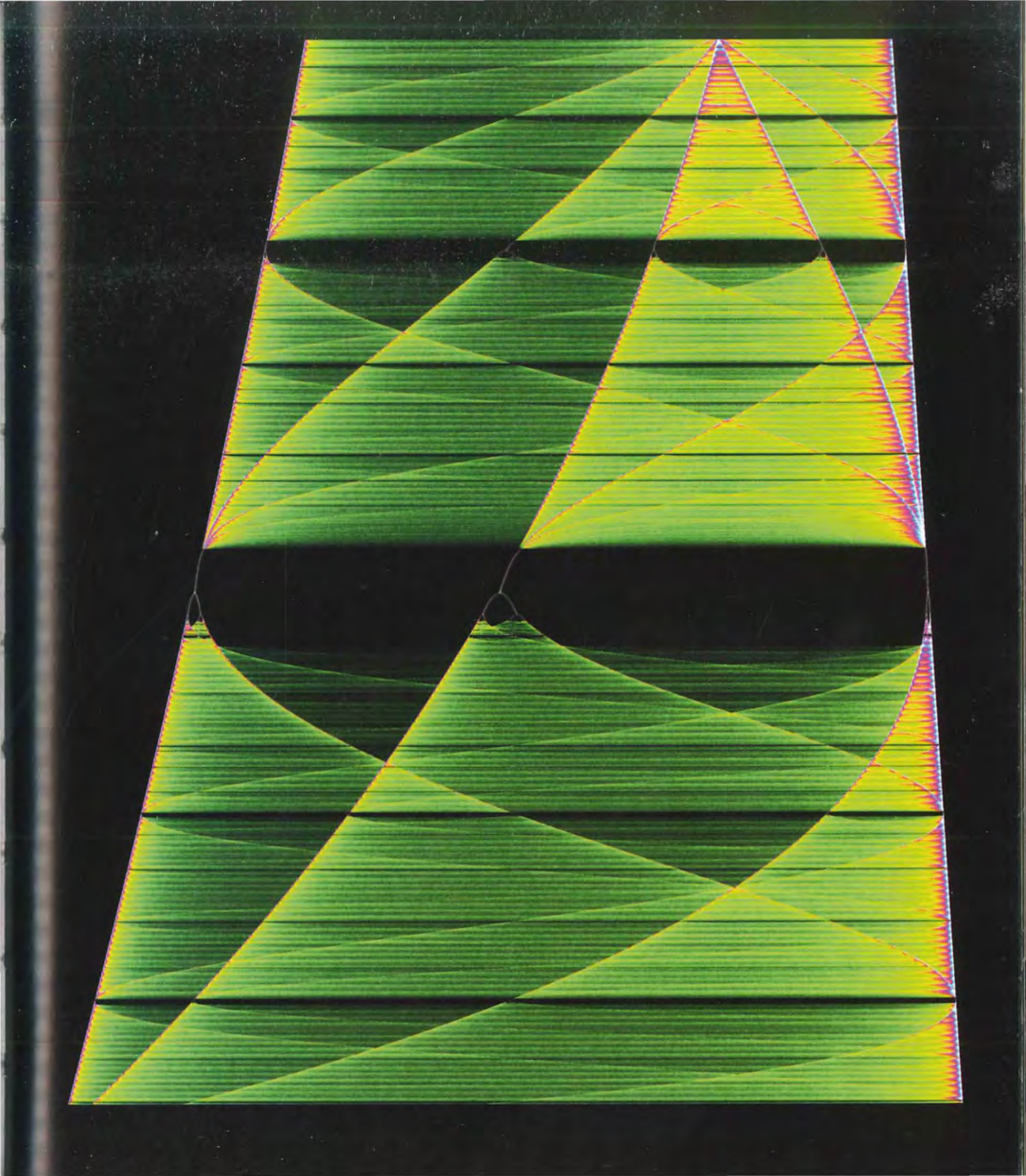
Las fórmulas sencillas pueden dar lugar a comportamientos sorprendentemente diversos y caóticos, al tiempo que tipifican fenómenos que van desde el aumento y el descenso de las poblaciones de animales hasta el comportamiento de ciertos circuitos electrónicos. Una fórmula de especial interés es el mapa logístico, que modela el crecimiento de una población. Fue popularizada por el biólogo Robert May en 1976 y se basa en el trabajo anterior del matemático belga Pierre François Verhulst (1804–1849), que buscaba modelos de variaciones de población. La fórmula podría escribirse como $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ donde, x representa la población en el momento n. La variable x se define en relación con el tamaño máximo de la población del ecosistema y, por tanto, toma valores entre 0 y 1. En función del valor de r, que controla el porcentaje de crecimiento y hambruna, la población podría experimentar diferentes comportamientos. Por ejemplo, a medida que r aumenta, la población podría aproximarse a un valor único o bifurcarse de tal manera que oscilara entre dos valores, para luego oscilar entre cuatro valores, a continuación entre ocho valores y, finalmente, convertirse en un valor caótico, de tal manera que pequeños cambios en la población inicial pueden dar lugar a resultados muy diferentes e impredecibles.

La razón de las distancias entre dos intervalos de bifurcaciones se acerca a la constante de Feigenbaum, 4,6692016091..., número descubierto por el físico matemático estadounidense Mitchell Feigenbaum en 1975. Curiosamente, aunque Feigenbaum consideró inicialmente esta constante para un mapa similar al mapa logístico, también demostró que se aplicaba a todos los mapas unidimensionales de este tipo. Esto significa que una gran cantidad de sistemas caóticos se bifurcan al mismo ritmo y, de este modo, su constante puede utilizarse para predecir en qué momento el caos hará acto de presencia en los sistemas. Este tipo de comportamiento de bifurcación se ha observado en muchos sistemas físicos antes de pasar al estado caótico.

Feigenbaum se dio cuenta rápidamente de que su «constante universal» era importante, por eso comentó lo siguiente: «Llamé a mis padres esa misma noche y les dije que había descubierto algo realmente extraordinario que, una vez lo hubiera entendido, me convertiría en un hombre famoso».

VÉASE TAMBIÉN El caos y el efecto mariposa (1963), La teoría de las catástrofes (1968) y El atractor de Ikeda (1979).

Diagrama de bifurcación (girado 90° en el sentido de las agujas del reloj) de Steven Whitney. Esta imagen revela el comportamiento increíblemente prolífico de una simple fórmula por la variación de un parámetro r. Las «horquillas» de bifurcación pueden verse como curvas de pequeñas, finas y ligeras ramificaciones entre el caos.



1977

Criptografía de clave pública

Ronald Lorin Rivest (nacido en 1947), **Adi Shamir** (nacido en 1952), **Leonard Max Adleman** (nacido en 1945), **Bailey Whitfield Diffie** (nacido en 1944), **Martin Edward Hellman** (nacido en 1945), **Ralph C. Merkle** (nacido en 1952)

A lo largo de la historia, los criptógrafos han intentado inventar un medio para enviar mensajes secretos al margen de los voluminosos libros de códigos con claves de encriptación y desencriptación que podían caer fácilmente en manos del enemigo. Por ejemplo, entre 1914 y 1918, los alemanes perdieron cuatro libros de códigos que recuperaron los servicios de inteligencia británicos. La unidad británica de desciframiento de códigos, conocida como Room Forty, descifró las comunicaciones alemanas, dando a las fuerzas aliadas una ventaja estratégica crucial en la Primera Guerra Mundial.

Al objeto de solucionar el problema de la gestión de claves, en 1976, Whitfield Diffie, Martin Hellman y Ralph Merkle, de la Universidad de Stanford, California, trabajaron en la criptografía de clave pública, un método matemático para distribuir mensajes codificados por medio de un par de claves criptográficas: una clave pública y una privada. La clave privada se mantiene confidencial, mientras que, sorprendentemente, la clave pública puede distribuirse de forma general sin que se produzca ningún riesgo para la seguridad. Las claves están relacionadas de forma matemática, aunque la clave privada no puede obtenerse de la clave pública a través de ningún método viable. Un mensaje codificado con la clave pública puede descifrarse únicamente con la clave privada correspondiente.

Para entender mejor la encriptación pública y privada, imagínese la ranura de un buzón en la puerta de entrada de una casa. La clave pública es similar a la dirección de la casa: cualquier persona puede meter cosas a través de la ranura. Sin embargo, tan solo la persona que posee la llave de la puerta de la casa puede retirar el correo y leerlo.

En 1977, los científicos del MIT Ronald Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman sugirieron que los números primos grandes podían utilizarse para proteger los mensajes. La multiplicación de dos números primos grandes es una tarea fácil para un ordenador, pero el procedimiento inverso de encontrar los dos números primos originales a partir de su producto puede resultar muy difícil. Cabe apuntar que, anteriormente, los científicos informáticos también habían desarrollado una encriptación de clave pública para los servicios de inteligencia británica. Sin embargo, este trabajo se mantuvo en secreto por razones de seguridad nacional.

VÉASE TAMBIÉN Los números primos generados por cigarras (c. 1 millón a. C.), La criba de Eratóstenes (240 a. C.), *Polygraphiae Libri Sex* (1518), La conjetura de Goldbach (1742), Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801) y La demostración del teorema de los números primos (1896).

La máquina Enigma, utilizada para codificar y descodificar mensajes antes de la era de la criptografía moderna. Los nazis utilizaron las claves creadas por Enigma, que presentaban algunos puntos débiles, como el hecho de que los mensajes pudieran descodificarse si se conseguía un libro de códigos.


Q W E R T Z U I O
A S D F G H J K
P Y X C V B N M L
Q W E R T Z U I O
A S D F G H J K
P Y X C V B N M L

1977

El poliedro de Szilassi

Lajos Szilassi (nacido en 1942)

Los poliedros son sólidos tridimensionales con caras planas y aristas rectas. Entre sus ejemplos comunes se incluyen el cubo y el tetraedro regular, una pirámide compuesta de cuatro caras en forma de triángulos equiláteros. Si el poliedro es regular, todas las caras tienen el mismo tamaño y la misma forma.

El poliedro de Szilassi fue descubierto en 1977 por el matemático húngaro Lajos Szilassi. Este poliedro es un heptaedro (poliedro de siete caras) con siete caras de 6 lados, 14 vértices, 21 aristas y un agujero. Si redondeáramos la superficie del poliedro de Szilassi de modo que las aristas fueran menos visibles, podríamos comprobar cómo, desde un punto de vista topológico, el poliedro de Szilassi es equivalente a una rosquilla (o toro). El poliedro presenta un eje de simetría de 180 grados. Tres pares de caras son congruentes, es decir, presentan la misma forma y tamaño. La otra cara sin par es un hexágono simétrico.

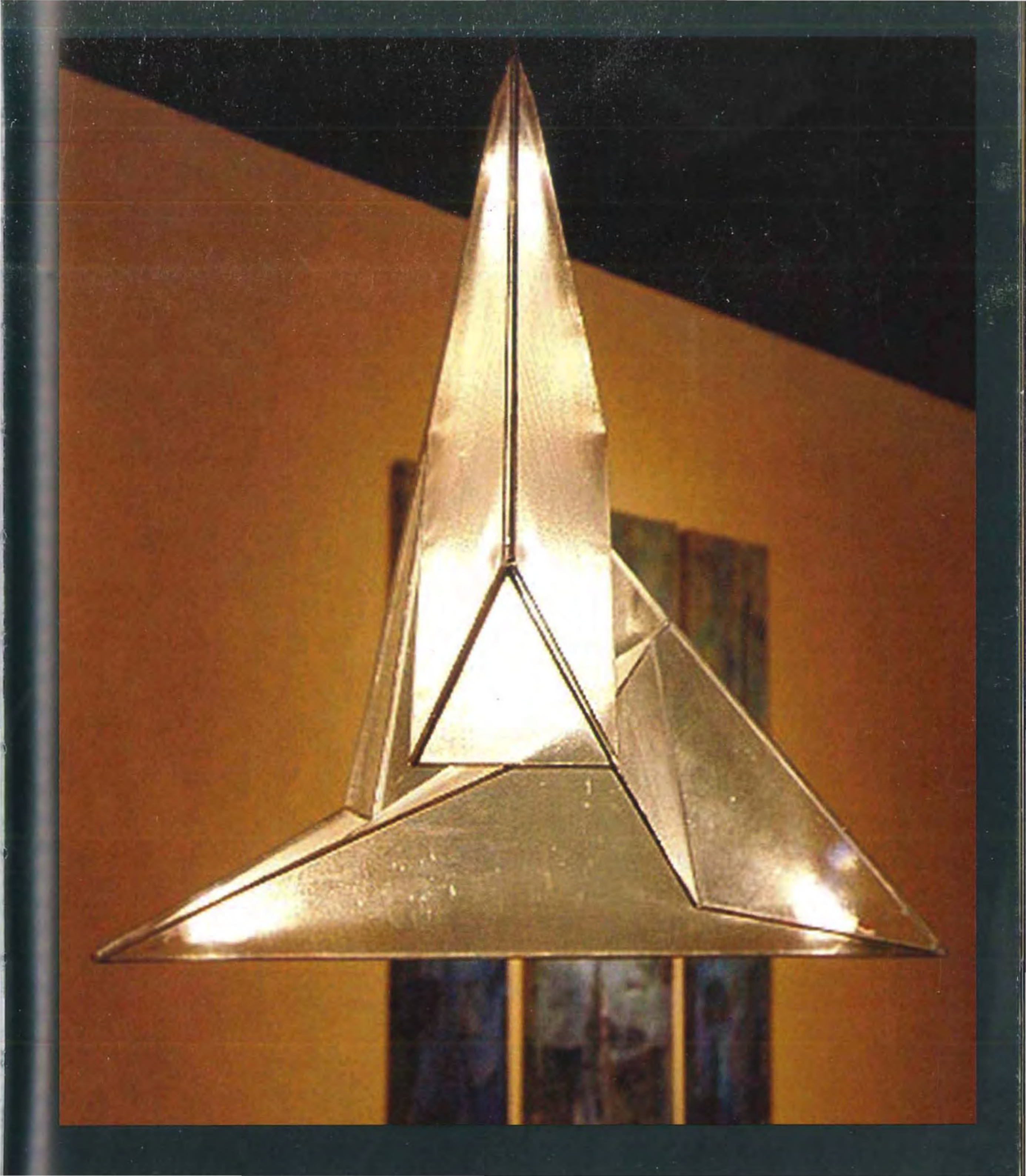
Sorprendentemente, el tetraedro y el poliedro de Szilassi son los dos únicos poliedros en los que cada cara comparte una arista con cada una de las otras. Según Gardner: «Hasta que el programa informático de Szilassi encontró la estructura, no se sabía que podía existir».

El poliedro de Szilassi también aporta información sobre el problema de colorear mapas. Un mapa tradicional necesita un mínimo de cuatro colores si se quiere garantizar que no existan dos regiones adyacentes del mismo color. Para un mapa dibujado sobre la superficie de un toro, el número es siete. Esto significa que cada cara del poliedro de Szilassi debe presentar un color diferente para garantizar que no existan dos caras adyacentes del mismo color. A efectos comparativos, un tetraedro demuestra que son necesarios cuatro colores para un mapa dibujado sobre una superficie que sea topológicamente equivalente a una esfera. Las propiedades de los dos poliedros podrían resumirse de este modo:

Tetraedro	4 caras	4 vértices	6 aristas	0 agujeros
Poliedro de Szilassi	7 caras	14 vértices	21 aristas	1 agujero

VÉASE TAMBIÉN Los sólidos platónicos (c. 350 a. C.), Los poliedros arquimedianos (c. 240 a. C.), La fórmula de Euler para los poliedros (1751), El teorema de los cuatro colores (1852) El juego icosiano (1857), El teorema de Pick (1899), La cúpula geodésica (1922), El poliedro de Császár (1922), Spidrones (1979) y La solución del holiedro (1999).

Lámpara inspirada en el poliedro de Szilassi, creada por Hans Schepker.



1979

El atractor de Ikeda

Kensuke S. Ikeda (nacido en 1949)

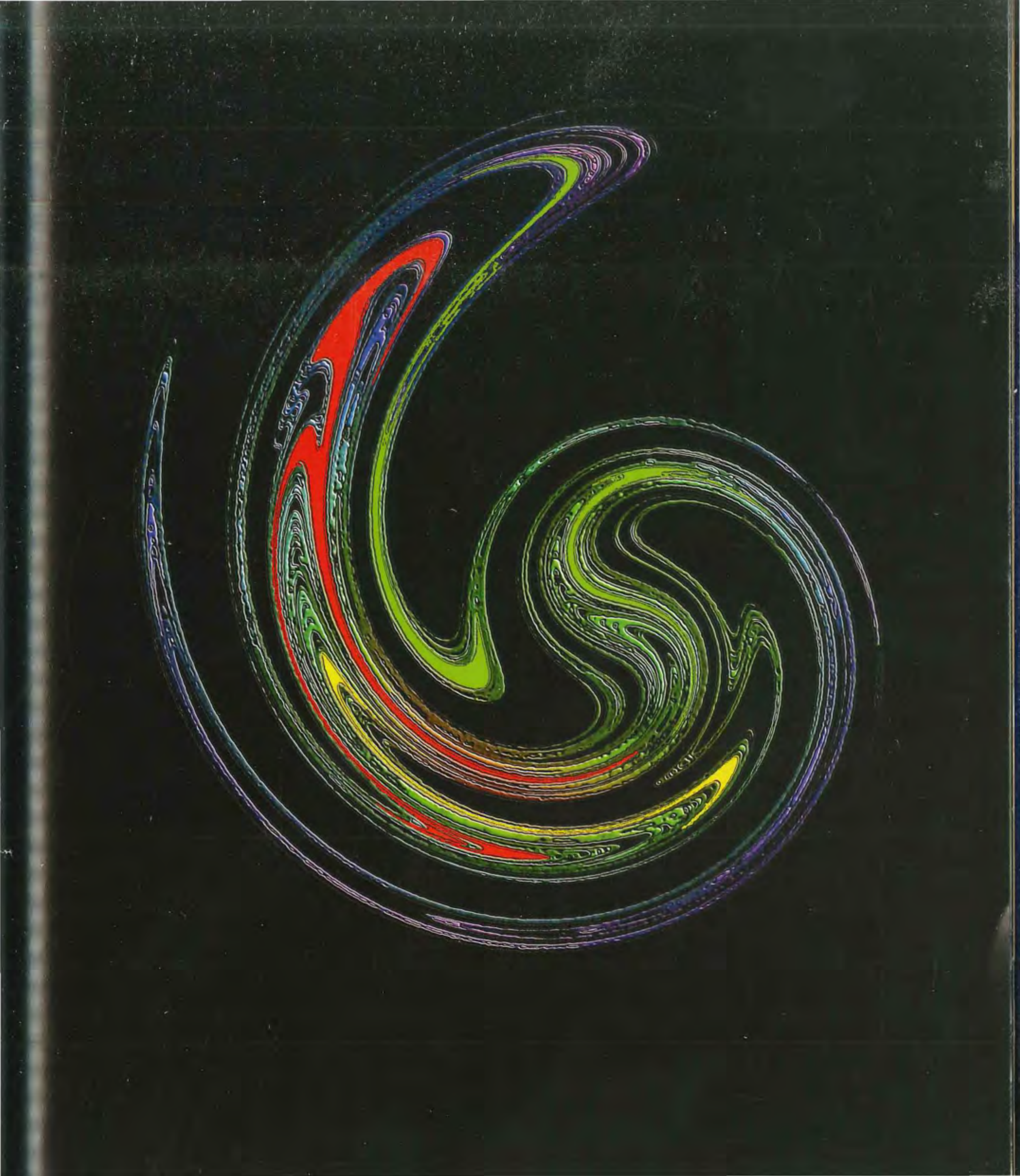
Los sistemas dinámicos son un enorme filón de *imágenes impactantes*. Los sistemas dinámicos son modelos conformados por las reglas que describen el modo en que una cierta magnitud experimenta un cambio a lo largo del tiempo. Por ejemplo, el movimiento de los planetas alrededor del Sol puede modelarse como un sistema dinámico en el cual los planetas se mueven según las leyes de Newton. La figura que se muestra aquí representa el comportamiento de las expresiones matemáticas denominadas ecuaciones diferenciales. Una forma de entender el comportamiento de las ecuaciones diferenciales podría ser imaginarnos una máquina en la que introducimos valores de variables para un instante inicial y que a continuación genera nuevos valores de las variables para un momento posterior. Al igual que se puede seguir la trayectoria de un avión por el humo que va dejando, los gráficos informáticos ofrecen una forma de seguir trayectorias de partículas cuyo movimiento queda determinado a través de sencillas ecuaciones diferenciales. El lado práctico de los sistemas dinámicos es que a veces pueden utilizarse para describir comportamientos del mundo real, como los flujos de líquidos, la vibración de puentes, el movimiento orbital de satélites, el control de brazos robóticos y la respuesta de circuitos eléctricos. A menudo los gráficos resultantes se parecen a volutas de humo, a espirales, a llamas de velas o a brumas con viento.

El atractor de Ikeda es un ejemplo de un atractor extraño, que presenta un comportamiento irregular e impredecible. Un atractor es un conjunto hacia el que evoluciona o en el que se establece un sistema dinámico tras un cierto tiempo. Con los atractores «dóciles», los puntos que al principio están próximos se mantienen juntos conforme se acercan al atractor. Con atractores extraños, puntos que al principio se encuentran adyacentes, con el tiempo siguen trayectorias bastante divergentes. Al igual que ocurre con las hojas en una corriente turbulenta, resulta imposible predecir dónde acabarán las hojas a partir de sus posiciones iniciales.

En 1979 el físico teórico japonés Kensuke Ikeda publicó *Multiple-Valued Stationary State and Its Instability of the Transmitted Light by a Ring Cavity System*, que describe una variante de este atractor. En la literatura matemática existen otros muchos atractores famosos y aplicaciones matemáticas relacionadas, entre los que se incluyen el atractor de Lorenz, el mapa logístico, el mapa del gato de Arnold, el mapa de la herradura, el mapa de Henon y el atractor de Rössler.

VÉASE TAMBIÉN El armonógrafo (1857), El analizador diferencial (1927), El caos y el efecto mariposa (1963) y La constante de Feigenbaum (1975).

Los sistemas dinámicos son modelos conformados por las reglas que describen el modo en que una cierta magnitud experimenta un cambio a lo largo del tiempo. El atractor de Ikeda que se muestra aquí es un ejemplo de un atractor extraño, que presenta un comportamiento irregular e impredecible.



1979

Spidrones

Dániel Erdély (nacido en 1956)

El periodista Peterson escribió sobre los Spidrones: «Un campo de triángulos se arruga y retuerce en un mar cristalino y ondulado. Una bola de cristal surge dibujando espirales, pasajes laberínticos. De forma perfecta se apilan ladrillos con facetas formando una estructura compacta y ordenada. Tras cada uno de estos objetos se encuentra una extraordinaria forma geométrica realizada a partir de una secuencia de triángulos: un polígono en espiral que parece la cola de un caballito de mar».

En 1979 el artista gráfico Dániel Erdély creó un ejemplo del sistema Spidron como parte de su trabajo para un curso sobre la teoría de Ernö Rubik para la Universidad de Arte y Diseño de Budapest. En 1975, Erdély ya había experimentado con versiones anteriores de este trabajo.

Para crear un Spidron, hay que trazar un triángulo equilátero y, a continuación, líneas desde los tres vértices del triángulo hasta su centro, creando tres triángulos isósceles idénticos. Seguidamente, hay que dibujar el reflejo de uno de estos triángulos isósceles de forma que sobresalga desde el lado del triángulo original. Luego hay que crear un nuevo triángulo equilátero más pequeño utilizando como base uno de los dos lados cortos del triángulo isósceles reflejado. Al repetir este procedimiento se obtendrá una estructura triangular en espiral que se va haciendo cada vez más pequeña. Finalmente, se puede eliminar el triángulo equilátero original y unir dos de las estructuras triangulares por el lado largo del triángulo isósceles mayor para darle la forma de caballito de mar.



La importancia del Spidron se basa en sus extraordinarias propiedades espaciales, incluyendo su capacidad para formar algunos poliedros que llenan el espacio y patrones de teselación. Si avanzamos lentamente como una hormiga por las regiones más profundas de la cola del caballito de mar, descubriremos que el área de cualquier triángulo equilátero equivale a la suma de las áreas de todos los triángulos más pequeños. El conjunto infinito de triángulos más pequeños podría meterse en su totalidad en el triángulo equilátero sin solaparse. Cuando se arrugan de forma adecuada, los Spidrones proporcionan un filón infinito de magníficas esculturas tridimensionales. Entre los posibles ejemplos prácticos de los Spidrones se incluyen paneles acústicos y amortiguadores para maquinaria.

VÉASE TAMBIÉN Los sólidos platónicos (c. 350 a. C.), Los poliedros arquimedianos (c. 240 a. C.), La espiral de Arquímedes (225 a. C.), La espiral logarítmica (1638) y Las teselaciones de Voderberg (1936).

IZQUIERDA: *Spidron, una estructura triangular en espiral que va reduciendo su tamaño por sus dos extremos.* DERECHA: *Los Spidrones pueden formar patrones de teselas y poliedros que llenan el espacio como esta escultura (cortesía de Dániel Erdély).*



1980

El conjunto de Mandelbrot

Benoît B. Mandelbrot (nacido en 1924)

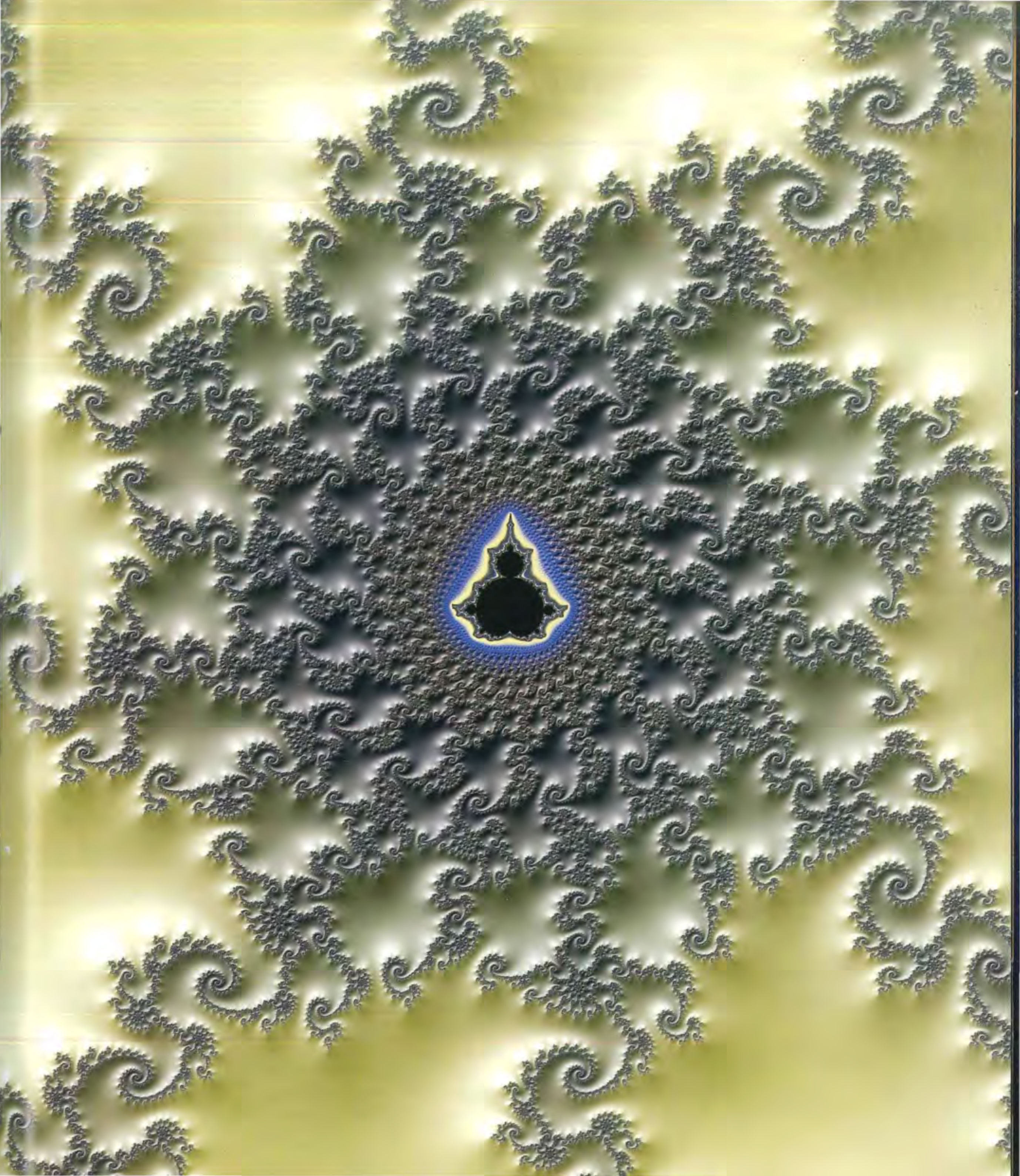
Según David Darling, el conjunto de Mandelbrot o de forma abreviada, conjunto M, es el «fractal más conocido y uno de los objetos matemáticos más bonitos que se conocen». *El Libro Guinness de los Récords* lo denominó «el objeto matemático más complicado». Arthur C. Clarke hace hincapié en hasta qué punto el ordenador es útil para mejorar su percepción: «En principio, [el conjunto de Mandelbrot] pudo haberse descubierto en cuanto el hombre empezó a contar. Pero aunque no hubieran desistido y nunca hubieran cometido un error, todos los seres humanos que han existido no habrían bastado para realizar la aritmética elemental necesaria para crear un conjunto de Mandelbrot de una escala más bien modesta».

El conjunto de Mandelbrot es un fractal, un objeto que presenta de forma continua detalles estructurales similares, con independencia de la medida en que se amplíe el contorno del objeto. Piense en las bonitas imágenes del conjunto M tal como son creadas por los bucles reiterativos matemáticos. En realidad, el conjunto se crea por medio de la iteración o repetición de la sencilla fórmula $z_{n+1} = z_n^2 + c$, para valores complejos de z y c, y con $z_0 = 0$. El conjunto contiene todos los puntos para los que la fórmula no produce valores que diverjan a infinito. Robert Brooks y Peter Matelski realizaron las primeras y rudimentarias imágenes del conjunto M en 1978, a las que siguió en 1980 el remarcable trabajo de Mandelbrot sobre sus aspectos fractales y la abundante información geométrica y algebraica que transmite.

La estructura del conjunto M contiene una espiral muy fina y trayectorias rizadas que conectan un número infinito de formas insulares. Las ampliaciones informáticas del conjunto M permiten obtener con facilidad imágenes que el ojo humano nunca antes había contemplado. La increíble inmensidad del conjunto M llevó a los escritores Tim Wegner y Mark Peterson a destacar lo siguiente: «Quizá haya oído hablar de una empresa que, por una cantidad de dinero, bautiza una estrella con su nombre y lo registra en un libro. Puede que pronto ocurra lo mismo con el conjunto de Mandelbrot».

VÉASE TAMBIÉN Los números imaginarios (1572) y Los fractales (1975).

El conjunto de Mandelbrot es un fractal, un objeto que presenta de forma continua detalles estructurales similares, con independencia de la medida en que se amplíe el contorno del objeto. Las ampliaciones informáticas del conjunto M permiten obtener imágenes que el ojo humano nunca había contemplado. (Reproducción de Jos Leys.)



1981

El grupo Monstruo

Robert L. Griess, Jr. (nacido en 1945)

En 1981 el matemático estadounidense Robert Griess construyó el Monstruo, el mayor y uno de los más misteriosos grupos de los denominados grupos esporádicos, un particular conjunto de grupos en el campo de la **teoría de grupos.** La investigación para entender el Monstruo ha ayudado a los matemáticos a comprender algunos de los pilares básicos de la simetría y cómo dichos pilares, junto con algunas de sus excepcionales subfamilias, pueden utilizarse para resolver profundos problemas relativos a la simetría en matemáticas y física matemática. Podemos pensar en el grupo Monstruo como en un inconcebible copo de nieve con más de 10^{53} simetrías que habita en un espacio de 196.884 dimensiones.

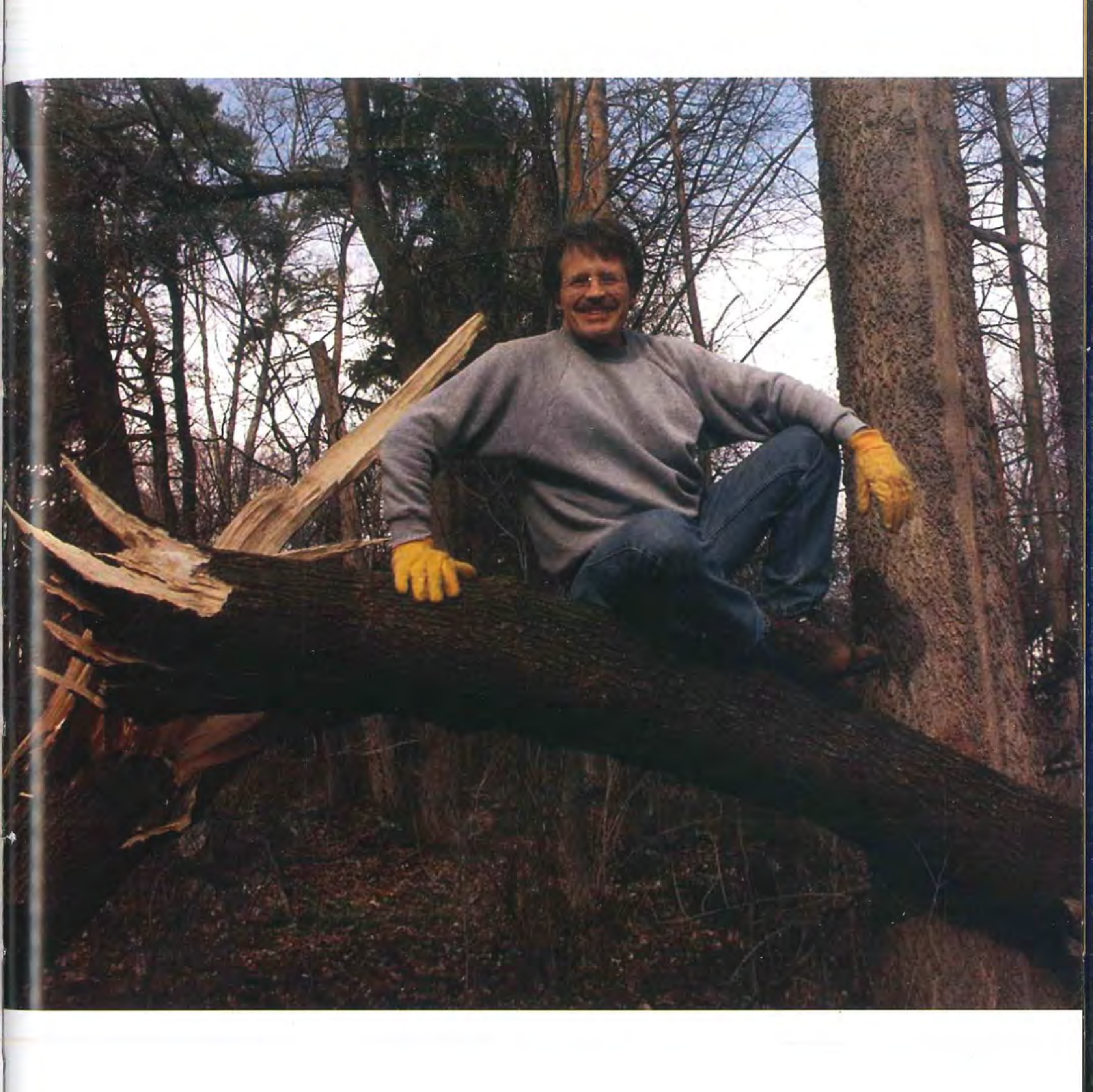
Griess contaba que se obsesionó con la construcción del Monstruo en 1979, año en el que se casó, y que su mujer fue «muy comprensiva» durante todo ese intenso proceso, ya que solo se daba un respiro por Acción de Gracias y el día de Navidad. En 1982 se publicaba por fin su trabajo de 102 páginas sobre el Monstruo. A los matemáticos les maravilló que Griess pudiera haber construido el Monstruo sin utilizar un ordenador.

La estructura del Monstruo, más que una mera curiosidad, muestra profundas conexiones entre la simetría y la física, e incluso podría estar relacionada con la teoría de cuerdas, que postula que todas las partículas fundamentales en el Universo están hechas de pequeños lazos de energía que vibran. Mark Ronan, en su libro *Symmetry and the Monster*, afirma que el Monstruo «se ha adelantado a su época: se trata de un elemento de las matemáticas del siglo XXII que se ha colado por casualidad en el siglo XX». En 1983 el físico Freeman Dyson escribió que el Monstruo podría estar «integrado de una forma insospechada en la estructura del universo».

En 1973 Griess y Bernd Fischer anticiparon la existencia del Monstruo, y John Conway acuñó el nombre del objeto. En 1998 se concedió la medalla Fields a Richard Borcherds por su trabajo en la comprensión del Monstruo y por sus profundas conexiones con otras áreas de las matemáticas y la física.

VÉASE TAMBIÉN La teoría de grupos (1832), Los grupos del papel pintado (1891), La medalla Fields (1936) y La búsqueda del grupo de Lie E_8 (2007).

El matemático estadounidense Robert Griess (en la imagen) construyó el Monstruo en 1981. La investigación para entender el Monstruo ha ayudado a muchos matemáticos a comprender algunos de los pilares básicos de la simetría. El grupo Monstruo hace referencia a un espacio de 196.884 dimensiones.



1982

Selección de triángulos en una esfera

Glen Richard Hall (nacido en 1954)

En 1982 Glen Hall publicó su célebre trabajo *Acute Triangles in the n-Ball.* Se trataba del primer documento matemático que publicaba y en él se describía el trabajo que desarrolló mientras cursaba un posgrado de probabilidad geométrica en la Universidad de Minnesota. Imagínese que elige tres puntos de un círculo de forma aleatoria para crear un triángulo. Hall se preguntó cuál sería la probabilidad de obtener un «triángulo agudo», no solo para triángulos en el interior de un círculo, sino también en dimensiones superiores, como dentro de esferas e hiperesferas. Estas generalizaciones de un círculo se denominan esferas *n*-dimensionales. Un triángulo agudo es aquel en el que los tres ángulos miden menos de 90 grados.

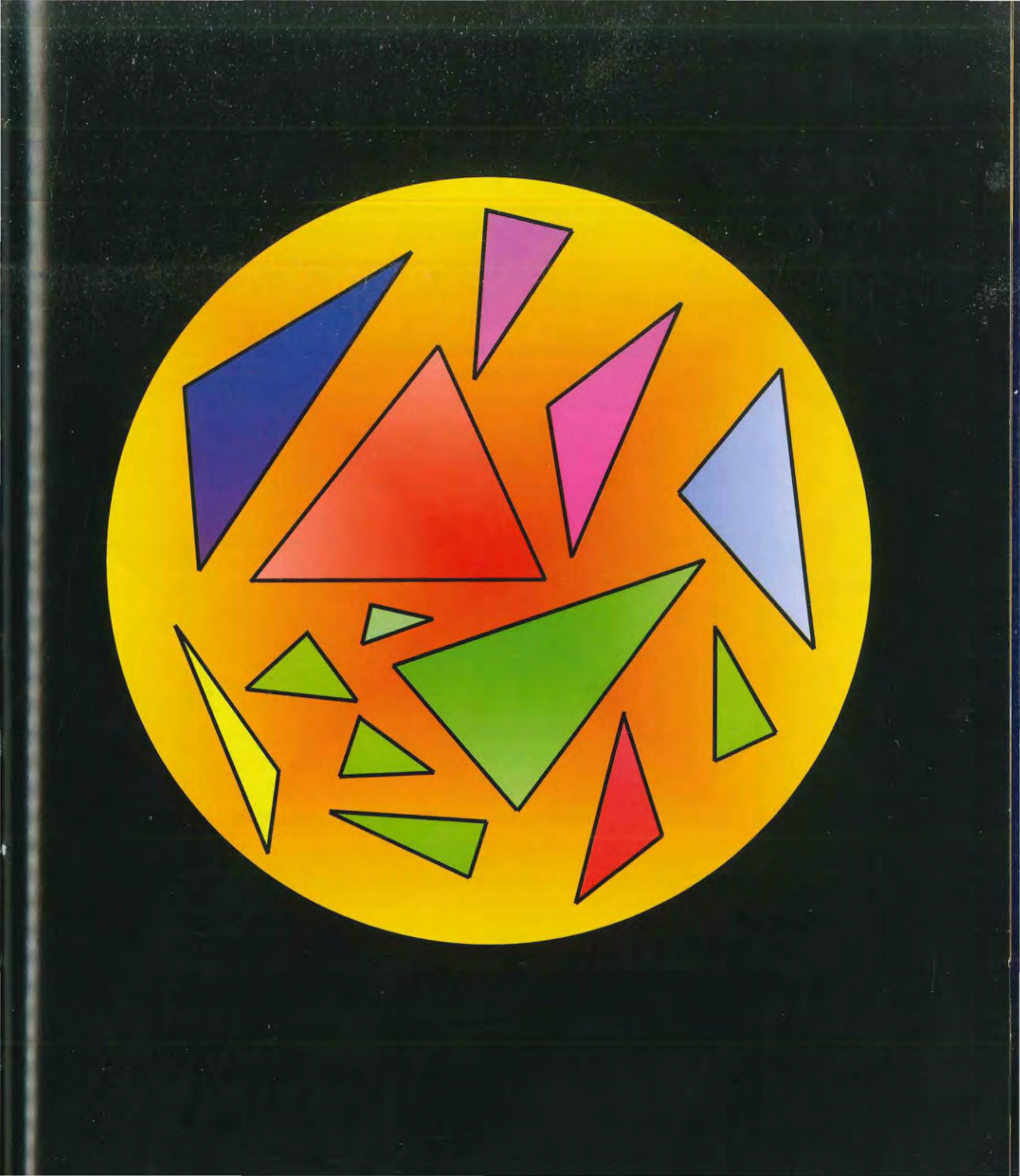
A continuación se presentan algunos valores de P_n, la probabilidad de seleccionar un triángulo agudo en una *n*-esfera si los tres puntos del triángulo se elijen de forma independiente y uniforme:

$P_2 = 4/\pi^2 - 1/8 \approx 0{,}280285$ (círculo)
$P_3 = 33/70 \approx 0{,}471429$ (esfera)
$P_4 = 256/(45\pi^2) + 1/32 \approx 0{,}607655$ (hiperesfera tetradimensional)
$P_5 = 1415/2002 \approx 0{,}706793$ (hiperesfera pentadimensional)
$P_6 = 2048/(315\pi^2) + 31/256 \approx 0{,}779842$ (hiperesfera hexadimensional)

Hall se dio cuenta de que conforme aumentaba la dimensión de la esfera, la probabilidad de elegir un triángulo agudo también aumentaba. En el momento en el que alcancemos la novena dimensión, tendremos una probabilidad de 0,905106 de seleccionar un triángulo agudo. El trabajo relativo a los triángulos es extraordinario porque hasta principios de los ochenta los matemáticos no dispusieron de ninguna generalización sobre la selección de triángulos en dimensiones superiores. En una comunicación personal conmigo, Hall señalaba que estaba maravillado por la aparente alternancia de las probabilidades entre soluciones racionales e irracionales según la dimensión de la esfera, una oscilación dimensional que probablemente los matemáticos no hubieran sospechado nunca antes de esta investigación. Los números racionales son aquellos que pueden expresarse como fracción de dos números enteros. El matemático Christian Buchta se encargó en 1986 de facilitar soluciones para las integrales de Hall.

VÉASE TAMBIÉN El teorema de Viviani (1659), La aguja de Buffon (1777), La *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace (1812) y El teorema de las trisectrices de Morley (1899).

Seleccione tres puntos en un círculo de forma aleatoria para crear un triángulo. ¿Qué probabilidad existe de obtener un triángulo donde cada uno de los tres ángulos mida menos de 90°?



1984

El polinomio de Jones

Vaughan Frederick Randal Jones (nacido en 1952)

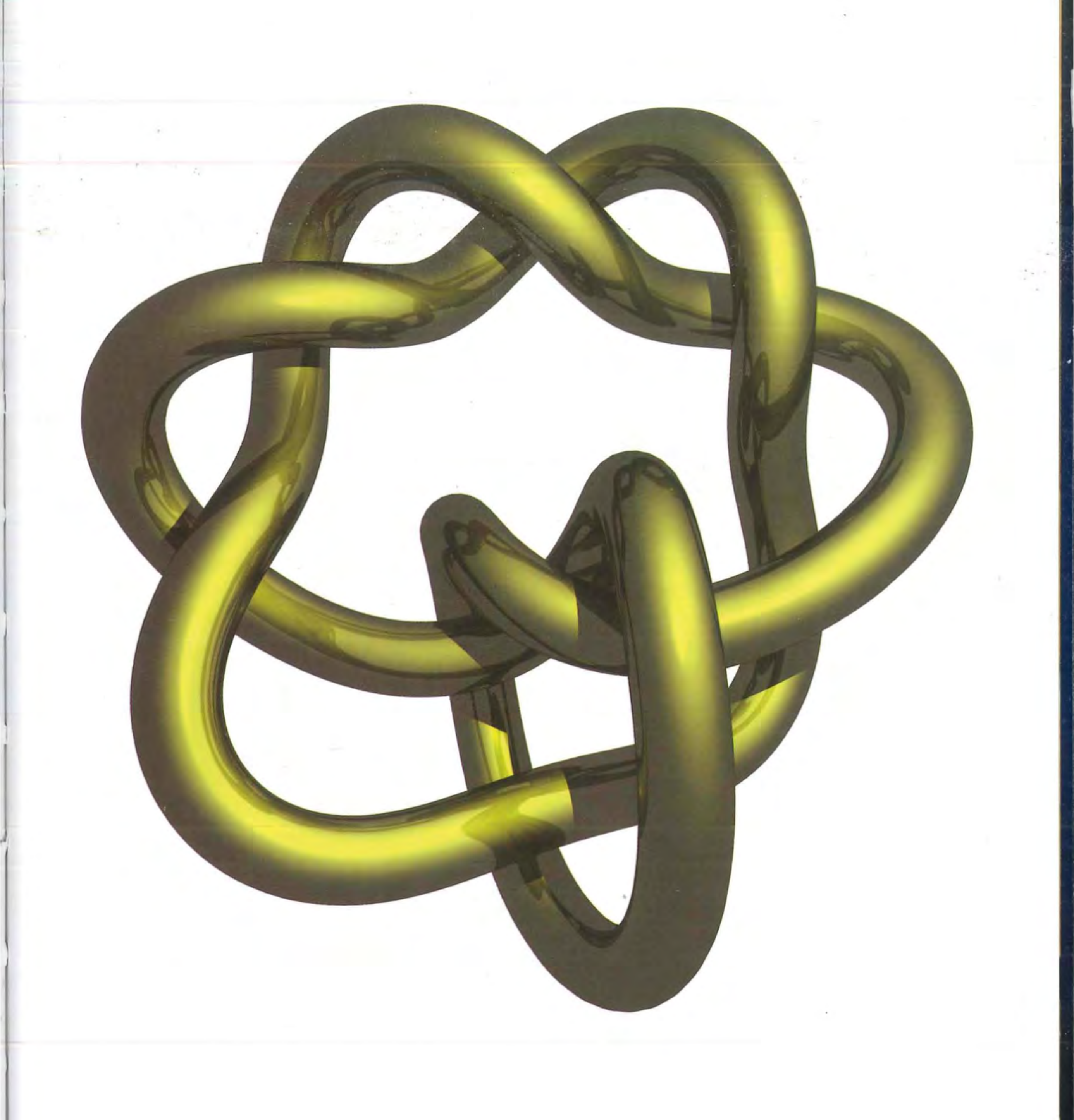
En matemáticas, incluso la curva más enrevesada en tres dimensiones puede representarse como una proyección (o sombra) sobre una superficie plana. Si los nudos matemáticos se representan con un diagrama, se suele indicar con pequeños cortes en las líneas cuándo un tramo cruza por encima o por debajo de otro tramo.

Uno de los objetivos de la teoría de nudos es encontrar invariantes de nudos. Con «invariante» nos referimos a un valor o característica matemática que es igual para nudos equivalentes, por lo que puede utilizarse para determinar si dos nudos son diferentes. En 1984, los teóricos de nudos estaban totalmente emocionados con la sorprendente invención del matemático neozelandés Vaughan Jones, un invariante que ahora se denomina el polinomio de Jones y que permitía distinguir más nudos que cualquier otro invariante anterior. Jones había llegado a su importantísimo descubrimiento por casualidad, mientras trabajaba en un problema de física. Según el matemático Keith Devlin: «Al darse cuenta que había tropezado con una conexión imprevista y oculta, Jones consultó al teórico de nudos Joan Birman, y el resto, como se suele decir, es historia [...]». La investigación de Jones «provocó un espectacular incremento de la investigación sobre teoría de nudos y abrió una vía para toda una serie de nuevos invariantes polinómicos algunos de los cuales estimularon el creciente conocimiento sobre nuevas y emocionantes aplicaciones tanto en biología como en física [...]». A los biólogos que estudian las cadenas de ADN les interesan los nudos y la forma en que estos pueden ayudarles a aclarar el funcionamiento del material genético en las células o incluso a combatir los ataques virales. Un procedimiento sistemático (o algoritmo) permite a los matemáticos expresar el polinomio de Jones en relación con cualquier nudo en función de su patrón de cruces.

El uso de invariantes de nudos ha recorrido un largo camino. Hacia 1928 James W. Alexander (1888–1971) introdujo el primer polinomio asociado a los nudos. Lamentablemente, el polinomio de Alexander no servía para detectar la diferencia entre un nudo y su imagen especular, algo que sí que podía hacer el polinomio de Jones. Cuatro meses después de que Jones anunciara su nuevo polinomio, se anunció el polinomio HOMFLY, de carácter más general.

VÉASE TAMBIÉN Nudos (c. 100.000 a. C.), Los nudos de Perko (1974) y La ley de Murphy y los nudos (1988).

Nudo con 10 cruces, por Jos Leys. Uno de los objetivos de la teoría de nudos es encontrar una característica matemática que sea igual para nudos equivalentes de tal manera que pueda utilizarse para determinar si dos nudos son diferentes.



1985

La variedad de Weeks

Jeffrey Renwick Weeks (nacido en 1956)

La geometría hiperbólica es una geometría no euclídea en la que no se cumple el postulado de las paralelas de Euclides. En esta geometría de dos dimensiones, para cualquier recta y dado un punto que no se encuentre sobre ella, existen muchas otras rectas que pasan por el punto sin cruzarse con la primera. La geometría hiperbólica suele visualizarse utilizando superficies en forma de silla de montar, en las cuales, la suma de los ángulos de un triángulo es inferior a 180 grados. Esta y otras extrañas geometrías conllevan implicaciones para las matemáticas e incluso para la cosmología que posibilitan la especulación sobre las propiedades y formas de nuestro universo.

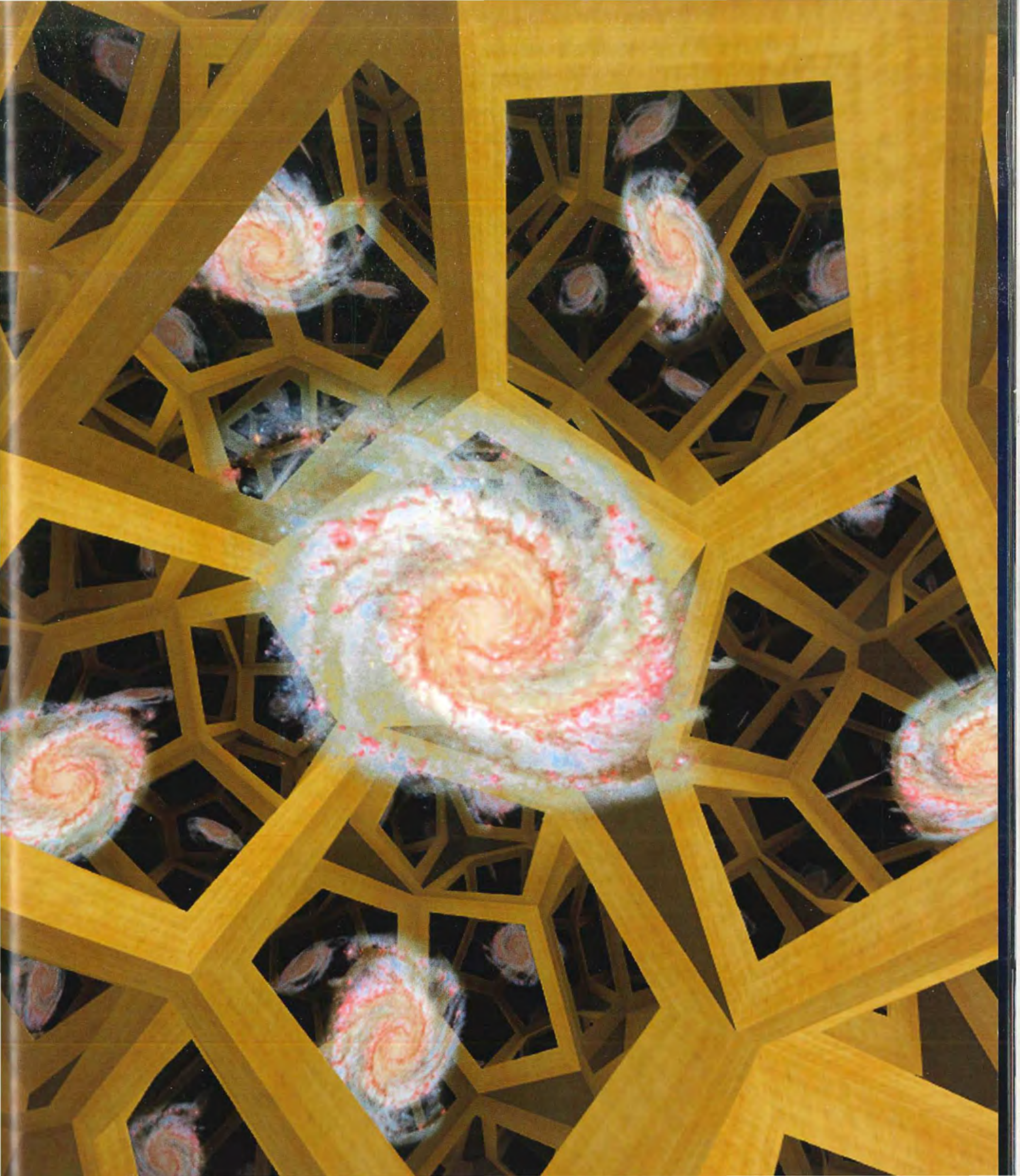
En 2007 David Gabai, de la Universidad de Princeton, Robert Meyerhoff, de la Escuela de Boston, y Peter Milley, de la Universidad de Melbourne, en Australia, demostraron que un espacio hiperbólico particular de tres dimensiones, o 3-variedad, presenta un volumen mínimo. Esta forma, denominada variedad de Weeks debido a su descubridor, el matemático estadounidense Jeffrey Weeks, posee un inmenso interés para los topólogos que catalogan formas de este tipo.

En la geometría tradicional euclídea, el concepto de «volumen mínimo» para un espacio tridimensional carece de sentido. Las formas y volúmenes pueden ajustarse a cualquier escala. Sin embargo, la curvatura espacial de la geometría hiperbólica ofrece una unidad intrínseca para la longitud, el área y el volumen. En 1985 Weeks había creado una pequeña variedad con un volumen de aproximadamente 0,94270736. (La variedad de Weeks está relacionada con el espacio alrededor de un par de lazos entrelazados, conocidos como el enlace de Whitehead.) Hasta 2007 nadie supo a ciencia cierta si la variedad de Weeks era la más pequeña.

MacArthur Fellow Jeffrey Weeks se doctoró en matemáticas en la Universidad de Princeton en 1985, bajo la supervisión de William Thurston. Una de sus principales pasiones es el uso de la topología para cubrir la laguna existente entre la geometría y la cosmología observacional. También ha desarrollado un programa informático interactivo para introducir en la geometría a los jóvenes estudiantes y para dejarles explorar universos que son finitos aunque no tienen límites.

VÉASE TAMBIÉN Los *Elementos* de Euclides (300 a. C.), Geometría no euclídea (1829), La superficie de Boy (1901) y La conjetura de Poincaré (1904).

Este modelo de una variedad de Weeks contiene tan solo una galaxia aunque se pueden ver imágenes de dicha galaxia repitiéndose en un patrón cristalino, dando la impresión de un espacio infinito. El efecto es similar al que produce un pasillo con espejos, que también crea la ilusión de un espacio infinito.



1985

La conjetura de Andrica

Dorin Andrica (nacido en 1956)

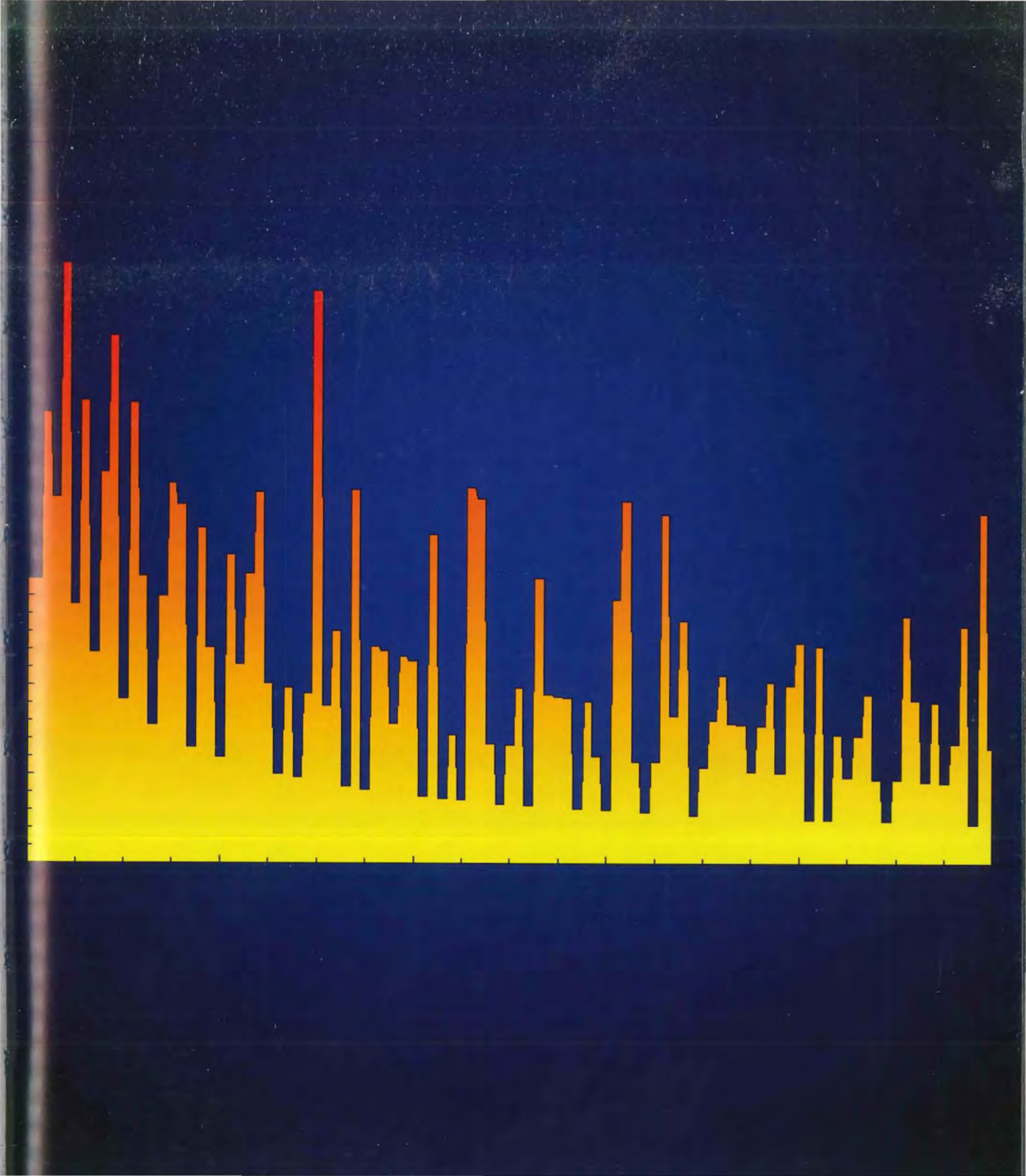
Un número primo es un número entero que tiene exactamente dos divisores enteros distintos: 1 y el propio número. Por ejemplo, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 y 37 son números primos. El gran matemático suizo Leonhard Euler (1707–1783) apuntó: «Los matemáticos han intentado en vano hasta hoy descubrir algún tipo de orden en la secuencia de números primos y tenemos razones para creer que se trata de un misterio que la mente nunca comprenderá». Las matemáticas han buscado durante mucho tiempo patrones en la secuencia de los números primos y también en los huecos que hay entre ellos (la palabra «hueco» hace referencia a la diferencia entre dos números primos consecutivos. El valor de la diferencia media entre primos aumenta como el logaritmo natural de los números primos de los extremos de la diferencia. Como ejemplo de un gran hueco conocido, tenemos la diferencia de 879 números no primos tras el primo 277.900.416.100.927. En 2009 el mayor hueco conocido entre primos tenía una longitud de 337.446.

En 1985 el matemático rumano Dorin Andrica publicó *Andrica's Conjecture*, que hace referencia a los huecos entre los números primos. En particular, la conjetura establece que $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$, donde p_n es el enésimo número primo. Por ejemplo, considere los números primos 23 y 29. Al aplicar la conjetura de Andrica, obtenemos $\sqrt{29} - \sqrt{23} < 1$. Otra forma de escribir esto es $g_n < 2\sqrt{p_n} + 1$, donde g_n es la diferencia entre dos primos consecutivos: $g_n = p_{n+1} - p_n$. Hasta el año 2008, se había demostrado la veracidad de la conjetura para todo valor de n menor que $1{,}3002 \times 10^{16}$.

Si en la conjetura de Andrica examinamos el lado izquierdo de la desigualdad, $A_n = \sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}$, el valor más alto de A_n que se ha encontrado se obtiene para $n = 4$, siendo A_n aproximadamente igual a 0,67087. La conjetura de Andrica se estableció precisamente en el momento en que los ordenadores se hacían omnipresentes, lo que propició un flujo constante de actividad cuyo objetivo era comprender y encontrar contraejemplos que permitieran echar abajo la conjetura. Hasta ahora, la conjetura de Andrica todavía se mantiene aunque sigue sin demostrarse.

VÉASE TAMBIÉN Números primos generados por cigarras (c. 1 millón a. C.), La criba de Eratóstenes (c. 240 a. C.), La conjetura de Goldbach (1742), Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801), La función de Möbius (1831), La hipótesis de Riemann (1859), La demostración del teorema de los números primos (1896), La constante de Brun (1919), La conjetura de Gilbreath (1958), Los números de Sierpiński (1960), La espiral de Ulam (1963) y Erdös y la colaboración extrema (1971).

Función A_n para los 100 primeros números primos. El valor del punto vertical más alto de esta gráfica (la barra cerca de la parte izquierda de la línea) es 0,67087, y el intervalo del eje x va de 1 a 100.



1985

La conjetura ABC

David Masser (nacido en 1948), **Joseph Oesterlé** (nacido en 1954)

La conjetura ABC se considera uno de los más importantes problemas sin resolver en teoría de números, el estudio de las propiedades de los números enteros. Si la conjetura es correcta, los matemáticos podrán demostrar otros muchos teoremas célebres en tan solo unas líneas.

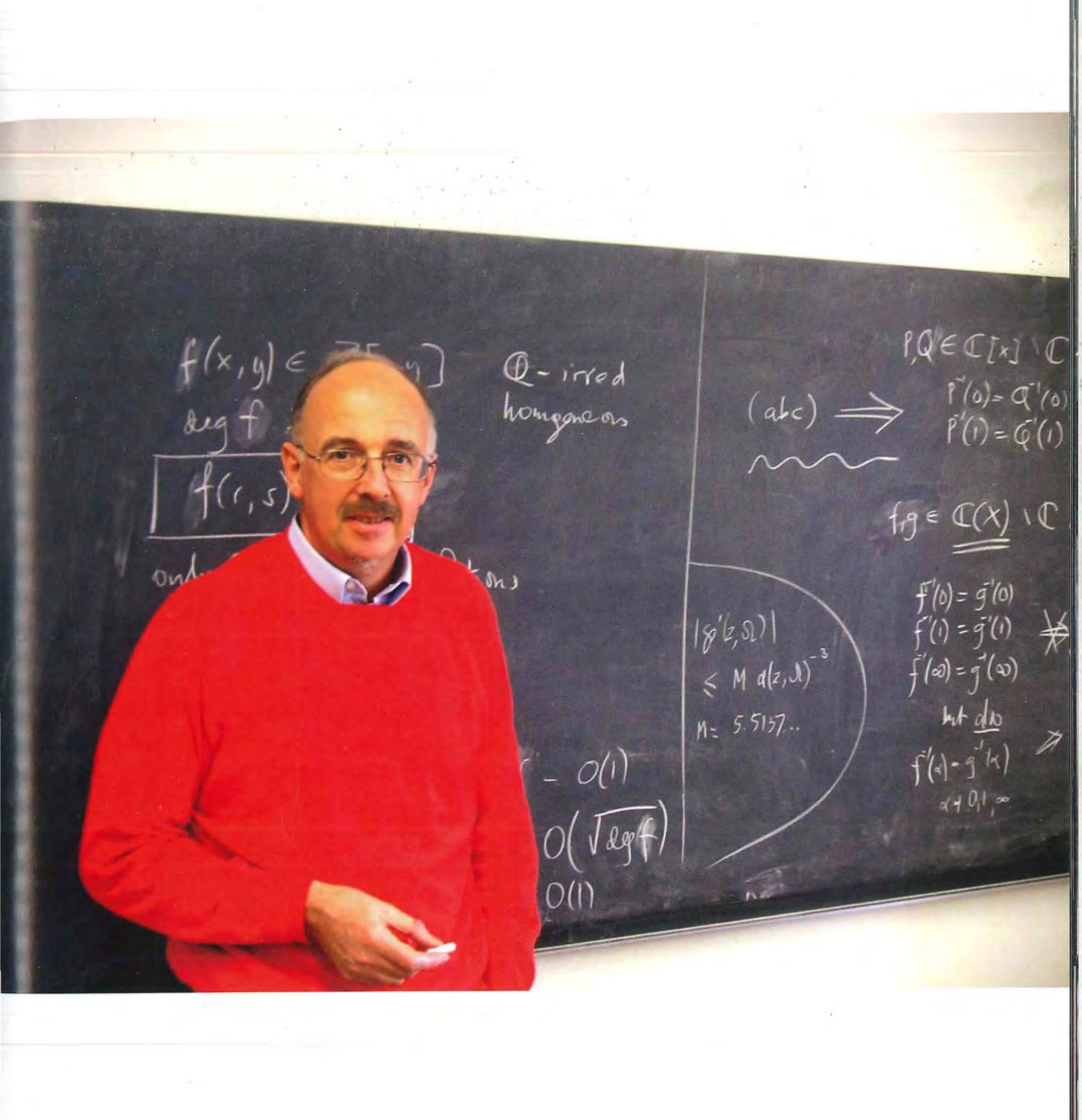
Los matemáticos Joseph Oesterlé y David Masser plantearon la conjetura por primera vez en 1985. Para comprender la conjetura, definimos un número «sin cuadrados» como aquel número entero que no se puede dividir por el cuadrado de ningún número. Por ejemplo, 13 es un número sin cuadrado, pero no lo es 9 (divisible por 3^2). La parte sin cuadrados de un número entero n, indicada como $sqp(n)$, es el mayor número sin cuadrados que puede formarse por medio de la multiplicación de los factores primos de n. De este modo, para $n = 15$, los factores primos son 5 y 3, y $3 \times 5 = 15$, un número sin cuadrados, por tanto $sqp(15) = 15$. Por otro lado, para $n = 8$, los factores primos son todos 2, lo que significa que $sqp(8) = 2$. De forma similar, $sqp\text{-}(18) = 6$, que se consigue multiplicando sus factores 3 y 2, y $sqp(13) = 13$.

Seguidamente, considere los números A y B, que no tienen factores comunes, y C, que es su suma. Por ejemplo, considere $A = 3$, $B = 7$ y $C = 10$. La parte sin cuadrados del producto de ABC es 210. Cabe tener en cuenta que sqp-(ABC) es mayor que C, aunque este no es siempre el caso. Se puede demostrar que la relación sqp $(ABC)/C$ puede resultar arbitrariamente pequeña con una selección apropiada de A, B y C. Sin embargo, la conjetura ABC establece que $[\mathrm{sqp}(ABC)]^n/C$ alcanza un valor mínimo si n es cualquier número real mayor que 1.

Dorian Goldfeld escribe: «La conjetura ABC [...] es más que práctica: para las matemáticas también es bella. Ver tantos problemas diofánticos [con solución entera] que de forma imprevista se condensan en una simple ecuación permite llegar a la conclusión de que todas las subdisciplinas de matemáticas son aspectos de una única unidad subyacente [...]».

VÉASE TAMBIÉN Números primos generados por cigarras (c. 1 millón a. C.), La criba de Eratóstenes (c. 240 a. C.), La conjetura de Goldbach (1742), La construcción de un heptadecágono regular (1796), Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss (1801), La hipótesis de Riemann (1859), La demostración del teorema de los números primos (1896), La constante de Brun (1919), La espiral de Ulam (1963) y La conjetura de Andrica (1985).

La conjetura ABC *se considera uno de los más importantes problemas sin resolver en teoría de números. Los matemáticos David Masser (en la imagen) y Joseph Oesterlé propusieron la conjetura por primera vez en 1985.*



Q - irred
homogeneous
(abc)
M= 5.5157..

La sucesión audioactiva

John Horton Conway (nacido en 1937)

Considere la siguiente sucesión de números: 1, 11, 21, 1211, 111221,... Para apreciar cómo se forma la secuencia, es útil ir contando en voz alta los números de cada entrada. Observe que la segunda entrada tiene «dos unos», obteniéndose de ese modo el número 21 para la tercera entrada. Esta tercera entrada tiene «un dos y un uno», cifras que forman la cuarta entrada. Aplicando este patrón, se puede generar toda la secuencia. El matemático John Conway la estudió de forma exhaustiva y al proceso le dio el nombre de «audioactivo».

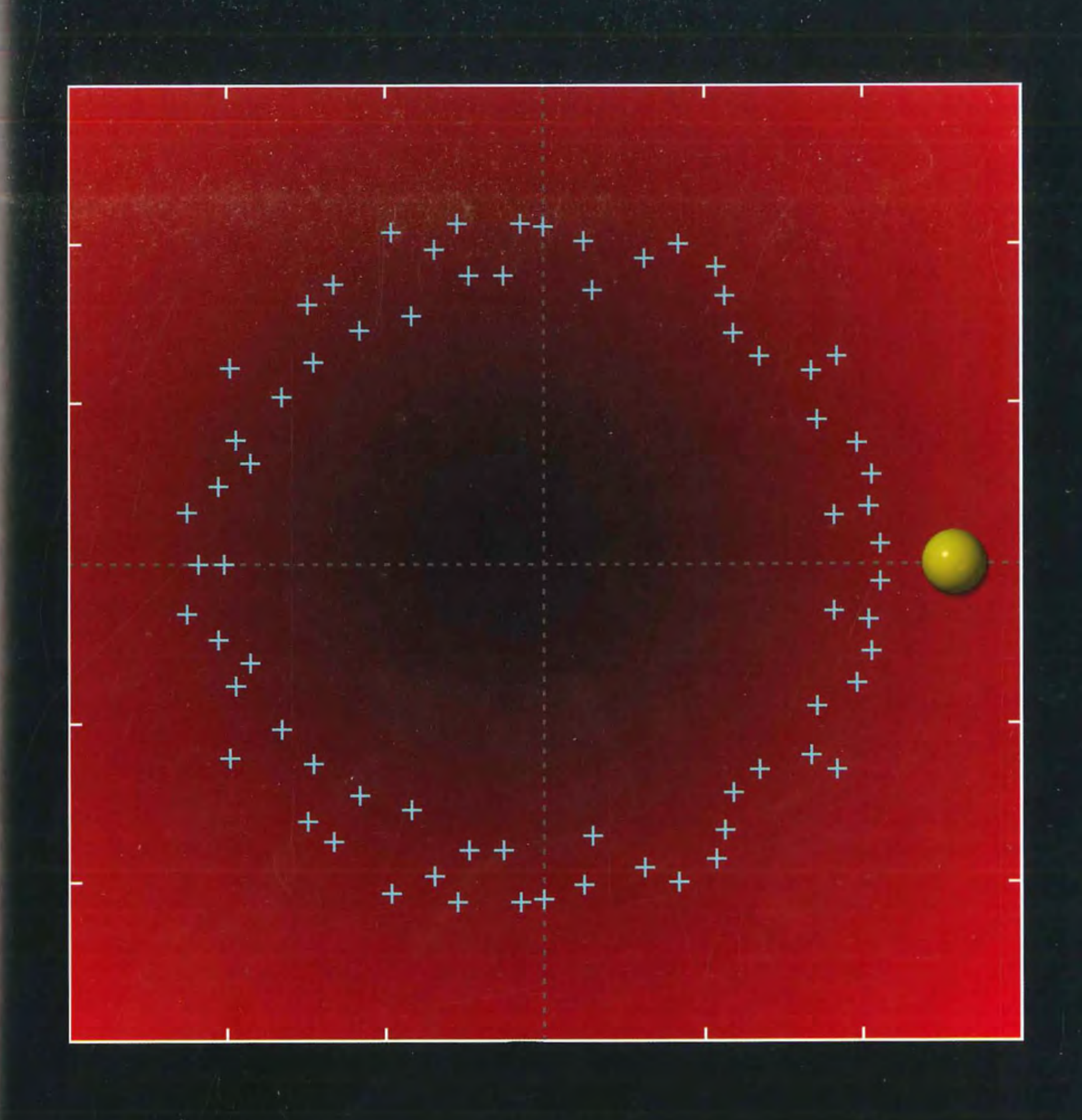
La secuencia aumenta de forma bastante rápida. Por ejemplo, la entrada 16 es: 13 211321322113311213211331121113122112132113121113222112311311222113111231133211121321132221131211 3211. Si estudiáramos de forma detenida la secuencia, encontraríamos una predominancia del 1, siendo el 2 y el 3 menos comunes, y observaríamos la ausencia de números superiores a 3. ¿Sería posible demostrar que la cadena333 nunca puede aparecer? En la siguiente representación de la entrada 11 (en la que el número 3 se representan con el símbolo ■) puede observarse que la aparición del 3 parece errática, como barcos perdidos en un mar infinito: -■_■_■__■■__■__■■___ ■____■_■___■____■_■_____■__■_■■_____■__■____■___■__.

El número de cifras de la entrada enésima de esta secuencia es prácticamente proporcional a la constante de Conway: (1,303577269034269391257099112152551890730702504659 4...)^n. Los matemáticos consideran extraordinario que el «peculiar» proceso de construcción audioactivo dé como resultado esta constante, que resulta ser la única raíz real, positiva de una ecuación polinómica. Curiosamente, la constante se aplica independientemente de la entrada de partida elegida, con la excepción de 22.

Existen muchas variantes. El investigador británico Roger Hargrave ha extendido la idea a una variante en la que una entrada junta todas las apariciones de cada cifra en la entrada anterior. Por ejemplo, la secuencia que empieza con 123 es: 123, 111213, 411213, 14311213,... Curiosamente, Roger Hargrave cree que todas estas secuencias terminan alternando las entradas 23322114 y 32232114. ¿Puede usted demostrar esto? ¿Cuáles serían las propiedades de sucesiones regresivas similares? Si se empieza a partir de una entrada particular, ¿se podría realizar el proceso hacia atrás y calcular la cadena de partida?

VÉASE TAMBIÉN La secuencia de Thue-Morse (1906), La conjetura de Collatz (1937) y Enciclopedia on-line de las secuencias de números enteros (1996).

El singular método de construcción del proceso audioactivo permite obtener la constante de Conway, 1,3035..., que resulta ser la única raíz real y positiva de un polinomio de grado 71. Esta raíz se sitúa en la zona de la esfera amarilla. Las otras raíces de este polinomio están representadas con los símbolos «+».



1988

Mathematica

Stephen Wolfram (nacido en 1959)

En los últimos veinte años se ha producido un cambio en el modo de proceder en matemáticas, una transición de la teoría y demostración puras al uso de ordenadores y a la experimentación. Este cambio se debe, en parte, a los paquetes de software computacional como Mathematica, vendido por Wolfram Research of Champaign, Illinois, y desarrollado por el matemático y teórico Stephen Wolfram. La primera versión de Mathematica se publicó en 1988 y en la actualidad ofrece un entorno informático general que gestiona muchas funciones algorítimicas, de visualización y de interfaz de usuario. Mathematica es un ejemplo de los numerosos paquetes disponibles en la actualidad para las matemáticas experimentales, entre los que se incluyen Maple, Mathcad, MATLAB y Maxima.

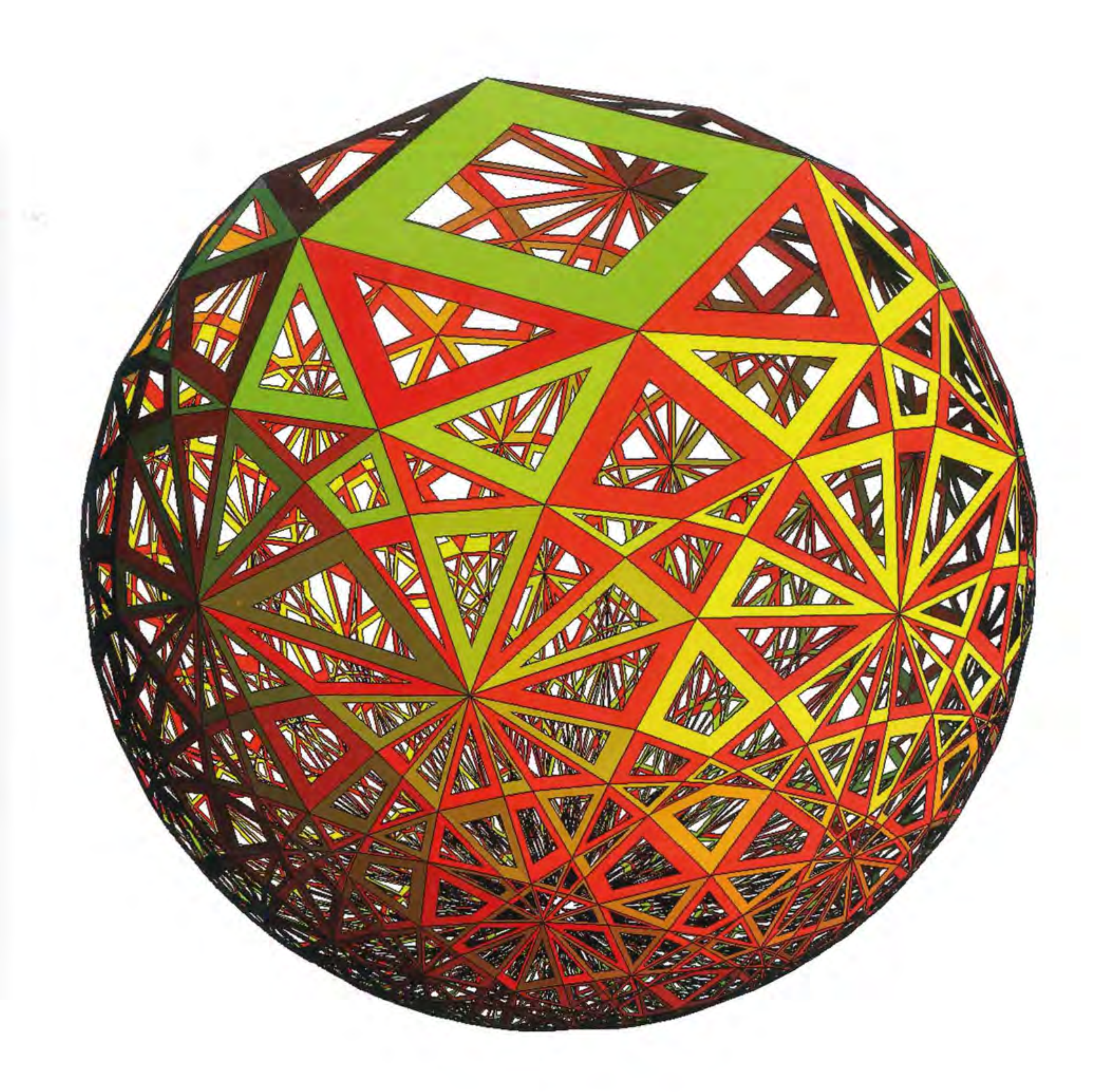
Desde la década de 1960 han existido paquetes de software indicados para tareas específicas numéricas, algebraicas, gráficas y de otro tipo. Asimismo, los investigadores interesados en el caos y en los fractales han utilizado durante mucho tiempo ordenadores para sus trabajos. Mathematica ayudó a aunar varias características de paquetes especializados de forma práctica. En la actualidad, Mathematica se utiliza en ingeniería, ciencia, finanzas, educación, arte, diseño de moda y otros campos que requieren visualización y experimentación.

En 1992 se lanzó la revista *Experimental Mathematics*, que ayudó a mostrar la aplicación de la informática en el estudio de estructuras matemáticas y a identificar importantes propiedades y patrones. Según el docente y escritor David Berlinski: «El ordenador ha [...] cambiado la naturaleza esencial de la experiencia matemática, sugiriendo por primera vez que las matemáticas, al igual que la física, todavía pueden convertirse en una disciplina empírica, un ámbito en el que las cosas se descubren porque se observan».

Según los matemáticos Jonathan Borwein y David Bailey, «quizás el avance más importante en esta línea sea el desarrollo de una amplia gama de productos de software matemático como Mathematica y Maple. En este momento, muchos matemáticos dominan suficientemente estas herramientas y las utilizan como parte de su trabajo diario de investigación. Como consecuencia, estamos empezando a ver una ola de nuevos resultados matemáticos descubiertos de forma total o parcial con la ayuda de herramientas informáticas».

VÉASE TAMBIÉN El ábaco (c. 1200), La regla de cálculo (1621), El ordenador mecánico de Babbage (1822), La caja registradora Ritty Model I (1879), El analizador diferencial (1927) y HP-35: la primera calculadora científica de bolsillo (1972).

Mathematica ofrece un entorno informático general que gestiona muchas funciones algorítmicas, de visualización y de interfaz de usuario. Este gráfico en 3D de ejemplo ha sido obtenido a través de Mathematica por cortesía de Michael Trott, un experto en computación simbólica y gráficos por ordenador.



1988

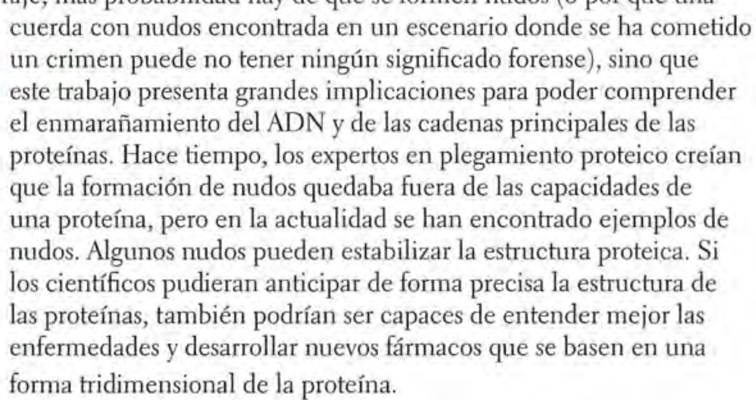
La ley de Murphy y los nudos

De Witt L. Sumners (nacido en 1941), **Stuart G. Whittington** (nacido en 1942)

Desde la Antigüedad, tejedores y marineros se han desesperado constatando la aparente tendencia de cuerdas y cabos a enredarse y anudarse, una manifestación de la famosa ley de Murphy que establece que si algo puede ir mal, irá mal. Sin embargo, hasta hace poco, no existía ninguna teoría rigurosa que explicara este exasperante fenómeno. Considere simplemente esta cuestión práctica: un simple nudo en una cuerda de escalada puede reducir hasta un 50% la cantidad de tensión que la cuerda puede soportar sin romperse.

En 1988 el matemático De Witt L. Sumners y el químico Stuart G. Whittington despejaron claramente el fenómeno elaborando modelos de cuerdas y otros objetos similares a hilos (como las cadenas de polímeros químicas) con recorridos aleatorios no superponibles. Imagínese a una hormiga descansando en un punto de una cuadrícula cúbica. Puede caminar de forma aleatoria en cualquiera de las seis direcciones estableciendo una trayectoria a través de la red (es decir, hacia atrás o hacia delante en cualquiera de las tres direcciones). Al objeto de mimetizarse con objetos físicos que no pueden ocupar el mismo espacio de forma simultánea, el recorrido de la hormiga no es superponible, es decir, que ningún punto espacial se visita más de una vez. Según su investigación, Sumners y Whittington demostraron un resultado general: prácticamente todos los recorridos aleatorios no superponibles suficientemente largos contienen un nudo.

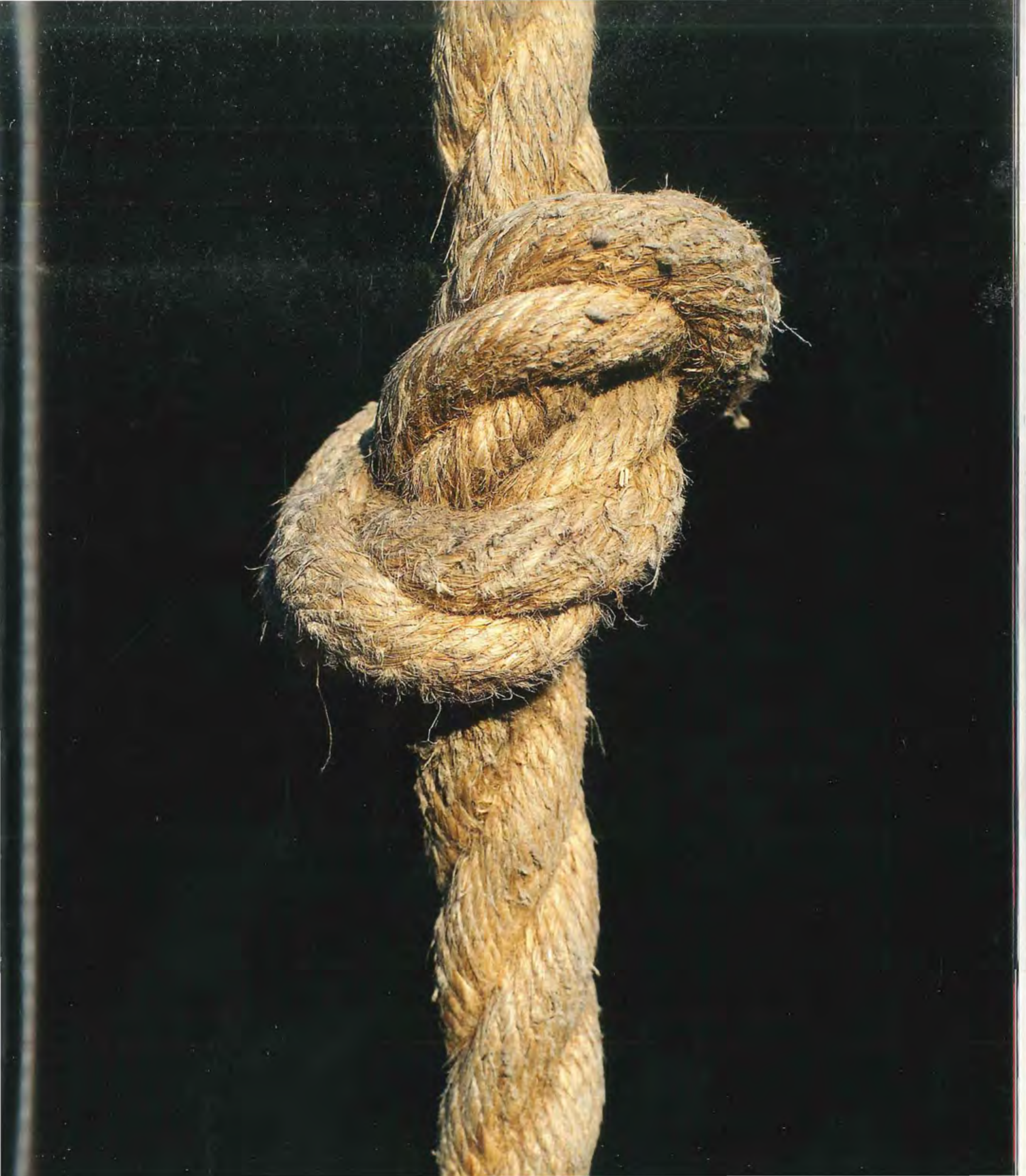
Su investigación no sólo ayudó a explicar por qué cuanto más larga es la manguera de jardín de su garaje, más probabilidad hay de que se formen nudos (o por qué una cuerda con nudos encontrada en un escenario donde se ha cometido un crimen puede no tener ningún significado forense), sino que este trabajo presenta grandes implicaciones para poder comprender el enmarañamiento del ADN y de las cadenas principales de las proteínas. Hace tiempo, los expertos en plegamiento proteico creían que la formación de nudos quedaba fuera de las capacidades de una proteína, pero en la actualidad se han encontrado ejemplos de nudos. Algunos nudos pueden estabilizar la estructura proteica. Si los científicos pudieran anticipar de forma precisa la estructura de las proteínas, también podrían ser capaces de entender mejor las enfermedades y desarrollar nuevos fármacos que se basen en una forma tridimensional de la proteína.





VÉASE TAMBIÉN Nudos (c. 100.000 a. C.), Los anillos de Borromeo (834), Perdido en el hiperespacio (1921), Los nudos de Perko (1974) y El polinomio de Jones (1984).

IZQUIERDA: *Redes de pesca enredadas.* DERECHA: *Un solo nudo en la cuerda de un escalador puede reducir en gran medida la resistencia a la rotura de la cuerda.*



1989

La curva mariposa

Temple H. Fay (nacido en 1940)

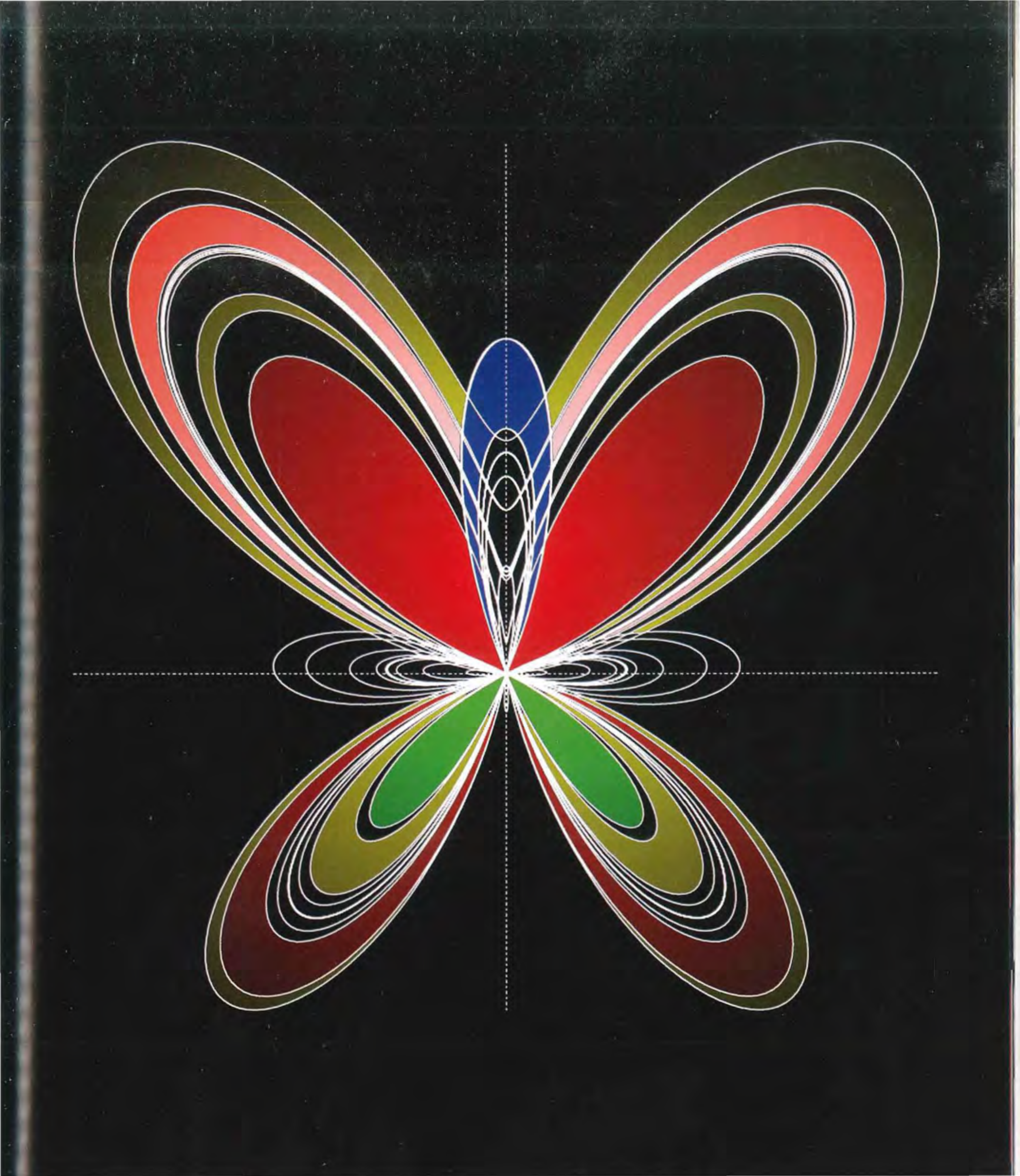
Una parametrización es un conjunto de ecuaciones que representan una serie de magnitudes en forma de funciones de variables independientes. Se suele decir que una curva en el plano está parametrizada si el conjunto de coordenadas (x, y) de la curva se representa como funciones de una variable t. Por ejemplo, en las coordenadas cartesianas normales, tenemos la ecuación estándar de la circunferencia: $x^2 + y^2 = r^2$, donde r es el radio de la circunferencia. Pero también podemos definir la circunferencia en términos de ecuaciones paramétricas: $x = r \cdot cos(t)$, $y = r \cdot sen(t)$, donde $0 < t \leq 360$ grados o equivalentemente $0 < t \leq 2\pi$ radianes. Para dibujar la gráfica, los programadores informáticos incrementan el valor de t y conectan los puntos (x, y) resultantes.

Los matemáticos y los artistas informáticos suelen recurrir a las representaciones paramétricas porque ciertas formas geométricas resultan muy difíciles de describir con una ecuación simple, como era el caso de la circunferencia. Por ejemplo, para dibujar una hélice cónica, pruebe con $x = a \cdot z \cdot \text{sen}(t)$, $y = a \cdot z \cdot \cos(t)$, y $z = t/(2\pi c)$, done a y c son constantes. En la actualidad, las hélices cónicas se utilizan en ciertos tipos de antenas.

Muchas curvas algebraicas y trascendentes expresan la belleza en su simetría, sus hojas, sus lóbulos, así como en su comportamiento asintótico. Las curvas mariposa, desarrolladas por Temple Fay cuando se encontraba en la Universidad de Southern Mississippi, presentan formas bonitas y complicadas. La ecuación de la curva mariposa puede expresarse en coordenadas polares a través de $\rho = e^{\cos\theta} - 2\cos(4\theta) + \text{sen}^5(\theta/12)$. Esta fórmula describe la trayectoria de un punto que dibuja la figura de la mariposa. La variable p es la distancia radial desde el origen hasta el punto. La curva mariposa destaca por la fascinación que despertó en estudiantes y matemáticos desde 1989, año en el que se presentó por primera vez, y ha animado a estudiantes a experimentar con variantes con periodos más largos de repetición como $\rho = e^{\cos\theta} - 2.1\cos(6\theta) + \text{sen}^7(\theta/30)$.

VÉASE TAMBIÉN El armonógrafo (1857).

Muchas curvas algebraicas y trascendentes expresan la belleza en su simetría, sus hojas, sus lóbulos, así como en su comportamiento asintótico. La ecuación correspondiente a la curva mariposa puede expresarse en coordenadas polares como: $\rho = e^{\cos\theta} - 2\cos(4\theta) + \text{sen}^5(\theta/12)$.



1965

La enciclopedia on-line de las sucesiones de números enteros

Neil James Alexander Sloane (nacido en 1939)

La enciclopedia on-line de las secuencias de números enteros (OEIS por sus siglas en inglés) es una enorme base de datos donde se pueden realizar búsquedas de sucesiones de números enteros y a la que recurren matemáticos, científicos y profanos en la materia interesados en sucesiones numéricas en disciplinas que van desde teoría de números, teoría de juegos y rompecabezas hasta física, química y comunicaciones. La sorprendente diversidad de la OEIS se puede ilustrar con dos ejemplos de entradas: el número de formas de atarse un zapato que tenga *n* pares de ojales y la expresión de la posiciones ganadoras del antiguo juego de mesa en solitario Tchoukaillon como una función dependiente del número de piedras. La página web de OEIS (www.research.att.com/~njas/sequences/) contiene más de 150.000 sucesiones, lo que la convierte en la base de datos más grande de este tipo.

Cada entrada incluye los primeros términos de la sucesión, palabras clave, motivaciones matemáticas y referencias documentales. Neil Sloane, matemático estadounidense de origen británico, comenzó a recopilar sucesiones de números enteros en 1963, cuando cursaba un posgrado en la Universidad de Cornell. Su primera materialización de la OEIS se almacenó en fichas perforadas y, después, en forma de un libro publicado en 1973 titulado *A Handbook of Integer Sequences*, que contiene 2.400 sucesiones con una ampliación de 1995 que llegaba a 5.487 sucesiones. La versión para Internet se lanzó en 1996 y cada año siguen añadiéndose unas 10.000 nuevas entradas. Si en la actualidad se publicara como libro, ocuparía 750 volúmenes del tamaño del libro de 1995.

La OEIS es un logro monumental y se utiliza con frecuencia para identificar sucesiones o determinar el estado actual de una sucesión conocida. Aun así, su uso más especializado puede que sea servir de ayuda para sugerir nuevas conjeturas. Por ejemplo, el matemático Ralf Stephan formuló recientemente más de 100 conjeturas en diversos campos, simplemente a través del estudio de las sucesiones de números de la OEIS. Comparando sucesiones con los primeros términos iguales (o sucesiones relacionadas mediante sencillas transformaciones), los matemáticos pueden comenzar a considerar nuevas conjeturas relativas a desarrollos en series de potencias, teoría de números, combinatoria, recurrencias no lineales, representaciones binarias y otras áreas de las matemáticas.

VÉASE TAMBIÉN La secuencia de Thue-Morse (1906), La conjetura de Collatz (1937), La sucesión audioactiva (1986) y El problema de la sábana (2001).

La OEIS incluye una sucesión que caracteriza el número de formas en que se puede atar un zapato con n pares de ojales de tal manera que cada ojal presente, como mínimo, una conexión directa con el lado opuesto: 1, 2, 20, 396, 14976, 907200... El recorrido del cordón debe comenzar y terminar en el primer par de ojales.



1999

El puzle Eternidad

Christopher Walter Monckton, tercer vizconde Monckton de Brenchley (nacido en 1952)

El extremadamente complicado rompecabezas conocido como puzle Eternidad se puso de moda entre 1999 y 2000 y ha sido objeto de serios análisis informáticos y matemáticos. Cada una de sus 209 piezas, todas ellas diferentes, está construida a partir de uniones de triángulos equiláteros iguales (completos o por mitades) con un área total igual a la de seis de esos triángulos. El reto consiste en encajar las piezas hasta formar un dodecágono (polígono de 12 lados) gigante y casi regular.

Christopher Monckton, inventor del puzle, prometió un premio de 1 millón de libras en su lanzamiento comercial, que realizó Ertl Toys en junio de 1999. Los primeros análisis informáticos de Monckton le indicaron que el rompecabezas no podría resolverse en unos cuantos años o incluso mucho más tiempo. En realidad, la exhaustiva búsqueda de todas las combinaciones llevaría tanto tiempo que el ordenador más rápido habría necesitado muchos millones de años para encontrar una solución utilizando búsquedas simples.

Con todo, y quizás para sorpresa de Monckton, el 15 de mayo de 2000 dos matemáticos británicos, Alex Selby y Oliver Riordan, presentaron una ordenación correcta que obtuvieron con ayuda de ordenadores, y reclamaron el premio. Curiosamente, descubrieron que conforme se aumenta el número de piezas de un puzle similar a Eternidad, la dificultad se incrementa hasta llegar a unas 70 piezas extra. Sin embargo, más allá de las 70 piezas adicionales, el número de ordenaciones correctas empieza a aumentar. Se cree que el puzle Eternidad oficial presenta como mínimo 10^{95} soluciones, muchas más que el número de átomos de nuestra galaxia. Y con todo, sigue siendo terriblemente difícil ya que existen muchísimas más ordenaciones que no son soluciones.

Debido a que Selby y Riordan se dieron cuenta de que existían muchas soluciones posibles, decidieron descartar de forma deliberada para su propia solución las pistas ofrecidas para considerar soluciones posiblemente más fáciles. En 2007 Monckton publicó el puzle Eternidad II, con 256 piezas cuadradas, cuyos bordes coloreados deben coincidir al encajar las piezas en una cuadrícula 16×16. Se estima que el número posible de configuraciones es de $1{,}115 \times 10^{557}$.

VÉASE TAMBIÉN La cuadratura del rectángulo (1925), Las teselaciones de Voderberg (1936) y Las teselas de Penrose (1973).

Pieza de muestra del puzle Eternidad, que se muestra aquí como un polígono triangulado amarillo. Cada pieza está formada por triángulos y «mitades de triángulo».





El hipercubo mágico perfecto

John Robert Hendricks (1929–2007)

El tradicional **cuadrado mágico** está formado por números naturales dispuestos en una cuadrícula cuadrada de tal manera que los números de cada fila, columna y diagonal suman la misma cantidad. En caso de tratarse de números consecutivos desde 1 hasta N^2, se dice que el cuadrado es de orden N.

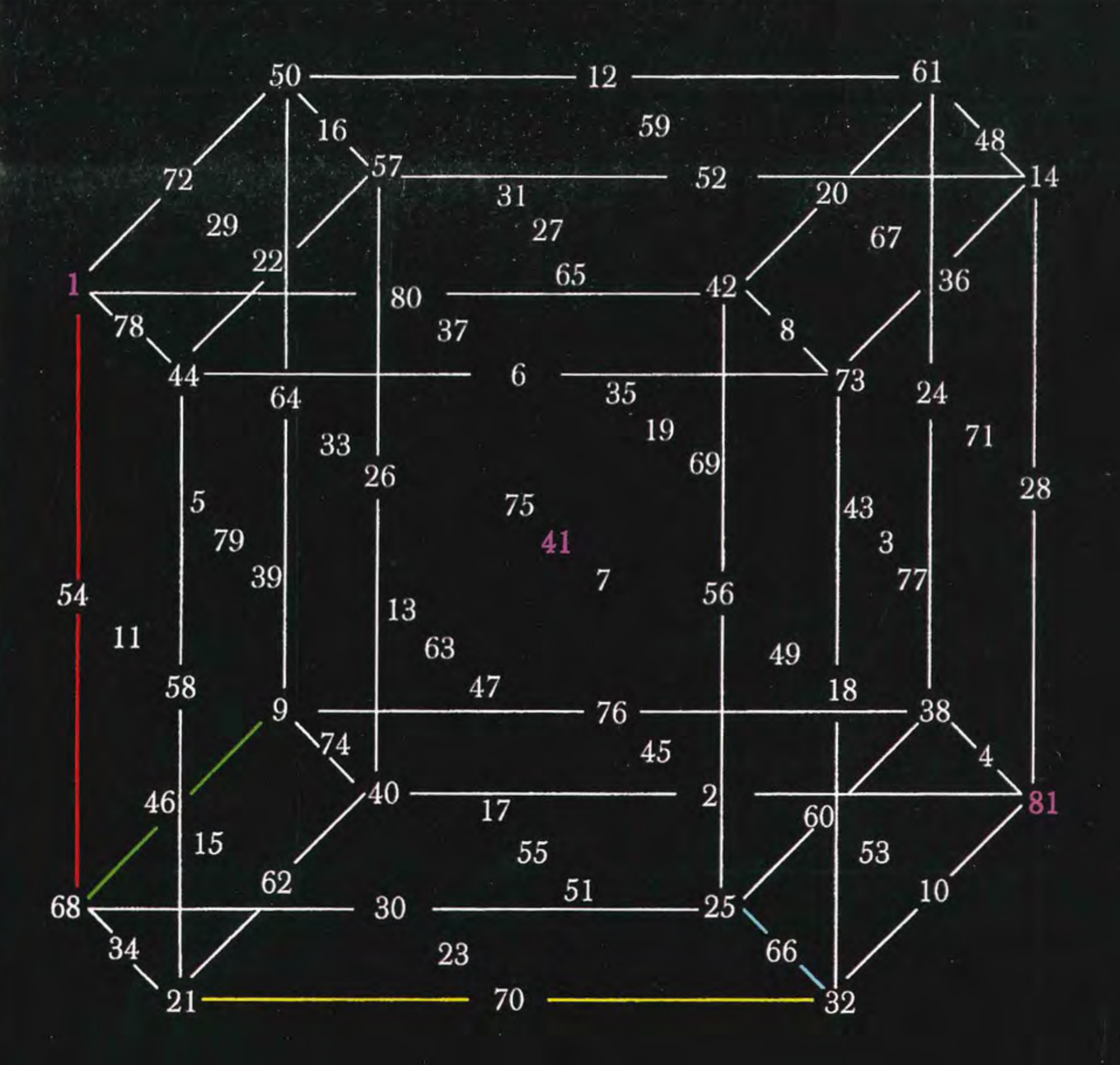
Un hipercubo mágico (un cubo tetradimensional), contiene los números del 1 al N^4 dispuestos de tal manera que la suma de los números de cada una de las N^3 filas, N^3 columnas, N^3 pilares, N^3 *hileras* (término utilizado para hacer referencia a una cuarta dimensión espacial), y 8 *tetragonales* principales (que pasan por el centro y unen esquinas opuestas) es una suma constante $S = N(1 + N^4)/2$, donde N es el orden del hipercubo. Existen un total de 22.272 hipercubos mágicos de orden 3.

El término «hipercubo mágico perfecto» implica que se alcanza una suma mágica no solo en las filas, columnas, pilares e hileras, sino también en las diagonales y triagonales (diagonales espaciales de los cubos del hipercubo). En un hipercubo mágico perfecto, todos los cubos y todos los cuadrados deben ser perfectos (es decir, *pandiagonales*, con todas las diagonales partidas del cuadrado sumando también la constante mágica).

El investigador canadiense John Hendricks fue uno de los expertos más destacados a nivel internacional en objetos mágicos de dimensiones superiores y demostró que un hipercubo mágico perfecto no puede lograrse con órdenes inferiores a 16 y que existe un hipercubo mágico perfecto de orden 16. Dicho hipercubo mágico perfecto de orden 16 contiene los números 1, 2, 3,... 65.536 y su suma mágica es 534.296. En 1999, él y yo calculamos el primer hipercubo mágico perfecto de orden 16 que se conoce hasta ahora. Podemos resumir lo demostrado a día de hoy: el hipercubo perfecto más pequeño es de orden 16, el cubo perfecto más pequeño es de orden 8 y el cuadrado mágico perfecto (pandiagonal) más pequeño es de orden 4.

VÉASE TAMBIÉN Cuadrados mágicos (c. 2200 a. C.), El cuadrado mágico de Franklin (1769) y El hipercubo (1888).

Un hipercubo mágico perfecto de orden 16 es difícil de visualizar, por lo que mostramos uno de los hipercubos mágicos de orden tres de John Hendrick, en el que se presentan ejemplos de una fila (en amarillo), una columna (en verde), un pilar (en rojo), una hilera (en azul claro) y una tetragonal (formada por tres números de color magenta) que suman 123.


50
12
61
16
59
48
72
57
52
14
31
20
29
27
67
22
1
80
65
42
36
78
37
8
44
6
73
24
64
35
19
33
71
26
69
5
28
75
43
79
41
3
39
7
56
77
54
13
11
63
49
58
47
18
9
76
38
74
45
4
46
40
2
81
17
60
15
55
53
62
51
10
68
30
25
34
23
66
21
70
32

1999

La paradoja de Parrondo

Juan Manuel Rodríguez Parrondo (nacido en 1964)

A finales de la década de 1990 el físico español Juan Parrondo mostró cómo dos juegos que aseguran la pérdida de todo el dinero de un jugador pueden jugarse alternativamente y hacer rico al jugador. La escritora sobre temas científicos, Sandra Blakeslee escribe sobre Parrondo que «descubrió lo que parece ser una nueva ley de la naturaleza que podría ayudar a explicar, entre otras cosas, cómo la vida surgió de un caldo primordial, por qué aumentó la popularidad del presidente Clinton al verse implicado en un escándalo sexual y por qué invertir en acciones en pérdidas puede llevar a obtener mayores beneficios del capital». La alucinante paradoja presenta aplicaciones que van desde la dinámica de la población hasta la evaluación del riesgo financiero.

Para comprender la paradoja, imagínese dos juegos de azar que se juegan con monedas trucadas. En el juego A, cada vez que se lanza la moneda, hay una probabilidad P_1 de ganar que es inferior al 50%, expresada como $P_1 = 0.5 - x$. Si gana, consigue 1 dólar, de lo contrario, pierde 1 dólar. En el juego *B*, en primer lugar se examinan las ganancias para ver si son múltiplo de 3. En caso de no serlo, se lanza otra moneda trucada, con la probabilidad de ganar $P_2 = (3/4 - x)$. Y en caso afirmativo, se lanza una tercera moneda con una probabilidad de ganar de tan solo $P_3 = (1/10) - x$. Tanto el juego A como el juego *B*, jugados por separado, por ejemplo con $x = 0{,}005$, le aseguran pérdidas a la larga. Sin embargo, si se juegan de forma alterna (o incluso moviéndose aleatoriamente entre los dos juegos), puede usted ganar más dinero del que jamás hubiera imaginado. Cabe tener en cuenta que los resultados del juego A afectan al juego *B* cuando se alternan los juegos.

Inicialmente, Parrondo ideó su paradójico juego en 1996. El ingeniero biomédico Derek Abbott de la Universidad de Adelaide, Australia, acuñó el término «la paradoja de Parrondo» y, en 1999, publicó un trabajo que confirmaba el resultado contraintuitivo de Parrondo.

VÉASE TAMBIÉN Las paradojas de Zenón (c. 445 a. C.), La paradoja de la rueda de Aristóteles (c. 320 a. C.), La ley de los grandes números (1713), La paradoja de San Petersburgo (1738), La paradoja del barbero (1901), La paradoja de Banach-Tarski (1924), El hotel infinito de Hilbert (1925), La paradoja del cumpleaños (1939), La paradoja de la línea de costa (c. 1950) y La paradoja de Newcomb (1960).

El físico Juan Parrondo se inspiró en trinquetes como este, ya que su comportamiento puede dar lugar a resultados inesperados, especialmente en dispositivos microscópicos. Parrondo extendió la información obtenida de los dispositivos físicos a los juegos.



1999

La solución del holiedro

John Horton Conway (nacido en 1937), **Jade P. Vinson** (nacido en 1976)

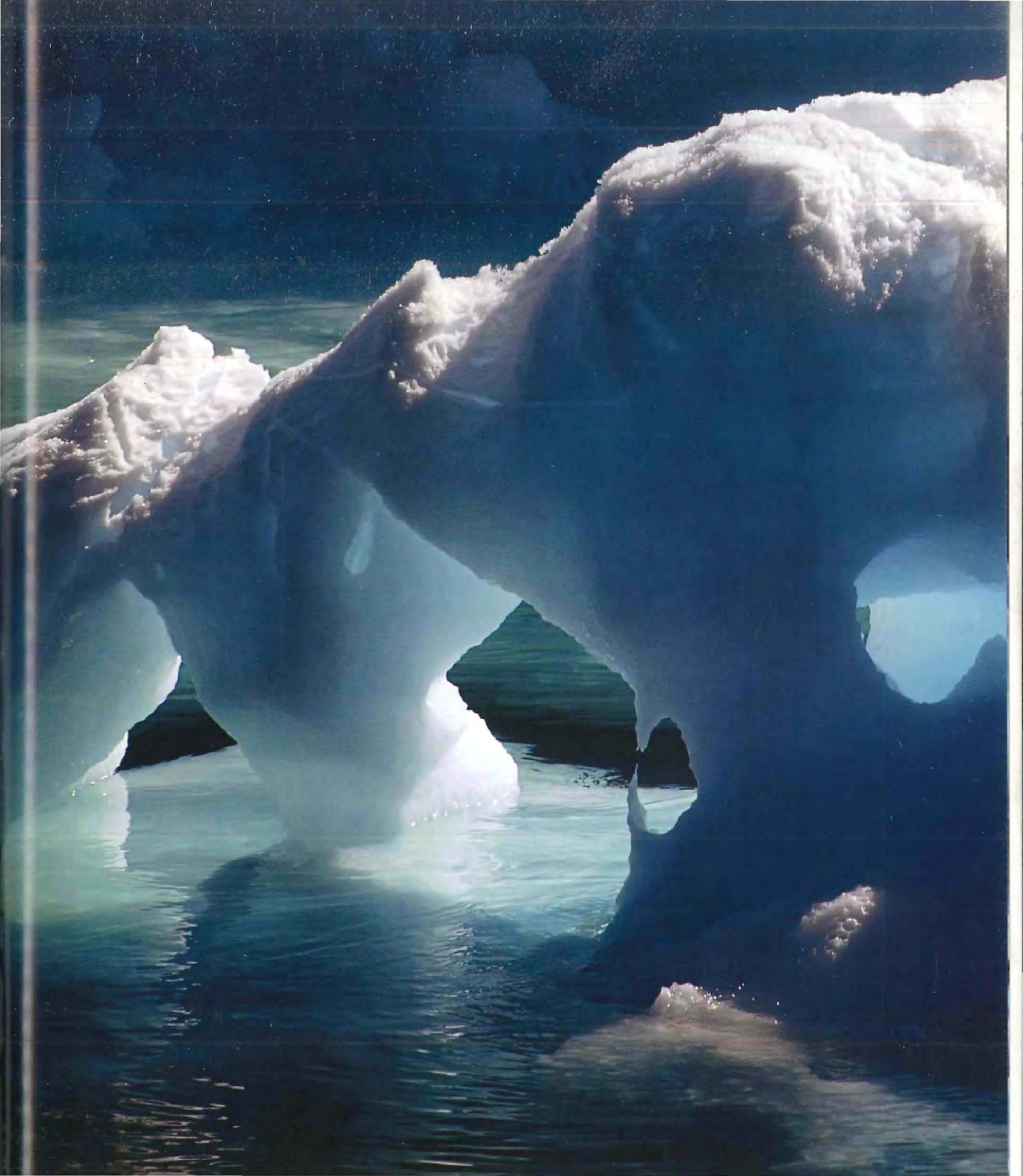
Considere un poliedro clásico, construido a partir de un conjunto de polígonos que se unen por sus aristas. Un *holiedro* es un poliedro en el que cada una de las caras presenta como mínimo una abertura poligonal. Los límites de las diferentes aberturas no comparten puntos entre sí ni con los límites de las caras. Por ejemplo, considere un cubo con sus 6 caras. A continuación, imagine que introduce un prisma pentagonal por una de las caras, atravesando todo el cubo hasta el otro lado, generando un túnel pentagonal. En este punto de la construcción, hemos creado un objeto con 11 caras (las 6 caras originales y las 5 nuevas del túnel pentagonal), donde tan solo 2 de las 11 presentan aberturas que las traspasan. Cada vez que horadamos un túnel, también creamos más caras. El enorme reto de dar con un holiedro es hacer los agujeros de tal forma que, en la medida de lo posible, atraviesen más de una cara para reducir el número de caras que no presentan agujeros.

El concepto de holiedro lo planteó por primera vez el matemático de Princeton John H. Conway en la década de 1990. Ofrecía un premio de hasta 10.000 dólares a quien encontrara un objeto de estas características. También estipuló que la cuantía del premio se dividiría por el número de caras de dicho objeto. En 1997, David W. Wilson acuñó el término holiedro para hacer referencia a un poliedro con agujeros.

Finalmente, en 1999, el matemático estadounidense Jade P. Vinson, descubrió el primer ejemplar mundial de holiedro con un total de 78.585.627 caras (que, evidentemente, redujeron mucho el premio de Vinson). En 2003, el especialista en gráficos por ordenador Don Hatch descubrió un holiedro con 492. La búsqueda continúa.

VÉASE TAMBIÉN Los sólidos platónicos (c. 350 a. C.), Los poliedros arquimedianos (c. 240 a. C.), La fórmula de Euler para los poliedros (1751), El problema del príncipe Ruperto (1816) El juego icosiano (1857), El teorema de Pick (1899), La cúpula geodésica (1922), El poliedro de Császár (1922), El poliedro de Szilassi (1977) y Spidrones (1979).

IZQUIERDA: *Ejemplo de cómo un prisma triangular atraviesa un cubo.* DERECHA: *Los agujeros y túneles de una cueva de hielo antártica evocan la preciosa y porosa estructura de un holiedro. Evidentemente, un holiedro debe presentar túneles limitados por polígonos. Asimismo, cada una de las paredes de los túneles planos del holiedro debe contener como mínimo un agujero poligonal.*



2001

El problema de la sábana

Britney Gallivan (nacida en 1985)

Una noche tiene insomnio y decide quitar la sábana de la cama, que tan solo tiene unos 0,4 milímetros de grosor. La dobla una vez y pasa a tener un grosor de 0,8 mm. ¿Cuántas veces debe doblarla para hacer que el grosor de la sábana sea igual a la distancia entre la Tierra y la Luna? La extraordinaria respuesta es que si dobla la sábana tan solo 40 veces, dormirá en la Luna. En otra versión del problema, se le da una hoja de papel con el grosor típico de 0,1 milímetros. Si lo dobla 51, la pila llegaría más lejos que el Sol.

Desgraciadamente, no es físicamente posible realizar muchos pliegues en objetos físicos como estos. La opinión predominante durante la mayor parte de la década de 1900, era que una auténtica hoja de papel no podría doblarse por la mitad más de 7 u 8 veces, ni siquiera contando para esta tarea con una gran hoja de papel. Sin embargo, en 2002, Britney Gallivan, estudiante de secundaria, impresionó al mundo al doblar una hoja por la mitad unas 12 veces.

En 2001 Gallivan determinó ecuaciones que describían el límite del número de veces que podemos doblar en una única dirección una hoja de papel de un tamaño dado. Para una hoja de grosor t, podemos estimar la longitud mínima inicial L de papel que se necesita para obtener n pliegues: $L = [(\pi t)/6] \times (2^n + 4) \times (2^n - 1)$. Estudiemos el significado y comportamiento de la expresión $(2^n + 4) \times (2^n - 1)$. Para sucesivos valores de n y comenzando con $n = 0$, tenemos la sucesión de números naturales: 0, 1, 4, 14, 50, 186, 714, 2.794, 11.050, 43.946, 175.274, 700.074... lo que nos indica que al llegar al undécimo pliegue del papel por la mitad, el material perdido en los extremos curvados de los pliegues es equivalente a 700.074 veces el que se perdió en el primer pliegue.

VÉASE TAMBIÉN Las paradojas de Zenón (c. 445 a. C.) y La enciclopedia on-line de las secuencias de números enteros (1996).

En 2001 Britney Gallivan determinó ecuaciones que describían el límite del número de veces que podemos doblar una hoja de papel de un tamaño dado en una única dirección.



La solución del Awari

John W. Romein (nacido en 1970) y **Henri E. Bal** (nacido en 1958)

Awari es un juego de mesa africano de 3.500 años de antigüedad. En la actualidad, es el juego nacional de Ghana y se juega en el África occidental y el Caribe. Clasificado como juego de captura y recuento, forma parte de un grupo de juegos de estrategia denominados juegos Mancala.

El tablero de Awari está formado por dos filas con seis huecos en forma de copa en cada una y con cuatro fichas (alubias, semillas o guijarros) en cada hueco. A cada jugador le corresponde una de las filas de huecos y se juega por turnos moviendo las semillas. El jugador que comienza el juego elige uno de sus seis huecos, retira todas las semillas del mismo y, partiendo de dicho agujero, deja, una a una, todas las semillas en cada hueco que encuentra en sentido contrario a las agujas del reloj. El segundo jugador coge todas las semillas de uno de los seis agujeros de su lado y actúa de forma análoga. Cuando un jugador deja caer su última semilla en un hueco del lado de su oponente que contenga una o dos semillas (lo que deja un total de dos o tres semillas), puede capturar todas las semillas de ese hueco, apartándolas del juego y también todas las semillas de los huecos inmediatamente anteriores si estos también contienen un total de dos o tres semillas. Los jugadores capturan semillas únicamente del lado del tablero de su oponente. El juego acaba cuando un jugador no tiene más semillas en los huecos de su lado. Gana el que ha capturado más semillas.

Awari ha generado mucho interés para los investigadores en el campo de la inteligencia artificial, en el que a veces se desarrollan algoritmos para juegos o para resolver puzles. No obstante, hasta 2002 nadie sabía si el juego era como el tres en raya, donde dos jugadores que jueguen a la perfección terminan siempre la partida en tablas. Finalmente, los científicos informáticos John W. Romein y Henri E. Bal de la Universidad Libre de Ámsterdam elaboraron un programa informático que calculaba el resultado para todas las 889.063.398.406 posiciones que se pueden dar en el juego y demostraron que Awari acaba forzosamente en tablas si lo juegan jugadores perfectos. El enorme cálculo requiere unas 51 horas de trabajo para un grupo de ordenadores en paralelo con 144 procesadores.

VÉASE TAMBIÉN Tres en raya (c. 1300 a. C.), Go (548 a. C.), Donald Knuth y *Mastermind* (1970), El puzle Eternidad (1999) y La solución matemática de las damas (2007).

Awari ha generado mucho interés para los investigadores en el campo de la inteligencia artificial. En 2002 unos científicos informáticos calcularon el resultado de las 889.063.398.406 posiciones que se pueden dar en el juego y demostraron que Awari acaba forzosamente en tablas si lo juegan jugadores perfectos.



2002

El Tetris es NP-completo

Erik D. Demaine (nacido en 1981), **Susan Hohenberger** (nacida en 1978), y **David Liben-Nowell** (nacido en 1977)

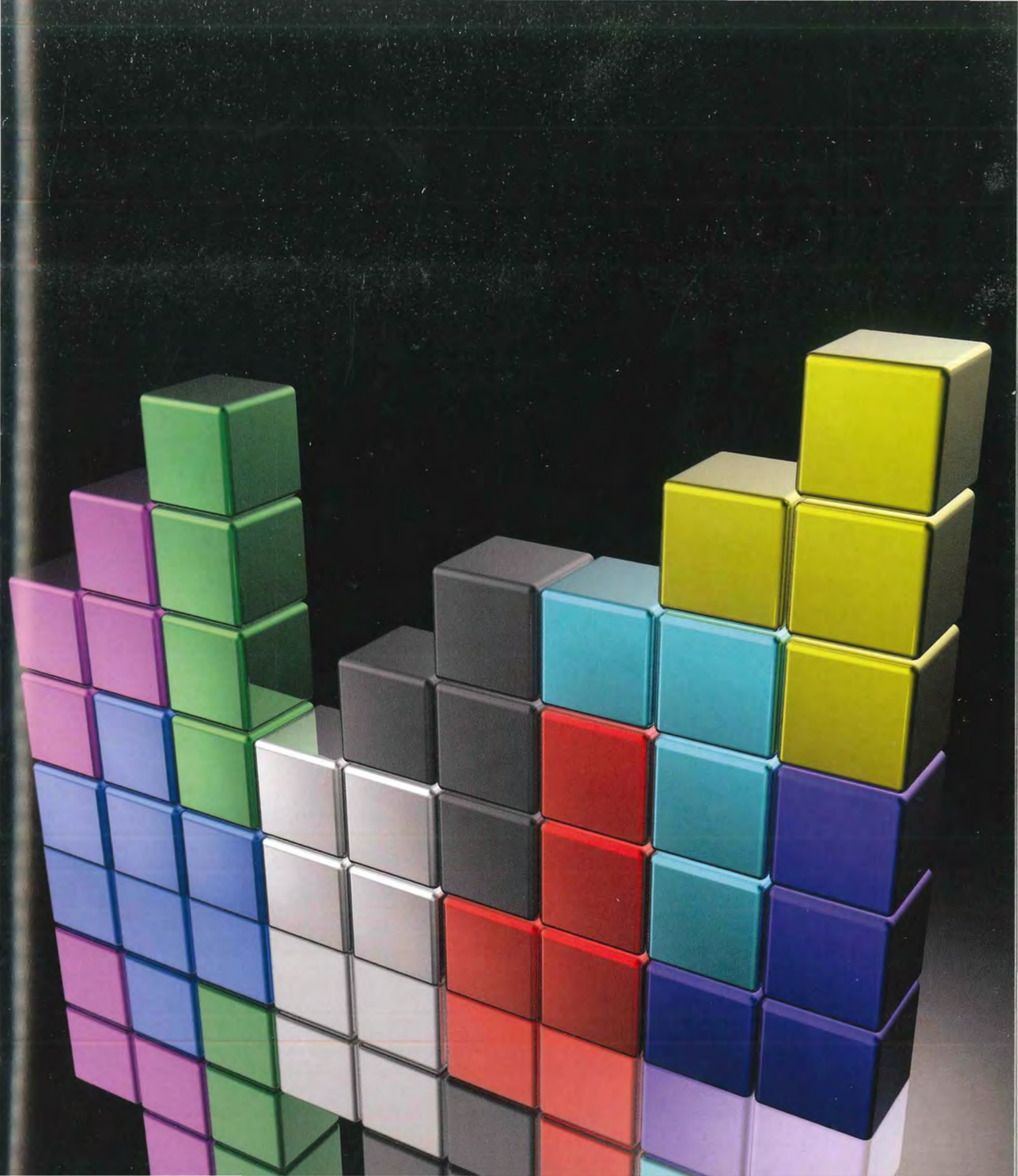
El Tetris es un videojuego muy popular sobre un puzle de bloques que caen formando hileras inventado en 1985 por el ingeniero informático ruso Alexey Pajitnov. En 2002 científicos informáticos estadounidenses cuantificaron la dificultad del juego y demostraron que presenta similitudes con los problemas más difíciles de matemáticas que no tienen soluciones simples, sino que requieren un análisis exhaustivo para encontrar soluciones óptimas.

En el Tetris, las piezas de juego salen de la parte superior de la zona de juego y se desplazan hacia abajo. Mientras la pieza desciende, el jugador puede girarla o moverla hacia los lados. Las piezas son formas denominadas tetraminós, formadas por cuatro cuadrados unidos en un grupo que presenta la forma de una letra T u otro diseño sencillo. Cuando una pieza se encaja en una fila de la parte inferior, la siguiente pieza empieza a caer desde la parte superior. Cuando una fila está completa y no presenta huecos, se elimina y todas las filas superiores se desplazan una fila hacia abajo. El juego termina cuando no pueden bajar nuevas piezas, bloqueadas por falta de espacio. El objetivo del jugador es hacer que el juego dure lo máximo posible para obtener más puntos.

En 2002 Erik D. Demaine, Susan Hohenberger y David Liben-Nowell analizaron una versión generalizada del juego que utilizaba una cuadrícula como tablero de juego y que podía tener cualquier número de cuadrados de ancho y alto. El equipo descubrió que si intentaban maximizar el número de filas eliminadas al jugar una secuencia determinada de piezas, entonces el juego era NP-completo. («NP» es la abreviatura en inglés de polinómico no determinista»). Aunque este tipo de problemas pueden someterse a comprobación para determinar si una solución es correcta, encontrar dicha solución podría llevar un tiempo exorbitante. El ejemplo clásico de un problema NP-completo es el problema del viajante, que trata del dificilísimo reto que supone determinar cuál es la ruta óptima para un hombre de negocios o un repartidor que deba visitar varias ciudades diferentes. Los problemas de este tipo son tan complicados porque no existe un algoritmo inteligente ni un atajo para encontrar soluciones rápidas.

VÉASE TAMBIÉN Tres en raya (1300 a. C.), Go (548 a. C.), El puzle Eternidad (1999), La solución del Awari (2002) y La solución matemática de las damas (2007).

En 2002 científicos informáticos estadounidenses cuantificaron la dificultad del juego y demostraron que presenta similitudes con los problemas más difíciles de matemáticas que no tienen soluciones simples, sino que requieren un análisis exhaustivo para intentar encontrar soluciones óptimas.



2005

NUMB3RS

Nicolas Falacci y Cheryl Heuton

NUMB3RS es una serie de televisión estadounidense creada por el equipo de guionistas formado por el matrimonio Nicolas Falacci y Cheryl Heuton. En esta serie sobre investigaciones criminales, el protagonista es un brillante matemático, Charlie Epps, que ayuda al FBI a resolver crímenes utilizando sus dotes de genio en matemáticas.

Aunque pueda parecer poco apropiado incluir una serie de televisión en un libro junto con conceptos tan famosos como el último teorema de Fermat o los tratados de Euclides, debe hacerse mención de *NUMB3RS* porque fue la primera serie de TV semanal de gran popularidad que giraba en torno a las matemáticas, contando con un equipo de asesores matemáticos y que ha sido aclamada por la comunidad matemática. Las ecuaciones que se ven en la serie son, además de reales, un elemento crucial de los episodios. El contenido matemático de la serie va desde el criptoanálisis, la teoría de la probabilidad y los análisis de Fourier hasta el análisis bayesiano y la geometría básica.

NUMB3RS también ha dejado patente su relevancia al proporcionar muchas oportunidades de aprendizaje a estudiantes. Es el caso de los profesores de matemáticas que utilizan las lecciones de *NUMB3RS* en sus clases. Además, en 2007, la serie y sus creadores recibieron el Premio de Servicio Público del grupo estadounidense del Consejo de Ciencias por su contribución a la difusión de la información científica y matemática. Entre los matemáticos famosos que se mencionan en *NUMB3RS* se incluyen Arquímedes, Paul Erdös, Pierre-Simon Laplace, John von Neumann, Bernhard Riemann y Stephen Wolfram, personas de las que se ha hablado en este libro. Según Kendrick Frazier: «La ciencia, la razón y el pensamiento crítico desempeñan un papel tan destacado en las tramas que la Asociación estadounidense para el avance de la ciencia, en su reunión anual de 2006, incluyó un simposio que abarcó toda una tarde sobre la influencia del programa en el cambio de la percepción pública de las matemáticas».

Los episodios comienzan con un tributo verbal a las matemáticas: «Usamos las matemáticas en cualquier parte. Para decir la hora, para predecir el tiempo, al manejar dinero... Las matemáticas son algo más que fórmulas y ecuaciones. Las matemáticas son algo más que números. Son lógica. Son racionalidad. Se trata de usar la mente para resolver el mayor misterio que conocemos».

VÉASE TAMBIÉN Las recreaciones matemáticas de Martin Gardner (1957) y Erdös y la colaboración extrema (1971).

Escena de NUMB3RS, *una serie de televisión estadounidense que protagoniza un brillante matemático que ayuda al FBI a resolver crímenes utilizando sus dotes de genio de las matemáticas. Fue la primera serie semanal de gran popularidad que giraba en torno las matemáticas, contando con un equipo de asesores matemáticos.*



La solución matemática de las damas

Jonathan Schaeffer (nacido en 1957)

En 2007 el científico informático Jonathan Schaeffer y algunos colegas recurrieron a los ordenadores para demostrar por fin que las damas, si se juegan a la perfección, son un juego que acaba en tablas. Esto significa que las damas se parecen al Tres en raya, un juego que tampoco puede ganarse si los jugadores no realizan un mal movimiento. Ambos juegos acaban en tablas.

La demostración de Schaeffer, llevada a cabo con la ayuda de cientos de ordenadores, se extendió a lo largo de dieciocho años, haciendo de las damas el juego más complejo jamás resuelto. Esto también implica que es teóricamente posible crear una máquina que nunca pierda frente a un humano.

Las damas, en las que se utiliza un tablero 8 x 8, fue un juego bastante popular en Europa durante el siglo XVI, y las primeras versiones del mismo se descubrieron en las ruinas de la antigua ciudad de Ur (c. 3000 a. C.), en lo que hoy es Iraq. Las fichas de las damas suelen ser discos de color rojo y negro que se mueven en diagonal. Los jugadores juegan por turnos y capturan las piezas del oponente saltando por encima de ellas. Evidentemente, dado que existen aproximadamente unas 5×10^{20} posiciones posibles, demostrar que las damas acaban en tablas de forma inequívoca es mucho más complicado que demostrar que no se puede ganar en el Tres en raya.

El equipo de investigación sobre las damas tuvo en cuenta 39 billones de disposiciones diferentes con diez o menos piezas en el tablero para, a continuación, determinar qué fichas ganarían la partida, las rojas o las negras. El equipo también utilizó un algoritmo de búsqueda especializado para estudiar el inicio del juego y para ver cómo estos movimientos «conducían» a las configuraciones de diez damas. La solución matemática de las damas se convirtió en una referencia importante en el campo de la inteligencia artificial, que suele incluir estrategias de resolución de problemas complejos para ordenadores.

En 1994, el programa de Schaeffer denominado Chinook, jugó con el campeón mundial, Marion Tinsley, acabando en una sucesión de tablas. Tinsley murió de cáncer ocho meses después y algunos reprendieron a Schaeffer por considerar que había acelerado la muerte de Tinsley debido al estrés que Chinook le provocó.

VÉASE TAMBIÉN Tres en raya (1300 a. C.), Go (548 a. C.), El juego del drago (1967) y La solución del Awari (2002).

El artista francés Louis-Léopold Boilly (1761–1845) pintó esta escena de una partida familiar de damas en torno al año 1803. En 2007, unos científicos informáticos demostraron que las damas, si se juegan a la perfección, siempre acaban en tablas.





La búsqueda del grupo de Lie E_8

Marius Sophus Lie (1842–1899), **Wilhelm Karl Joseph Killing** (1847–1923)

Durante más de un siglo, los matemáticos han intentando entender una compleja entidad de 248 dimensiones, conocida concisamente como E_8. Finalmente, en 2007, un equipo internacional de matemáticos y científicos informáticos utilizaron un superordenador para domar esta intrincada bestia.

Para empezar, consideremos el *Mysterium Cosmographicum* (El misterio cósmico) de Johannes Kepler (1571–1630), que estaba tan fascinado con la simetría que sugirió que todo el Sistema Solar y las órbitas planetarias podían ajustarse a un modelo construido a base de **sólidos platónicos,** como el cubo y el dodecaedro, encajados unos dentro de otros formando capas, como si se tratara de una gigantesca cebolla de cristal. Este tipo de simetrías keplerianas estaban limitadas en extensión y número. Con todo, las simetrías que Kepler difícilmente podría haber imaginado pueden, de hecho, regir el universo.

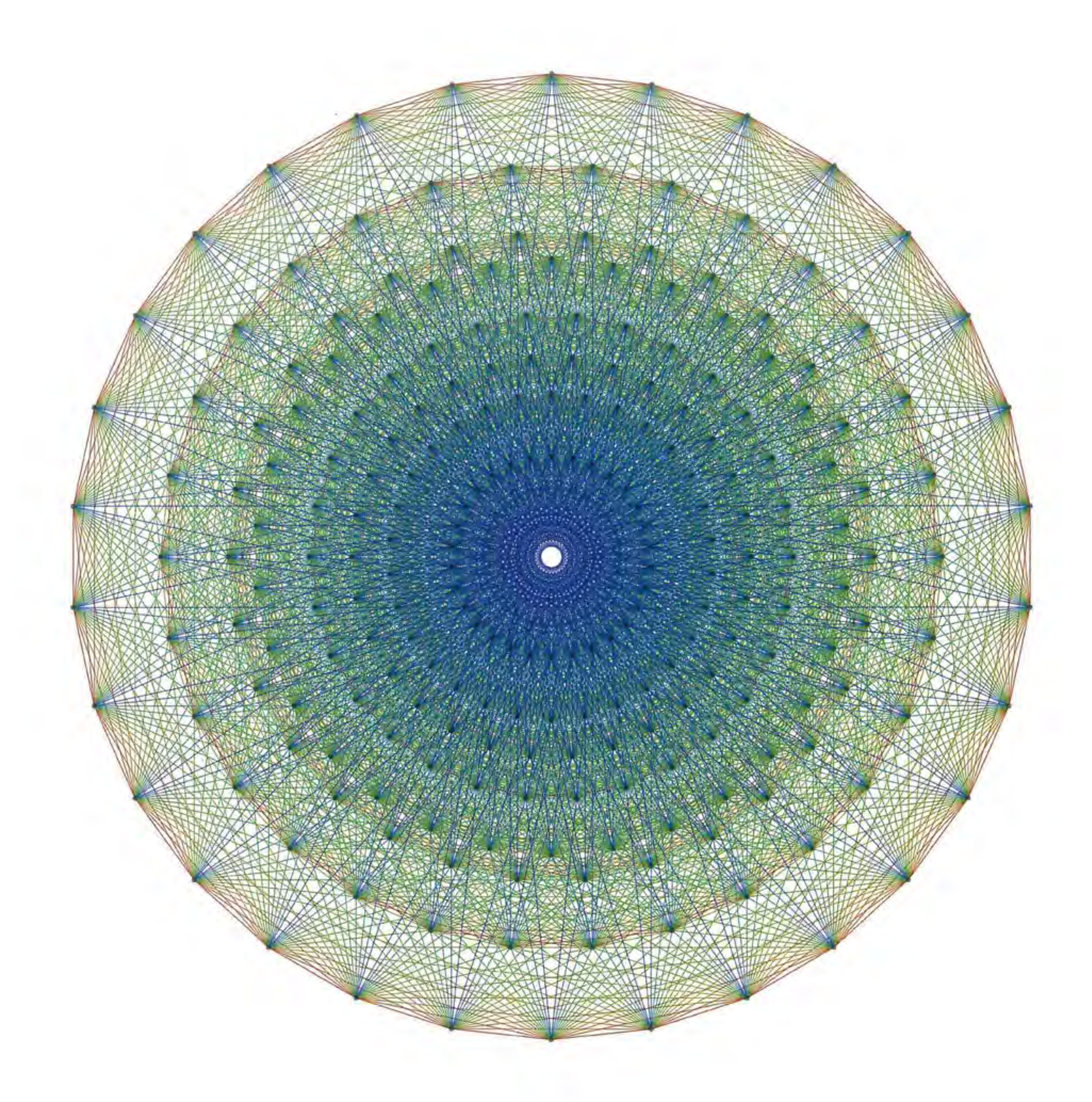
En el pasado siglo XIX, el matemático noruego Sophus Lie (pronunciado en español «Li») estudió los objetos con simetrías rotacionales lisas, como la esfera o la rosquilla en nuestro espacio tridimensional ordinario. En tres dimensiones, y en dimensiones superiores, estos tipos de simetrías se expresan a través de grupos de Lie. El matemático alemán Wilhelm Killing habló sobre la existencia del grupo E8 en 1887. Los grupos de Lie más sencillos controlan la forma de los orbitales atómicos y las simetrías de partículas subatómicas como los quarks. Puede que algún día, los grupos más grandes, como E_8, sean la clave de una teoría unificada y ayuden a los científicos a comprender la teoría de cuerdas y la gravedad.

Fokko du Cloux, un matemático y científico informático holandés que fue uno de los miembros del equipo de E_8, creó el *software* para el superordenador y reflexionó acerca de las repercusiones de E_8, a pesar de que padecía un esclerosis lateral amiotrófica y respiraba con un ventilador. Murió en noviembre de 2006 sin llegar a ver el final de la investigación relativa a E_8.

El 8 de enero de 2007 un superordenador calculó los últimos datos de la matriz del E_8, que describe las simetrías de un objeto de 57 dimensiones que puede imaginarse que rota de 248 modos sin cambiar su apariencia. El trabajo es significativo porque supone un avance en el conocimiento matemático y en el uso de cálculos a gran escala para resolver difíciles problemas matemáticos.

VÉASE TAMBIÉN Los sólidos platónicos (c. 350 a. C.), La teoría de grupos (1832), Los grupos del papel pintado (1891), El grupo Monstruo (1981) y La hipótesis del universo matemático (2007).

Gráfico de E_8. Durante más de un siglo, los matemáticos han intentado entender esta vasta entidad de 248 dimensiones. En 2007, un superordenador calculó los últimos datos de la matriz del E_8, que describe las simetrías de un objeto de 57 dimensiones.



2007

La hipótesis del universo matemático

Max Tegmark (nacido en 1967)

En este libro hemos tratado diversas geometrías que fueron concebidas para sostener las claves del universo. Johannes Kepler ajustó el Sistema Solar a un modelo formado por **sólidos platónicos** como el dodecaedro. Puede que algún día, los grupos de Lie grandes, como el E_8, nos ayuden a crear una teoría unificada de la física. Incluso Galileo en el siglo XVII indicó que «el gran libro de la naturaleza está escrito utilizando símbolos matemáticos». En la década de 1960, el físico Eugene Wigner quedó impresionado con la «irrazonable eficacia de las matemáticas en las ciencias naturales».

En 2007, el cosmólogo sueco-estadounidense Max Tegmark publicó varios artículos científicos y de divulgación sobre la hipótesis del universo matemático (MUH, por sus siglas en inglés) que establece que nuestra realidad física es una estructura matemática y que nuestro universo no solo se describe por medio de las matemáticas, sino que es matemáticas. Tegmark es profesor de física en el Instituto de Tecnología de Massachusetts y director científico del Foundational Questions Institute. Sugiere que cuando consideramos ecuaciones como 1 + 1 = 2, la notación utilizada para los números carece relativamente de importancia en comparación con las relaciones que se describen. Cree que «no inventamos estructuras matemáticas, sino que las descubrimos, y tan solo inventamos la notación para describirlas».

La hipótesis de Tegmark implica que «todos vivimos en un gigantesco objeto matemático, más complicado que un dodecaedro y, probablemente, más complejo que objetos con nombres intimidatorios como las variedades de Calabi-Yau, haces de tensores y espacios de Hilbert, que aparecen en la mayoría de teorías avanzadas actuales. Todo en nuestro mundo es puramente matemático, incluso usted». No debería sorprenderle que esta idea parezca ir en contra de la intuición, ya que muchas teorías modernas, como la teoría cuántica y la relatividad, pueden desafiarla. Como dijo el matemático Ronald Graham una vez: «El cerebro ha evolucionado para huir de la lluvia, encontrar frutos en el bosque y esquivar la muerte. El cerebro no ha evolucionado para ayudarnos a entender números muy grandes ni para observar objetos en cien mil dimensiones»

VÉASE TAMBIÉN Los autómatas celulares (1952) y La búsqueda del grupo de Lie E_8 (2007).

Según la hipótesis del universo matemático, nuestra realidad física es una estructura matemática. Nuestro universo no solo se describe por medio de las matemáticas, sino que es matemáticas.



Notas y lecturas recomendadas

He recopilado la siguiente lista que presenta parte del material que he utilizado para investigar y elaborar este libro. Como muchos lectores sabrán las páginas de Internet aparecen y desaparecen. A veces pueden cambiar de dirección o desaparecer por completo. Las direcciones de las páginas de Internet que se indican aquí aportaron una valiosa información de introducción en el momento en que se escribió este libro.

En caso de que haya pasado por alto un momento interesante o fundamental de las matemáticas que usted considere que no se ha valorado de forma completa anteriormente, le ruego que me lo haga saber. Solo tiene que visitar mi página web pickover.com y enviarme un correo electrónico explicándome la idea y por qué considera que influyó al mundo de las matemáticas. Puede que en las próximas ediciones del libro se incluyan maravillas matemáticas como el Gömböc, el Suàn Shù *Shū*, el problema del sello de correos de Frobenius, los tangramas y más ideas de Sophie Germain.

Debido a las limitaciones de espacio, se eliminaron muchas referencias de la edición impresa de este libro. Con todo, las referencias y notas adicionales, así como las citas ampliadas pueden encontrarse en pickover.com/mathbook.html.

A continuación se indican las abreviaturas especiales y habituales del editor: *AKP*: A. K. Peters, Ltd., Wellesley, MA; *AMS*: American Mathematical Society, Providence, RI; *Dover*: Dover Publications, NY; *CUP*: Cambridge University Press, NY; *Freeman*: W. H. Freeman, NY; *HUP*: Harvard University Press, Cambridge, MA; *MAA*: The Mathematical Association of America, Washington, D.C.; *MIT*: MIT Press, Cambridge, Massachusetts; *Norton*: W. W. Norton & Company, NY; *OUP*: Oxford University Press, NY; *PUP*: Princeton University Press, Princeton, NJ; *RP*: Running Press, Philadelphia, PA; *S&S*: Simon & Schuster, NY; *TMP*: Thunder's Mouth Press, NY; *UBM*: The Universal Book of Mathematics; *UCP*: University of Chicago Press, Chicago, IL; *Wiley*: John Wiley & Sons, Hoboken, NJ; *W&N*: Weidenfeld & Nicholson, London; *WS*: World Scientific, River Edge, NJ.

Lecturas generales

Anderson, M., Victor K., Wilson, R. *Sherlock Holmes in Babylon and Other Tales of Mathematical History*, MAA, 2004.

Boyer, C., Merzbach, U., *A History of Mathematics*, Wiley, 1991.

Darling, D., *The Universal Book of Mathematics*, Wiley, 2004.

Dunham, W., *Journey through Genius*, NY: Penguin, 1991.

Gardner, M., *Martin Gardner's Mathematical Games* (CD-ROM), MAA, 2005.

Gullberg, J., *Mathematics*, Norton, 1997.

Hawking, S., *God Created the Integers*, RP, 2005.

Hodgkin, L., *A History of Mathematics*, OUP, 2005.

O'Connor, J., Robertson, E., "MacTutor History of Math. Archive," tinyurl.com/5ec5wq.

Weisstein, E., "MathWorld Wolfram web resource," mathworld.wolfram.com.

Wikipedia Encyclopedia, www.wikipedia.org.

Libros de Clifford A. Pickover

En distintos capítulos he utilizado mis propios libros como fuente de información; de todas formas, para ahorrar espacio, no repetiré sus títulos en los listados que vienen a continuación.

Pickover, C., Keys to Infinity, Wiley, 1995.

Pickover, C., Surfing through Hyperspace, OUP, 1999.

Pickover, C., Computers, Pattern, Chaos, and Beauty, Dover, 2001.

Pickover, C., Wonders of Numbers, OUP, 2001.

Pickover, C., The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars, PUP, 2001.

Pickover, C., The Paradox of God, NY: Palgrave, 2001.

Pickover, C., Calculus and Pizza, Wiley, 2003.

Pickover, C., A Passion for Mathematics, Wiley, 2005.

Pickover, C., The Möbius Strip, TMP, 2006.

Pickover, C., From Archimedes to Hawking, OUP, 2008.

Pickover, C., The Loom of God, NY: Sterling, 2009.

Introducción

Devlin, K., tinyurl.com/6kvje4 & tinyurl.com/5k9wry.

Dörrie, H., 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Dover, 1965.

Ifrah, G., The Universal History of Numbers, Wiley, 1999.

Kaku, M., Hyperspace, NY: Anchor, 1995.

Kammerer, P., Das Gesetz der Serie, Stuttgart: Deutsche Verlags-Anstalt, 1919.

Klarreich, E., Sci. News, 165:266; 2004.

Kruglinski, S., tinyurl.com/23rosl.

El cuentakilómetros de las hormigas, c. 150 millones de años a. C.

Devlin, K., *tinyurl.com/64twpu*.

Wittlinger, M., Wehner, R., Wolf, H., *Science*, 312:1965;2006.

Los primates saben contar, c. 30 millones de años a. C.

Beran, M., *Animal Cognit.* 7:86;2004.

Kalmus, H., *Nature* 202:1156;1964.

Matsuzawa, T., *Nature* 315:57;1985.

Números primos generados por cigarras, c. 1 millón de años a. C.

Campos, P. et al., *Phys. Review Lett.* 93:098107-1;2004.

Goles, E., Schulz, O., Markus, M. *Nonlinear Phenom. in Complex Sys.* 3:208;2000.

Hayes, B., *Am. Scient.* 92:401;2004.

Peterson, I., *tinyurl.com/66h3hd*.

Nudos, c. 100.000 años.

Bouzouggar, A. et al., *Proc. Natl. Acad. Sci.* 104:9964;2007.

Meehan, B., *The Book of Kells*, London: Thames & Hudson, 1994.

Sossinsky, A., *Knots*, HUP, 2002.

El hueso de Ishangho, 18.000 a. C.

Bogoshi, J., Naidoo, K., Webb, J., *Math. Gazette*, 71:294;1987.

Teresi, D., *Lost Discoveries*, S&S, 2002.

Quipus, 3000 a. C.

Ascher, M., Ascher, R., *Mathematics of the Incas*, Dover, 1997.

Mann, C., *Science* 309:1008;2005.

Dados, 3000 a. C.

Hayes, B., *Am. Scient.* 89:300;2001.

Cuadrados mágicos, 2200 a. C.
Pickover, C., *The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars*, PUP, 2001.

Plimpton 322, 1800 a. C.
Robson, E., *Am. Math. Monthly* 109:105;2002.

El papiro de Rhind, 1650 a. C.
Eves, H., *Great Moments in Mathematics (Before 1650)*, MAA, 1983.
Robins, G., Shute, C., *The Rhind Mathematical Papyrus*, Dover, 1990.

Tres en raya, 1300 a. C.
C. Zaslavasky señala que en un templo de 300.000 años de antigüedad dedicado al faraón Seti I existe un tablero de tres en raya. Es posible que la primera descripción de las reglas modernas del juego se deba a C. Babbage, que las enunció en torno a 1820.

Zaslavasky, C. *Tic Tac Toe and Other Three-In-A-Row Games*, NY: Thomas Crowell, 1982.

El teorema de Pitágoras y los triángulos, 600 a. C.
Loomis, E., *Pythagorean Proposition*, Washington, D.C.: Natl. Council of Teachers of Math., 1972.
Maor, E., *The Pythagorean Theorem*, PUP, 2007.

Go, 548 a. C.
Frankel, K., *Sci. Am.* 296:32;2007.

Pitágoras funda una fraternidad matemática, c. 530 a. C.
Gorman, P., *Pythagoras*, London: Routledge Kegan & Paul, 1978.
Russell, B., *A History of Western Philosophy*, S&S, 1945.

Las paradojas de Zenón, c. 445 a. C.
McLaughlin, W., *Sci. Am.* 271:84;1994.

La cuadratura de la lúnula, c. 440 a. C.
Dunham, W., *Journey through Genius*, NY: Penguin, 1991.

Los sólidos platónicos, c. 350 a. C.
Los sólidos platónicos son poliedros convexos. Un poliedro es convexo si, dada una pareja de puntos que forman parte de él, el segmento de recta que une los dos puntos pertenece también al poliedro. Algunos astrofísicos sugieren que es posible que todo nuestro universo tenga la forma de un dodecaedro.

El Órganon de Aristóteles, c. 350 a. C.
SparkNotes, *tinyurl.com/5qhble*.

Los Elementos de Euclides, 300 a. C.
Boyer, C., Merzbach, U., *A History of Mathematics*, Wiley, 1991.

Arquímedes: arena, ganado y el *stomachion*, c. 250 a. C.
Dörrie cita a cuatro expertos que no creen que una versión determinada del problema del ganado con esta solución desmesurada se deba a Arquímedes, pero nombra a otros cuatro autores que creen que el problema debe atribuirse a Arquímedes.

Dörrie, H., *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover, 1965.
Williams, H., German, R., Zarnke, C., *Math. Comput.* 19:671;1965.

π, c. 250 a. C.
A New Introduction to Mathematics (1706) de W. Jones, es el primer texto en el que se utiliza la letra griega π para esta célebre constante. El símbolo π se popularizó más tarde, después de que L. Euler comenzara a usarlo en 1737.

Los poliedros arquimedianos, c. 240 a. C.
Entre los poliedros semirregulares encontramos los trece sólidos de Arquímedes, así como prismas y antiprismas, cuyas caras son, todas ellas, polígonos regulares.

La espiral de Arquímedes, 225 a. C.
Gardner, M., *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*, UCP, 1991.

El *Almagesto* de Ptolomeo, c. 159
Grasshoff, G., *The History of Ptolemy's Star Catalogue*, NY: Springer, 1990.
Gullberg, J., *Mathematics*, Norton, 1997.

La *Arithmetica* de Diofanto, 250
Según H. Eves, «no se ha logrado establecer el momento y el modo en que estos nuevos símbolos numerales entraron en Europa. Es posible que los árabes los introdujeran en España cuando invadieron la península en 1711… El sistema completo se dispersó de forma más amplia gracias a la traducción al latín del tratado de al-Khwariz, en el siglo XII…».

Eves, H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Boston, MA: Brooks Cole, 1990.
Swift, J., *Amer. Math. Monthly* 63:163;1956.

El teorema del hexágono de Pappus, c. 340
Dehn, M., *Am. Math. Monthly* 50:357;1943.
Heath, T., *A History of Greek Mathematics*, Oxford: Clarendon, 1921.

El manuscrito de Bakhshali, c. 350
La fecha del manuscrito se sigue debatiendo. Muchos de los expertos más tempranos lo dataron alrededor del año cuatrocientos. Ifrah afirma que «el manuscrito de Bakhshaloi no pudo escribirse antes del siglo noveno, pero parece probable que se trate, en su forma actual, de un comentario o una copia de un trabajo matemático anterior».

Ifrah, G., *The Universal History of Numbers*, Wiley, 1999.
Teresi, D., *Lost Discoveries*, S&S, 2002.

Cero, c. 650
Arsham, H., *tinyurl.com/56zmcv*.

Las *Propositiones ad Acuendos Iuvenes* de Alcuino, c. 800
Atkinson, L., *College Math. J.* 36:354;2005.
Peterson, I., *tinyurl.com/5dyyes*.

Los anillos de Borromeo, 834
Cromwell, P. et al. *Math. Intelligencer* 20:53;1998.
Freedman, M., Skora, R., *J. Differential Geom.* 25:75;1987.
Lindström, B., Zetterström, H., *Am. Math. Monthly* 98:340;1991.

La fórmula de Thabit para números amigos, c. 850
Gardner, M., *Mathematical Magic Show*, MAA, 1989.

***Capítulos de matemáticas indias*, c. 953**
Morelon, R., *Encyclopedia of the History of Arabic Science*, London: Routledge, 1996.
Saidan, A. S., *Isis*, 57:475;1966.
Teresi, D., *Lost Discoveries*, S&S, 2002.

El *Tratado* de Omar Khayyam, 1070
Hubo otros matemáticos que trabajaron en el teorema del binomio, entre ellos el chino Yang Hui (c. 1238–1298), el indio Pingala y Newton (que generalizó la fórmula para otros exponentes).

Lo asombroso, de al-Samawal, c. 1150
O'Connor, J., Robertson, E., *tinyurl.com/5ctxvh*.
Perlmann, M., *Proc. Am. Acad. Jew. Res.* 32:15;1964.

El ábaco, c. 1200
Es posible que el término «*ábaco*» proceda del griego abax («tabla de calcular») o de abaq, la palabra hebrea que significa «arena».

Ewalt, D., *tinyurl.com/5psj89*.
Ifrah, G., *The Universal History of Computing*, Wiley, 2002.

El *Liber Abaci* de Fibonacci, 1202
En la actualidad, muchos autores comienzan la secuencia de Fibonacci con el número 0 (de modo que su comienzo es 0, 1, 1, 2, 3…) Nótese que el número de columnas de los microtúbulos de los mamíferos suele corresponder con un número de Fibonacci.

Boyer, C., Merzbach, U., *A History of Mathematics*, Wiley, 1991.

Trigo sobre un tablero de ajedrez, 1256
Gullberg, J., *Mathematics*, Norton, 1997.

La serie armónica diverge, c. 1350
Dunham, W., *College Math. J.* 18:18;1987.

La aritmética de Treviso, 1478
Peterson, I., *tinyurl.com/6a9ngu*.
Smith, D., *Isis* 6:311;1924.
Swetz, F., *Capitalism and Arithmetic*, Chicago: Open Court, 1986.
Swetz, F., *Sci. & Educat.* 1:365;1992.

Descubrimiento del desarrollo en serie de π, c. 1500
R. Roy afirma que, aunque la serie aparece en *Tantrasangraha*, «en el *Aryabhatiyabhasya*, un trabajo sobre astronomía, Nilakantha atribuye la serie del seno al matemático Madhava (1340–1425)».

Roy, R., *Math. Mag.* 63:291;1990.

La proporción áurea, 1509
El origen del término «proporción aúrea» sigue debatiéndose, pero parece que surgió en el siglo XII. Aunque la historia reciente de la proporción aúrea es consecuencia de un libro de 1509, *Divina Proportione*, de Luca Pacioli, los antiguos matemáticos griegos la estudiaron antes: aparece con frecuencia en estudios geométricos de la época. Nótese que la imagen de este capítulo representa una espiral de Fibonacci, basada en términos consecutivos de la secuencia de Fibonacci. Dado que la proporción entre estos términos tienda a cero, las dos espirales se parecen mucho.

***Polygraphiae Libri Sex*, 1518**
Peterson, I., *tinyurl.com/6gvf6k*.

El *Ars Magna* de Cardano, 1545
Dunham, W., *Journey through Genius*, NY: Penguin, 1991.
Gullberg, J., *Mathematics*, Norton, 1997.
O'Connor, J., Robertson, E., *tinyurl.com/5ue8kh*.

***Sumario Compendioso*, 1556**
Gray, S., Sandifer, C., *Math. Teacher* 94:98;2001.
Smith, D., *Am. Math. Monthly*, 28:10;1921.

La proyección de Mercator, 1569
Short, J., *The World through Maps*, Richmond Hill, Ontario: Firefly Books, 2003.
Thrower, N., *Maps and Civilization*, UCP, 1999.

La conjetura de Kepler, 1611
Donev, A. et al. *Science*, 303:990;2004.
Hales, T. *Ann. Math.* 162:1065;2005.
Szpiro, G., *Kepler's Conjecture*, Wiley, 2003.

Logaritmos, 1614
Gibson, G., "Napier and the Invention of Logarithms," en *Handbook of the Napier Tercentenary Celebration*, E. M. Horsburgh, ed., Los Angeles: Tomash Publishers, 1982.
Tallack, P., *The Science Book*, W&N, 2003.

La regla de cálculo, 1621
Según F. Canjori, «no está nada claro que el alumno Delamain le robara el invento a Oughtred; es probable que Delamain descubriera lo mismo de forma independiente».

Cajori, F., *William Oughtred*, Chicago: Open Court, 1916.
Oughtred Society, *oughtred.org*.
Stoll, C., *Sci. Am.* 294:81;2006.

La espiral de Fermat, 1636
Mahoney, M., *The Mathematical Career of Pierre de Fermat*, PUP, 1994.
Naylor, M., *Math. Mag.* 75:163;2002.

El último teorema de Fermat, 1637
Aczel, A., *Fermat's Last Theorem*, NY: Delta, 1997.
Singh, S., *Fermat's Last Theorem*, NY: Forth Estate, 2002.

La geometría de Descartes, 1637
Boyer, C., Merzbach, U., *A History of Mathematics*, Wiley, 1991.
Grabiner, J., *Math. Mag.* 68:83, 1995.
Gullberg, J., *Mathematics*, Norton, 1997.

La cardioide, 1637
Vecchione, G., *Blue Ribbon Science Fair Projects*, NY: Sterling, 2005.

La espiral logarítmica, 1638
Gardner, M., *The Unexpected Hanging and Other Mathematical Diversions*, UCP, 1991.

Geometría proyectiva, 1639
Otras personalidades destacadas de los siglos XV y XVI que hicieron progresar la teoría matemática de la perspectiva fueron Piero della Francesca, Leonardo da Vinci y Alberto Durero.

La trompeta de Torricelli, 1641
DePillis, J., *777 Mathematical Conversation Starters*, MAA, 2002.

El triángulo de Pascal, 1654
Gordon, J. et al., *Phys. Rev. Lett.* 56:2280;1986.

El teorema de Viviani, 1659
De Villiers, M., *Rethinking Proof with Sketchpad*, Emeryville, CA: Key Curriculum Press, 2003.

El descubrimiento del cálculo, c. 1665
En 1671, Newton escribió *On the Methods of Series and Fluxions* (fluxión es el término que utilizaba Newton para hacer referencia a las derivadas en el campo del cálculo). Este trabajo circuló en manuscrito entre los colegas de Newton en 1671, pero no apareció impreso hasta 1736.

El método de Newton, 1669
Hamming, R., *Numerical Methods for Scientists and Engineers*, Dover, 1986.

El problema de la tautocrona, 1673
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.

El análisis de lo infinitamente pequeño de L'Hôpital, 1696
Ball, W., *A Short Account of the History of Mathematics*, NY: Dover, 1960
Devlin, K., *tinyurl.com/6rc8ho*.
Kleiner, I., *J. Educat. Studies in Math.* 48:137;2001.

El número de Euler, *e*, 1727
La constante matemática *e* resulta especial por muchos motivos; por ejemplo, $f(x) = e^x$ es su propia derivada.

Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.
Kasner, E., Newman, J., *Mathematics and the Imagination*, Dover, 2001.
Maor, Eli, *e: The Story of a Number*, PUP, 1998.

La fórmula de Stirling, 1730
Abraham de Moivre (1667–1754) descubrió la fórmula $n! \approx ce^{-n}n^{n+1/2}$ donde c es una constante. Stirling mostró que $c = \sqrt{2\pi}$.

Ball, K., *Strange Curves, Counting Rabbits, and Other Mathematical Explorations*, PUP, 2003.

La curva de distribución normal, 1733
Galton, F., *Natural Inheritance*, London: Macmillan, 1889.

La constante de Euler-Mascheroni, 1735
Havil, J., *Gamma*, PUP, 2003.

Los puentes de Königsberg, 1736
Newman, J., *Sci. Am.* 189:66;1953.

La paradoja de San Petersburgo, 1738
Martin, R., *tinyurl.com/2sbcju*.
Bernstein, P., *Against the Gods*, Wiley, 1998.

La conjetura de Goldbach, 1742
Doxiadis, A., *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture*, NY: Bloomsbury, 2000.

Las *Instituzioni Analitiche* de Agnesi, 1748
Mazzotti, M., *The World of Maria Gaetana Agnesi*, Baltimore, MD: Johns Hopkins Univ. Press, 2007.
O'Connor, J., Robertson, E., *tinyurl.com/3h74kl*.
Struik, D., *A Source Book in Mathematics. 1200–1800*, PUP, 1986.
Truesdell, C., *Arch. for Hist. Exact Sci.* 40:113;1989.

La fórmula de Euler para los poliedros, 1751
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.
Wells, D., *Math. Intelligencer* 12:7;1990 and 10:30;1988.

El problema de la división del polígono de Euler, 1751
Dörrie, H., *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover, 1965.

El problema del caballo, 1759
Dudeney, H., *Amusements in Mathematics*, Dover, 1970.

El teorema de Bayes, 1761
Algunos historiadores creen que es posible que el matemático inglés Nicholas Saunderson descubriera el teorema de Bayes antes que el propio Bayes.

El cuadrado mágico de Franklin, 1769
Patel, L., *J. Recr. Math.* 23:175;1991.

Superficie mínima, 1774
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.

El problema de los treinta y seis oficiales, 1779
Bose, R. et al., *Canad. J. Math.* 12:189;1960.

La geometría de los *sangaku*, c. 1789
Boutin, C., *tinyurl.com/6nqdl5*.
Rothman, T., Fukagawa, H., *Sci. Am.* 278:85;1998.

El teorema fundamental del álgebra, 1797
Dunham, W., *College Math. J.* 22:282;1991.

Las *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss, 1801
Hawking, S., *God Created the Integers*, RP, 2005.

El transportador de tres brazos, 1801
Huddart, W., *Unpathed Waters*, London: Quiller Press, 1989.
U.S. Hydrographic Office, *Bay of Bengal Pilot*, Washington, D.C.: Govt. Printing Office, 1916.

La serie de Fourier, 1807
Jeans, J., *Science and Music*, Dover, 1968.
Ravetz, J., Grattan-Guiness, I., "Fourier," en *Dictionary of Scientific Biography*, Gillispie, C., ed., NY:Scribner, 1970.

La *Théorie Analytique des Probabilités* de Laplace, 1812
Hawking, S., *God Created the Integers*, RP, 2005.
Richeson, A., *Natl. Math. Mag.* 17:73;1942.

El problema del príncipe Ruperto, 1816
John Wallis fue el primero en escribir sobre este problema, pero he decidido fechar el capítulo tomando como referencia el descubrimiento del cubo máximo que puede pasar a través de otro cubo, realizado por Pieter Nieuwland. Algunas fuentes parecen sugerir que los hallazgos de Wallis acerca de este problema no se publicaron hasta la segunda edición de su libro, publicada en 1693.
Guy, R., Nowakowski, R., *Am. Math. Monthly*, 104:967;1997.

Las funciones de Bessel, 1817
Korenev, B., *Bessel Functions and Their Applications*, Boca Raton, FL:CRC Press, 2004

El ordenador mecánico de Babbage, 1822
Norman, J., *From Gutenberg to the Internet*, Novato, CA: Historyofscience.com, 2005.
Swade, D., *Sci. Am.* 268:86;1993.

***Le Calcul Infinitésimal* de Cauchy, 1823**
Hawking, S., *God Created the Integers*, RP, 2005.
Waterhouse, W., *Bull. Amer. Math. Soc.* 7:634;1982.

El cálculo baricéntrico, 1827
Gray, Jeremy, "Möbius's Geometrical Mechanics," in *Möbius and His Band*, Fauvel, J. et al., eds., OUP, 1993.

Geometrías no euclídeas, 1829
Tallack, P., *The Science Book*, W&N, 2003.

La función de Möbius, 1831
August Möbius estudió esta secuencia en 1831, pero C. Gauss hizo los primeros trabajos más de treinta años antes.

La teoría de grupos, 1832
No sería acertado sacar la conclusión de que toda la teoría de grupos procede de los últimos escritos de Galois. Peterson afirma que, «de hecho, Galois llevaba mucho tiempo escribiendo acerca de este tema, desde los diecisiete años, y la nueva idea de 'grupo' que había dado a conocer se encuentra en todos ellos. En cualquier caso, es cierto que Galois ayudó a crear un campo que mantendría ocupados a los matemáticos durante cientos de años… pero no lo hizo en una sola noche».
Gardner, M., *The Last Recreations*, NY: Springer, 1997.
Peterson, I., *tinyurl.com/6365zo*.

Cuaterniones, 1843
Hamilton publicó muchos artículos en los que desarrollaba la teoría de los cuaterniones, entre ellos uno que llevaba por título «Sobre los cuaterniones», publicado por entregas en *Philos. Mag.* entre 1844 y 1850.

La conjetura de Catalan, 1844
Peterson, I., *tinyurl.com/6g5k8n*.

El álgebra de Boole, 1854
O'Connor, J., Robertson, E., *tinyurl.com/5rv77h*.

El armonógrafo, 1857
En realidad, el primero que estudió las curvas de Lissajous fue N. Bowditch. Lo hizo en 1815. J. Lissajous las exploró de forma independiente en 1857. Es posible que los modelos de Lissajous no puedan considerarse «armonógrafos», dado que los modelos de armonógrafo dependen de un decaimiento gradual de las oscilaciones.

La cinta de Möbius, 1858
Pickover, C., *The Möbius Strip*, TMP, 2006.

El teorema de Holditch, 1858
Cooker, M., *Math. Gaz.* 82:183;1998.

La hipótesis de Riemann, 1859
Derbyshire, J., *Prime Obsession*, NY: Plume, 2004.

La pseudoesfera de Beltrami, 1868
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.

La *Théorie de Baguenodier* de Gros, 1872
El matemático italiano Luca Pacioli fue el primer europeo que mencionó este acertijo, en torno al año 1500. John Wallis lo analizó en 1685, en su *Algebra*.
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.
Gardner, M., *Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments*, Freeman, 1986.
Knuth, D., *The Art of Computer Programming*, Boston: MA, Addison-Wesley, 1998.

El rompecabezas del quince, 1874
Slocum, J., Sonneveld, D., *The 15 Puzzle*, Beverley Hills, CA: Slocum Puzzle Foundation, 2006.

Los números transfinitos de Cantor, 1874
Las investigaciones más importantes de Cantor acerca de los números transfinitos tuvieron lugar entre 1874 y 1883. Exploró por completo sus ideas acerca de éstos en su trabajo más conocido, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengelehre*,de 1895.

La primera demostración de que el conjunto de todos los números reales es incontable, y de que no puede existir una correspondencia uno a uno entre los números reales y los números naturales, fue formulada por Cantor en 1873 (apareció publicada en J. *Reine Angew. Math.* 77:258;1874).

Dauben, J., *Georg Cantor*, HUP, 1979.

El analizador de armónicos, 1876
Montgomery, H. C., *J. Acoust. Soc. Am.* **10**:87;1938.
Thomson, W., *Proc. Royal Soc. London* 27:371;1878.

La caja registradora Ritty Model I, 1879
"James Ritty," *tinyurl.com/6u2so*.
Cortada, J., *Before the Computer*, PUP, 1993.

Los diagramas de Venn, 1880
Ciertos diagramas muy parecidos a los de Venn habían aparecido en una obra de Leonhard Euler, *Opera Omnia*, casi un siglo antes de los trabajos de Venn.

Edwards, A., *Cogwheels of the Mind*, Baltimore, MD: Johns Hopkins Univ. Press, 2004.
Grünbaum, B., *Math. Mag.* 48:12-23;1975.
Hamburger, P., *tinyurl.com/6pp86o*.

La botella de Klein, 1882
Stoll, C., *tinyurl.com/92rp*.

Los axiomas de Peano, 1889
"Peano Axioms," *tinyurl.com/6ez7a7*.

La curva de Peano, 1890
Bartholdi, J., *tinyurl.com/5dtkn4*.
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.
Gardner, M., *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*, MAA, 1997.
Platzman, L., Bartholdi, J., *J. Assoc. Comput. Mach.* **36**:719;1989.
Vilenkin, N., *In Search of Infinity*, NY: Springer 1995.

Los grupos del papel pintado, 1891
B. Grünbaum señala que el número exacto de modelos de papel de la Alhambra no puede definirse bien si no determinamos antes si tendremos en cuenta los colores.

Coxeter, H., *Introduction to Geometry*, Wiley, 1969.
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.
Gardner, M., *New Mathematical Diversions*, MAA, 1995.
Grünbaum, B., *Notices Am. Math. Soc.* **56**:1;2006.

El problema de la recta de Sylvester, 1893
Malkevitch, J., *tinyurl.com/55ecl5*.

La demostración del teorema de los números primos, 1896
Weisstein, E. *tinyurl.com/5puyan*.
Zagier, D., *Math. Intelligencer* 0:7;1977.

El teorema de Pick, 1899
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.

El teorema de las trisectrices de Morley, 1899
Hace poco, John Conway también dio a conocer una demostración sencilla del teorema de Morley. Para más información, véase S. Roberts.

Francis, R., *tinyurl.com/6hyguo*.
Morley, F., *My One Contribution to Chess*, NY: B. W. Huebsch, 1945.
Roberts, S., *King of Infinite Space*, NY: Walker, 2006.

Los veintitrés problemas de Hilbert, 1900
Yandell, B., *Honors Class*, AKP, 2003.

La superficie de Boy, 1901
Jackson, A., *Notices Am. Math. Soc.* **49**:1246;2002.

La paradoja del barbero, 1901
Joyce, H., *tinyurl.com/63c5co*.
Russell, B., *Mysticism and Logic and Other Essays*, London: G. Allen & Unwin, 1917.

La conjetura de Poincaré, 1904
Mackenzie, D., *Science*, **314**:1848;2006.
Nasar, S., Gruber, D., *New Yorker*, p. 44, Aug. 28, 2006.
"Poincaré Conjecture," *tinyurl.com/395gbn*.

El axioma de elección de Zermelo, 1904
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.
Schechter, E., *tinyurl.com/6bk6zy*.

El teorema del punto fijo de Brouwer, 1909
Beran, M. *tinyurl.com/595q4d*.
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.
Davis, M., *The Engines of Logic*, Norton, 2000.

Números normales, 1909
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.

***Filosofía y diversión del álgebra*, de Boole, 1909**
Peterson, I., *tinyurl.com/5bnetc*.

***Principia Mathematica*, 1910–1913**
Irvine, A., *tinyurl.com/aothp*.
Modern Library's Top 100 Nonfiction Books, *tinyurl.com/6pghuw*.

El teorema de la bola peluda, 1912
Choi, C., *tinyurl.com/5wfk5h*.
DeVries, G., Stellacci, F., et al. *Science* **315**:358;2007.

El teorema de los infinitos monos, 1913
Nótese que que la utilización del término *«es prácticamente seguro»* al comienzo de este capítulo es la forma matemática de decir que el mono mecanografiará un texo finito determinado con una probabilidad de uno, suponiendo que le permitirmos un número infinito de intentos.

Borel, É., *J. Phys.* **3**:189;1913.
Eddington, A., *The Nature of the Physical World*, NY: Macmillan, 1928.

La conjetura de Bieberbach, 1916
Mehrtens, H., "Ludwig Bieberbach and Deutsche Mathematik," in *Studies in the History of Math.*, Phillips, E., ed., MAA, 1987. Fuente de la cita de Bierberbach sobre los judíos.
Sabbagh, K., *tinyurl.com/5969je*.

El teorema de Johnson, 1916
Kimberling, C., *tinyurl.com/6a7o96*.
Wells, D., *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, NY: Penguin, 1992.

La constante de Brun, 1919
Gardner, M., *Sci. Am.* **210**:120;1964.
Granville, A., *Resonance* 3:71;1998.
Peterson, I., *tinyurl.com/5db4tw*.

El número gúgol, c. 1920
Los expertos no se ponen de acuerdo acerca del nacimiento de Sirotta (1911 para unos, 1929 para otros) y de la fecha en que se acuñó el término gúgol (1920 o 1938).

Kasner, E., Newman, J., *Mathematics and the Imagination*, Dover, 2001.

El collar de Antoine, 1920
Brechner, B., Mayer, J., *Coll. Math. J.* 19:306;1988.
Jackson, A., *Notices of the Am. Math. Soc.* 49:1246;2002.

Perdido en el hiperespacio, 1921
Asimov, D., *The Sciences* **35**:20;1995.

La esfera cornuda de Alexander, 1924
Gardner, M., *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*, MAA, 1997.

La cuadratura del rectángulo, 1925
"Zbigniew Moroń," *tinyurl.com/5v3tqw*.

El hotel infinito de Hilbert, 1925
Nótese que existen ciertos niveles (o clases) de infinito a los que el Gran Hotel de Hilbert no podría dar cabida. G. Cantor demostró que hay infinitos tan grandes que no se pueden contar (que es, en esencia, lo que hacemos cuando asociamos cada invitado con un número de habitación). Nótese, además, que la fecha exacta del Hotel de Hilbert, así como su origen, es difícil de determinar. Hilbert habló de este hotel en sus conferencias de 1925. Su artículo "On the Infinite" se entregó en 1925.

Gamow, G., *One, Two, Three…Infinity*, NY: Viking Press, 1947.

La esponja de Menger, 1926
"Fractal Fragments," *tinyurl.com/5sog2j*.
"The Menger Sponge," *tinyurl.com/58hy6p*.

El analizador diferencial, 1927
Bush, V., Gage, F., Stewart, H., *J.*

Franklin Inst. 203:63;1927.
Bush, V., *tinyurl.com/cxzzf*.

La teoría de Ramsey, 1928
Graham, R., Spencer, J., *Sci. Am.* 263:112;1990.
Hoffman, P., *The Man Who Loved Only Numbers*, NY: Hyperion, 1999.

El teorema de Gödel, 1931
Gödel demostró la incompletitud de la teoría de *Principia Mathematica*, de la que hablamos en el capítulo dedicado a ésta obra.

Hofstadter, D., *Gödel, Escher, Bach*, NY: Basic Books, 1979.
Wang, H., *Reflections on Kurt Gödel*, MIT, 1990.

El número de Champernowne, 1933
Belshaw, A., Borwein, P., *tinyurl.com/6mms3d*.
Von Baeyer, H., *Information*, HUP, 2004.

Bourbaki: una sociedad secreta, 1935
Aczel, A., *The Artist and the Mathematician*, TMP, 2006.
Mashaal, M., *Bourbaki*, AMS, 2006.

Las teselaciones de Voderberg, 1936
Grünbaum, B., Shephard G., *Math. Teach.* 88:50;1979.
Grünbaum, B., Shephard, G., *Tilings and Patterns*, Freeman, 1987.
Rice, M., Schattschneider D., *Math. Teach.* 93:52;1980.

La paradoja del cumpleaños, 1939
Gardner, M., *Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments*, Freeman, 1986.
Peterson, I., *tinyurl.com/53w78*.

Circunscripción de polígonos, c. 1940
Bouwkamp, C., *Indagationes Math.* 27:40;1965.
Kasner, E., Newman, J., *Mathematics and the Imagination*, Dover, 2001.

Hex, 1942
Gale, D., *Am. Math. Monthly* 86:818;1979.
Gardner, M., *Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions*, S&S, 1959.
Nasar, S., *A Beautiful Mind*, NY: Touchstone, 2001.

La estrategia del juego del cerdo, 1945
Neller, T., Presser, C., *UMAP J.* 25:25;2004.
Neller, T., Presser, C. *tinyurl.com/6fqyht*.
Peterson, I., *tinyurl.com/5tnteq*.
Scarne, J., *Scarne on Dice*, Harrisburg, PA: Military Service Publishing Co., 1945.

El método del cuadrado medio de Von Neumann, 1946
Hayes, B., *Am. Scient.* 89:300;2001,

El código Gray, 1947
Gardner, M., *Knotted Doughnuts and Other Mathematical Entertainments*, Freeman, 1986.
"What Are Gray Codes?" *tinyurl.com/5txwee*.

La teoría de la información, 1948
Tallack, P., *The Science Book*, W&N, 2003.

La calculadora Curta, 1948
Sería más preciso decir que Herzstark era «medio judío», tal y como señaló un nazi para referirse a él cuando Herzstark trataba de proteger a sus amigos de la Gestapo. Su padre era judío, pero su madre era católica.

Furr, R., *tinyurl.com/hdl3*.
Ifrah, G., *The Universal History of Computing*, Wiley, 2002.
Saville, G., *tinyurl.com/5da57m*.
Stoll, C., *Sci. Am.* 290:92;2004.

El poliedro de Császár, 1949
Császár, Á., *Acta Sci. Math. Szeged*, 13:140;1949. Se trata de un artículo sin imágenes: tal vez eso explique por qué no hubo más investigaciones acerca de este asunto hasta la década de 1970.
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.
Gardner, M., *Time Travel and other Mathematical Bewilderments*, Freeman:1987.

El equilibrio de Nash, 1950
Nasar, S., *A Beautiful Mind*, S&S, 1998.
Tallack, P., *The Science Book*, W&N, 2003.

La paradoja de la línea de costa, c. 1950
Mandelbrot, B., *Science*, 156:636;1967.
Richardson, L., *Statistics of Deadly Quarrels*, Pacific Grove, CA: Boxwood Press, 1960.

El dilema del prisionero, 1950
Poundstone, W., *Prisoner's Dilemma*, NY: Doubleday, 1992.

Los autómatas celulares, 1952
Von Neumann, J., *Theory of Self-Reproducing Automata*, Urbana: IL: U. Illinois Press, 1966.
Wolfram, S., *A New Kind of Science*, Champaign, IL: Wolfram Media, 2002.

Las recreaciones matemáticas de Martin Gardner, 1957
Berlekamp, E., Conway, J., Guy, T., *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Burlington, MA: Elsevier, 1982.
Gardner, M., *Martin Gardner's Mathematical Games* (CD-ROM), MAA, 2005.
Jackson, A., *Notices Am. Math. Soc.* 52:602;2005.

La conjetura de Gilbreath, 1958
Norman Gilbreath me contó que «Erdös creía que mi conjetura era probablemente cierta y que no se demostraría hasta que no pasaran doscientos años».

Guy, R., *Am. Math. Monthly* 95:697;1988.
Guy, R., *Math. Mag.* 63:3;1990.
Guy, R., "Gilbreath's Conjecture," in *Unsolved Problems in Number Theory*, NY: Springer, 1994.
Odlyzko, A., *Math. Comput.* 61:373;1993.

Cómo evertir una esfera, 1958
Norman Gilbreath me contó que «Erdös creía que mi conjetura era probablemente cierta y que no se demostraría hasta que no pasaran doscientos años».

Los billares platónicos, 1958
Cipra, B., *Science* 275:1070;1997.

Los billares externos, 1959
Cipra, B., *Science*, 317:39;2007.
Schwartz, R., *tinyurl.com/2mtqzp*.

La paradoja de Newcomb, 1960
Gardner, M., *The Colossal Book of Mathematics*, Norton, 2001.
Nozick, R., "Newcomb's Problem and Two Principles of Choice," en *Essays in Honor of Carl Hempel*, Rescher, N., ed., Dordrecht: D. Reidel, 1969.

Los números de Sierpiński, 1960
Peterson, I., *tinyurl.com/674cu3*.
"Seventeen or Bust," *seventeenorbust.com*.
Zagier, D., *Math. Intelligencer*, 0:7;1977.

El caos y el efecto mariposa, 1963
Gleick, J., *Chaos*, NY: Penguin, 1988.
Lorenz, E., *J. Atmos. Sci.* 20:130;1963.

La espiral de Ulam, 1963
Gardner, M., *The Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American*, UCP, 1984.

La indecibilidad de la hipótesis del continuo, 1963
Los recientes trabajos de W. Hugh Wooden sugieren la posibilidad de que la hipótesis del continuo sea falsa. Sin embargo, esta hipótesis sigue siendo un tema candente en las investigaciones actuales.

Cohen, P., *Proc. Natl. Acad. Sci.* 50:1143;1963.
Gödel, K., *Am. Math. Monthly* 54:515;1947.
Woodin, W., *Notices of the Am. Math. Soc.* 48:567;2001.

Superhuevo, c. 1965
Gardner, M., *Mathematical Carnival*, NY: Vintage, 1977.

La lógica difusa, 1965

Tanaka, K., *An Introduction to Fuzzy Logic for Practical Applications*, NY: Springer, 1996.

Locura instantánea, 1966
Armbruster, F., *tinyurl.com/65epdv*.
Peterson, I., *tinyurl.com/6pthxh*.

El programa de Langlands, 1967
Gelbart, S., *Bull. Am. Math. Soc.* 10:177;1984.
Gelbart, S., "Number Theory and the Langlands Program," Guangzhou, China, *Intl. Instruct. Conf.*, 2007.
Mackenzie, D., *Science* 287:792;2000.
Mozzochi, C., *The Fermat Diary*, AMS, 2000.

El juego del drago, 1967
Berlekamp, E., Conway, J., Guy, R., *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Burlington, MA: Elsevier, 1982.
Focardi, R., Luccio, F., *Discrete Appl. Math.* 144:303;2004.
Gardner, M., *Sci. Am.* **217**:112;1967.
Lemoine, J., Viennot, S., *tinyurl.com/56bfcd*, *tinyurl.com/6kazbt*.
Peterson I., *tinyurl.com/6l3huh*.

La teoría de las catástrofes, 1968
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.
Thom, R., with response by Zeeman, E., "Catastrophe Theory," en *Dynamical Systems-Warwick 1974*, Manning, A., ed., NY: Springer, 1975.
Zahler, R., Sussman, H., *Nature* 269:759;1977.

La habitación no iluminable de Tokarsky, 1969
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.
Stewart, I., *Sci. Am.* **275**:100;1996.
Stewart, I., *Math Hysteria*, OUP, 2004.

Donald Knuth y *Mastermind*, 1970
Chen, Z. et al., "Finding a Hidden Code by Asking Questions," en *Proc. 2nd Annual Intl. Conf. Comput. Combinat.*, Hong Kong, 1996.
Knuth, D., *J. Recr. Math.* 9:1;1976.
Koyama, K., Lai, T., *J. Recr. Math.* 25:251;1993.

Erdös y la colaboración extrema, 1971
Hoffman, P., *The Man Who Loved Only Numbers*, NY: Hyperion, 1999.
Schechter, B., *My Brain Is Open*, S&S, 2000.

HP-35: la primera calculadora científica de bolsillo, 1972
Lewis, B., *tinyurl.com/5t37nr*.

Las teselas de Penrose, 1973
R. Amman descubrió estas teselaciones, de forma indepeniente, al mismo tiempo que Penrose. Según B. Grünbaum y G. Shephard, «en 1973 y 1974 Roger Penrose descubrió tres conjuntos de prototeselas aperiódicas». Por ejemplo, el primer conjunto, conocido como P1, consiste en seis teselas basadas en rombos, pentágonos regulares, pentáculos y «semipentáculos» con bordes, modificados por proyecciones y hendiduras. El segundo conjunto de teselas aperiódicas, conocido como P2, y descubierto por Penrose en 1974, contiene sólo dos teselas.

Chorbachi, W., Loeb, A., "Islamic Pentagonal Seal" in *Fivefold Symmetry*, Hargittai, I., ed.,WS, 1992.
Gardner, M., *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*, Freeman, 1988.
Grünbaum, B., Shephard, G., *Tilings and Patterns*, Freeman, 1987.
Lu, P., Steinhardt, P., *Science* **315**:1106;2007.
Makovicky, E., "800-Year-Old Pentagonal Tiling from Maragha, Iran, and the New Varieties of Aperiodic Tiling it Inspired," en *Fivefold Symmetry*, Hargittai, I., ed., WS, 1992.
Penrose, R., *Bull. of the Inst. Math. Applic.* 10:266;1974.
Rehmeyer, J., *tinyurl.com/64ppgz*.
Senechal, M., "The Mysterious Mr. Ammann," *Math. Intell.* 26:10;2004.

El teorema de la galería de arte, 1973
Si el polígono es convexo, todo su interior puede verse desde cualquiera de los vértices.

Chvátal, V., "A Combinatorial Theorem in Plane Geometry," *J. Combinat. Theory* 18:39;1975.
Do, N., *Austral. Math. Soc. Gaz.* 31:288;2004.
Fisk, S., *J. Combinat. Theory, Ser. B* 24:374;1978.
O'Rourke, J., *Art Gallery Theorems & Algorithms*, OUP, 1987.

El cubo de Rubik, 1974
Longridge, M., *cubeman.org*.
Velleman, D., *Math. Mag.* 65:27;1992.

La constante Omega de Chaitin, 1974
Chaitin, G., *J. ACM.* 22:329;1975. Omega aparece por primera vez en esta publicación. El término se utilizó también es 1974, en un informe técnico del departamento de investigación de IBM.
Chaitin, G., *Meta Math?*, NY: Pantheon, 2005.
Chown, M., *New Sci.* 169:28;2001.
Gardner, M., *Fractal Music, Hypercards and More*, Freeman, 1991. Contiene los escritos de of C. Bennett.
Lemonick, M., *tinyurl.com/59q796*.

Los números surreales, 1974
Conway, J., Guy, R., *The Book of Numbers*, NY: Copernicus, 1996.
Gardner, M., *Mathematical Magic Show*, MAA, 1989.
Knuth, D., *Surreal Numbers*, Reading, MA: Addison-Wesley, 1974.

Los fractales, 1975
Muchos fractales interesantes desde el punto de vista visual se generan por medio de los métodos de iteración que dieron a conocer G. Julia y P. Fatou entre 1918 y 1920.

Mandelbrot, B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, 1982.

La constante de Feigenbaum, 1975
Feigenbaum, M., "Computer Generated Physics," in *20th Century Physics*, Brown, L. et al., eds., NY: AIP Press, 1995.
May, R., *Nature* **261**:459;1976.

Criptografía de clave pública, 1977
Diffie, W., Hellman, M., *IEEE Trans. Info. Theory* 22:644;1976.
Hellman, M., *Sci. Am.* **241**:146;1979.
Lerner, K., Lerner, B., eds., *Encyclopedia of Espionage Intelligence and Security*, Farmington Hills, MI, Gale Group, 2004.
Rivest, R., Shamir, A., Adleman, L., *Commun. ACM* **21**:120;1978.

El poliedro de Szilassi, 1977
Gardner, M., *Fractal Music, Hypercards and More*, Freeman, 1992.
Peterson, I., *tinyurl.com/65p8ku*.
Szilassi, L., *Struct. Topology* **13**:69;1986.

El atractor de Ikeda, 1979
Ikeda, K., *Optics Commun.* **30**:257;1979.
Strogatz, S., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, NY: Perseus, 2001.

Spidrones, 1979
Erdély, D., *www.spidron.hu*.
Peterson, I., *Sci. News* 170:266;2006.

El conjunto de Mandelbrot, 1980
Clarke, A., *The Ghost from the Grand Banks*, NY: Bantam, 1990.
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.
Mandelbrot, B., *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, 1982.
Wegner, T., Peterson, M., *Fractal Creations*, Corte Madera, CA: Waite Group Press, 1991.

El grupo Monstruo, 1981
Conway, J., Sloane, N., "The Monster Group and its 196884-Dimensional

Space" y "A Monster Lie Algebra?" in *Sphere Packings, Lattices, and Groups*, NY: Springer, 1993.
Griess, R., *Invent. Math.* **69**:1;1982.
Griess, R., Meierfrankenfeld, U., and Segev, Y., *Ann. Math.* **130**: 567;1989.
Ronan, M., *Symmetry and the Monster*, OUP, 2006.

Selección de triángulos en una esfera, 1982
Buchta, C., *Ill. J. Math.* **30**:653;1986.
Hall, G., *J. Appl. Prob.* **19**:712;1982.
Weisstein, E., *tinyurl.com/5o2sap*.

El polinomio de Jones, 1984
El polinomio de HOMFLY recibe su nombre de las iniciales de los apellidos de sus descubridores: Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, and Yetter.

Adams, C., *The Knot Book*, AMS, 2004.
Devlin, K., *The Language of Mathematics*, NY: Owl Books, 2000.
Freyd, P. et al., *Bull. AMS* **12**:239;1985.
Jones, V., *Bull. AMS* **12**:103;1985.
Przytycki, J., Traczyk, P., *Proc. AMS* **100**:744;1987.
Witten, E., *Commun. Math. Phys.* **21**:351;1989.

La variedad de Weeks, 1985
Cipra, B., *Science* **317**:38;2007.
Gabai, D. et al., *tinyurl.com/6mzsso*.
Weeks, J., *Hyperbolic Structures on 3-Manifolds*, Princeton Univ. Ph.D. thesis, Princeton University, 1985.
Weeks, J., *The Shape of Space*, NY: Marcel Dekker, Inc., 2001.

La conjetura de Andrica, 1985
Andrica, D., *Revista Matematică*, 2:107;1985.
Andrica, D., *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math* **31**:48;1986.
Guy, R., *Unsolved Problems in Number Theory*, NY: Springer, 1994.

La conjetura *ABC*, 1985
Darling, D., *UBM*, Wiley, 2004.
Goldfeld, D., *Math Horizons*, Sept:26;1996.
Goldfeld, D., *The Sciences*, March:34;1996.
Masser, D., *Proc. Am. Math. Soc.* **130**:3141;2002.
Nitaq, A., *tinyurl.com/6gaf87*.
Oesterlé, J., *Astérisque* **161**:165;1988.
Peterson, I., *tinyurl.com/5mgwvk*.

La sucesión audioactiva, 1986
Conway, J., *Eureka*, **46**:5;1986.
Conway, J., Guy, R., *The Book of Numbers*, NY: Copernicus, 1996.

Mathematica, 1988
Trademarks (Mathematica: Wolfram Research; Maple: Waterloo Maple; Mathcad: Mathsoft; MATLAB: MathWorks).
Berlinski, D., *The Sciences*, Jul./Aug.:37;1997.
Borwein, J., Bailey, D., *Mathematics by Experiment*, AKP, 2003.
"Wolfram Research," *wolfram.com*.

La ley de Murphy y los nudos, 1988
Deibler, R., et al. *BMC Molec. Biol.* 8:44;2007.
Matthews, R., *Math. Today* **33**:82;1997.
Peterson, I., *tinyurl.com/5r8ccu*, *tinyurl.com/5nlrms*.
Raymer, D., Smith, D., *Proc. Natl. Acad. Sci.* **104**:16432;2007.
Sumners, D., Whittington, S., *J. Phys. A* **21**:1689;1988.

La curva mariposa, 1989
Fay, T., *Am. Math. Monthly* **96**,442;1989.

La enciclopedia *on-line* de las secuencias de números enteros, 1996
Sloane, N., "My Favorite Integer Sequences," in *Sequences and their Applications*, Ding, C., Helleseth, T., Niederreiter H., eds., NY: Springer, 1999.
Sloane, N., *Notices of the AMS* **50**:912;2003.
Stephan, R., *tinyurl.com/6m84ca*.

El puzle Eternidad, 1999
Selby, A., *tinyurl.com/5n6dwf*.
Weisstein, E., *tinyurl.com/6lyxdl*.

La paradoja de Parrondo, 1999
Nótese que en los juegos A y B, si se juegan de forma separada, existe una total certeza de que el jugador acabará perdiendo para cualquier valor permitido de x hasta 0.1

Abbott, D., *tinyurl.com/6xwg44*.
Blakeslee, S., *tinyurl.com/6yvd92*.
Harmer, G., Abbott, D., *Nature* **402**:864;1999.
Harmer, G., Abbott, D., *Stat. Sci.* **14**:206;1999.

La solución del holiedro, 1999
Hatch, D., *tinyurl.com/5rttaq*.
Vinson, J., *Discr. Comput. Geom.* **24**:85;2000.

El problema de la sábana, 2001
Historic. Soc. Pomona Vall., *tinyurl.com/5cv4ce*.

La solución del Awari, 2002
Peterson, I., *tinyurl.com/65hnet*.
Romein, J., Bal, J., *IEEE Computer* **36**:26;2003.

El Tetris es NP-completo, 2002
La fórmula de puntuación de los productos de Tetris tiene en cuenta que ciertas operaciones de desaparición de filas son más difíciles que otras, de modo que merecen recibir más puntos.

Breukelaar, R., Demaine, E., et al. *Intl. J. Comput. Geom. Appl.* 14:41;2004.
Demaine, E., Hohenberger, S., Liben-Nowell, D., "Tetris Is Hard, Even to Approximate," *Comput. Combinat., 9th Ann. Intl. Conf.*, 2003.
Peterson, I., *tinyurl.com/5mqt84*.

***NUMB3RS*, 2005**
Frazier, K., *tinyurl.com/6e2f8h*.
Weisstein, E., *tinyurl.com/5n4c99*.

La solución matemática de las damas, 2007
Cho, A., *Science* **317**:308;2007.
Schaeffer, J., et al. *Science* **317**:1518;2007.

La búsqueda del grupo de Lie E_8, 2007
En 2007, el físico A. G. Lisi conjeturó que E_8 permitía explicar el modo en que distintas partículas fundamentales pueden derivar de distintos aspectos de las extrañas y hermosas simetrías de este grupo.

Collins, G., *Sci. Am.* **298**:30;2008.
Lisi, A. G., *tinyurl.com/6ozgdh*.
Mackenzie, D., *Science*, **315**:1647;2007.
Merali, Z., *New Scientist*, **196**:8;2007.
American Institute of Math., *aimath.org/E8/*.

La hipótesis del universo matemático, 2007
La teoría de Tegmark se basó, en parte, en una charla que formó parte del simposio sobre multiverso y teoría de cuerdas en 2005 en la Stanford. Las semillas de su teoría se diseminaron en artículos de finales de los 90, pero el fruto no alcanzó todo su esplendor hasta 2007. Otros investigadores (K. Zuse, E. Fredkin y S. Wolfram, por ejemplo) han sugerido la posibilidad de que el universo físico esté controlado por un autómata celular.

Collins, G., *Sci. Am.* **298**:30, 2008.
Fredkin, E., *Physica D* **45**:254, 1990.
Tegmark, M., *New Scientist* **195**:39, 2007.
Tegmark, M., *tinyurl.com/6pjjxp*.
Wolfram, S., *A New Kind of Science*, Champaign, IL: Wolfram Media, 2002.
Zuse, K., *Elektronische Datenverarbeitung* 8:336;1967.

Índice

Créditos fotográficos

Dado que muchas de las imágenes reproducidas en este libro no pudieron adquirirse en una versión limpia y legible, me he tomado la libertad, en ocasiones, de utilizar técnicas de procesamiento de imágenes para eliminar suciedad y otro tipo de daños, para ampliar zonas apagadas y, en ciertos casos, para añadir algo de color a un documento en blanco y negro (con el objetivo de resaltar algún detalle o, simplemente, de lograr que la imagen resultara más amable a la vista). Espero que los puristas perdonen estos leves toques artísticos y comprendan que mi objetivo era crear un libro atractivo, rico en detalles y hechos históricos, que fuera al mismo tiempo interesante desde un punto de vista estético y capaz de atraer la atención de estudiantes y profanos. Mi amor por la profundidad y la diversidad increíbles de las matemáticas, el arte y la historia debería quedar claro con tan solo echar un vistazo a las fotografías y dibujos que se exhiben en este libro.

Imágenes © Clifford A. Pickover: páginas 49, 55, 75, 97, 103, 106, 112, 113, 133, 147, 148, 151, 157, 159, 169, 174, 179, 185, 189, 197, 199, 201, 203, 272 (left), 277, 291, 295, 297, 301, 321, 333, 337, 339, 345, 353, 361, 383, 385, 399, 425, 427, 437, 441, 443, 450, 469, 470, 477, 493, 497, 499, 502, 517

Imágenes © Teja Krašek: páginas 59, 65, 183, 245, 373, 408, 415

Imágenes de Jos Leys (josleys.com): páginas 125, 139, 145, 225, 377, 449, 459, 461, 473, 479

Imágenes © Paul Nylander, bugman123.com: páginas 51, 117, 155, 193, 217, 255, 257, 303, 335

Con el permiso de Shutterstock.com:
p. 21, Imagen © shaileshnanal, 2009; p. 23, Imagen © 2265524729, 2009; p. 31, Imagen © Mikael Damkier, 2009; p. 33, Imagen © rfx, 2009; p. 43, Imagen © GJS, 2009; p. 47 y 177, Imagen © James Steidl, 2009; p. 61, Imagen © Hisom Silviu, 2009; p. 63, Imagen © Andreas Guskos, 2009; p. 67, Imagen © Ovidiu Iordachi, 2009; p. 91, Imagen © Sebastian Knight, 2009; p. 93, Imagen © Olga Lyubkina, 2009; p. 99, Imagen © Tan Kian Khoon, 2009; p. 101, Imagen © Ella, 2009; p. 123, Imagen © Jiri Moucka, 2009; p. 141, Imagen © Geanina Bechea, 2009; p. 163, Imagen © Maxx-Studio, 2009; p. 167, Imagen © MWaits, 2009; p. 231, Imagen © Steve Mann, 2009; p. 243 y 351, Imagen © photobank.kiev.ua, 2009; p. 275, Imagen © Lee Torrens; p. 279,Imagen © Holger Mette, 2009; p. 289, Imagen © Rafael Ramirez Lee, 2009; p. 293, Imagen © Yare Marketing p. 305, Imagen © Jeff Davies, 2009; p. 307, Imagen © Arlene Jean Gee, 2009; p. 313, Imagen © Andrey Armyagov, 2009; p. 319, Imagen © Anyka, 2009; p. 327, Imagen © Vasileika Aleksei, 2009; p. 329, Imagen © ChipPix, 2009; p. 355, Imagen © Elena Elisseeva, 2009; p. 379, Imagen © Jeff Carpenter, 2009; p. 381, Imagen © Scott Maxwell/ LuMaxArt, 2009; p. 387, Imagen © Marcus Tuerner, 2009; p. 395, Imagen © Wayne Johnson, 2009; p. 401, Imagen © Tischenko Irina, 2009; p. 405, Imagen © Lou Oates, 2009; p. 412, Imagen © kotomiti, 2009; p. 419, Imagen © Zoran Vukmanov Simokov, 2009; p. 435, Imagen © Jakez, 2009; p. 439, Imagen © Dmitrijs Mihejevs, 2009; p. 445, Imagen © Polina Lobanova, 2009; p. 455, Imagen © Fabrizio Zanier, 2009; p. 490, Imagen © Ronald Sumners, 2009; p. 491, Imagen © vladm, 2009; p. 495, Imagen © Gilmanshin, 2009; p. 501, Imagen © Robert Kyllo, 2009; p. 503, Imagen © Armin Rose, 2009; p. 505, Imagen © Kheng Guan Toh, 2009; p. 507, Imagen © imageshunter, 2009; p. 509, Imagen © suravid, 2009

Otras imágenes: p. 19 Imagen Matthias Wittlinger; p. 27 Royal Belgian Institute of Natural Sciences; p. 29 Fotografía de Marcia y Robert Ascher. En la colección del Museo Nacional de Arqueología, Antropología e Historia del Perú, Lima, Perú; p. 39. Paul St. Denis y Patrick Grim crearon la imagen fractal del tres en raya en el Logic Lab del departamento de filosofía de SUNY Stony Brook. Una versión anterior apareció ya en St. Denis y Grim, "Fractal Image of Formal Systems," *Journal of Philosophical Logic* 26 (1997), 181-222, junto con Ian Stewart, "A Fractal Guide to Tic-Tac-Toe," *Scientific American* 283, nº. 2 (2000), 86-88; p. 69 © istockphoto.com/bkindler; p. 71 © istockphoto.com/ fanelliphotography; p. 81 © istockphoto.com/ -M-I-S-H-A-; p. 95 Mike Simmons, Astronomers Without Borders; p. 109 Fotografía de Rischgitz/Getty Images; p. 111 © istockphoto.com/kr7ysztof; p. 127 Con el permiso de Salvatore Torquato; p. 129 © Science Museum/Science & Society; p. 131 © istockphoto. com/ihoe; p. 146 De George W. Hart, http://www. georgehart.com; p. 165 Cortesía de The Swiss Post, Stamps & Philately; p. 175 Wikipedia/Matt Britt; p. 187 Cortesía de Dmitry Brant, http:// dmitrybrant.com; p. 191 Library of Congress, David Martin, pintado 1767; p. 205 Fractal Art de G. Fowler; p. 211 © istockphoto.com/theasis; p. 219 Wikimedia/Carsten Ullrich; p. 223 Brian Mansfield; p. 233 Wikimedia/Leo Fink, con ayuda del software Gaston; p. 239 El retrato es el frontispicio del cuarto volumen de *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, editado por H. F. Baker, Cambridge University Press 1912; p. 241 © istockphoto.com/ nicoolay; p. 247 Ivan Moscovitch; p. 249 Clifford A. Pickover y Teja Kra˘sek; p. 251 Brian C. Mansfield; p. 253 Tibor Majláth; p. 259 U.S. Patent Office; p. 263 © istockphoto.com/ MattStauss; p. 267 U.S. Patent Office; p. 269 fotógrafo Clive Streeter © Dorling Kindersley, Cortesía del Science Museum, Londres; p. 271 © National Museum of American History; p. 272 (derecha) y 273 Venn Diagrams creado por Edit Hepp y Peter Hamburger; p. 283 Imagen creada por Robert Webb con el software Stella4D, http:// www.software3d.com; p. 287 Diseñada y fotografiada por Carlo H. Sequin, University of California, Berkeley; p. 311 Robert Fathauer; p. 315 Robert Bosch, Oberlin College, DominoArtwork.com; p. 317 Mark Dow, geek art; p. 323 Del libro *George Boole: His Life and Work*, de Desmond MacHale (Boole Press); p. 331 Wikimedia; p. 341 Rob Scharein, página web de Rob knotplot.com; p. 347 © istockphoto.com/ Pichunter; p. 349 Cameron Browne; p. 357 Imagen de Paul Bourke y Gayla Chandler, junto con Sydney Renee; p. 359 NASA Headquarters/ Greatest Images of NASA; p. 363 Fotografía de Oskar Morgenstern. Cortesía del Archivo del Instituto de Estudios Avanzados, Princeton, NJ; p. 365 Peter Borwein; p. 367 © istockphoto.com/ BernardLo; p. 369 Fotografía de Stefan Zachow; p. 389 Fotografía del Ejército estadounidense, de K. Kempf, "Historical Monograph: Electronic Computers Within the Ordinance Corps"; p. 393 U.S. Patent Office; p. 397 Wikimedia/Larry McElhiney; p 400 Wikimedia/Elke Wetzig; p. 403 © istockphoto.com/abzee; p. 407 Wikimedia/ © 2005 Richard Ling; p. 409 "Card Colm" Mulcahy, March 2006, Norman, Oklahoma; p. 411 Norman Gilbreath de Cambridge University, Inglaterra; p. 413 Diseñada y fotografiada por Carlo H. Séquin, University of California, Berkeley; p. 417 Richard Evan Schwartz; p. 421 © 2002–2008 Louie Helm; p. 423 Roger A. Johnston, Imagen fractal creada con Apophysis (software disponible en www.apophysis.org); p. 429 © Philip Gould/ CORBIS; p. 431 © istockphoto.com/ CaceresFAmaru; p. 433 Edward Rothschild; p. 434 © C. J. Mozzochi, Ph.D., Princeton, NJ; p. 447 © 2008 Hewlett-Packard Development Company, L.P. Reproducción autorizada. Fotografía de Seth Morabito; p. 451 © istockphoto. com/ dlewis33; p. 452 Fotografía de Zachary Paisley. Rubik's Cube® es una marca registrada de Seven Towns, Ltd.; p. 453 Hans Andersson; p. 456 Thane Plambeck; p. 457 Cubierta del libro del libro de Donald Knuth, SURREAL NUMBERS, © 1974. Reproducida con el permiso de Pearson Education, Inc.; p. 463 Steven Whitney en 25yearsofprogramming.com; p. 465 Robert Lord; p. 467 Hans Schepker, artista matemático y profesor; p. 471 Dániel Erdély © 2005; p. 475 Fotografía de Robert Griess; p. 481 Imagen cortesía de Jeff Weeks, www.geometrygames.org; p. 485 David Masser; p. 489 Michael Trott; p. 511 Cortesía de Photofest; p. 515 Wikimedia/John Sternbridge.